

<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 01: Mathematische Grundlagen

Lösung Beispielaufgabe 1: Verkettung von Abbildungen [2]

- (a) A bildet $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ ab und B bildet $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}_0$ ab; $C = B \circ A$ bildet somit $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}_0$ ab. Das Bild von n ist $C(n) = B(A(n)) = B(n+1) = |n+1|$. Zusammengefasst:

$$C : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto C(n) = |n+1|.$$

- (b) A , B und C sind alle surjektiv. A ist weiterhin injektiv und bijektiv. B ist nicht injektiv, da jedes positive $n \in \mathbb{N}_0$ das Bild zweier Punkte in $\mathbb{Z}$ ist, $B(n) = B(-n) = n$. Daher ist B auch nicht bijektiv. Folglich ist auch C nicht injektiv und somit nicht bijektiv.

Lösung Beispielaufgabe 2: Die Abelsche Gruppe $\mathbb{Z}_2$ [3]

- (a) Aus der Additionstabelle gehen folgende Eigenschaften hervor:

- (i) Abgeschlossenheit: das Ergebnis jeder möglichen Addition ist aufgeführt und liegt offensichtlich wieder in der Menge $\{0, 1\}$. ✓

+	0	1
0	0	1
1	1	0

- (ii) Assoziativität:

$$(1+0)+0 = 1+0 = 1 \stackrel{?}{=} 1+(0+0) = 1+0 = 1 \quad \checkmark$$

$$(0+1)+0 = 1+0 = 1 \stackrel{?}{=} 0+(1+0) = 0+1 = 1 \quad \checkmark$$

$$(1+1)+0 = 0+0 = 0 \stackrel{?}{=} 1+(1+0) = 1+1 = 0 \quad \checkmark$$

$$(1+0)+1 = 1+1 = 0 \stackrel{?}{=} 1+(0+1) = 1+1 = 0 \quad \checkmark$$

$$(0+1)+1 = 1+1 = 0 \stackrel{?}{=} 0+(1+1) = 0+0 = 0 \quad \checkmark$$

$$(0+0)+1 = 0+1 = 1 \stackrel{?}{=} 0+(0+1) = 0+1 = 1 \quad \checkmark$$

- (iii) Neutrales Element ist die 0, denn deren Addition liefert keine Änderung: $0+0 = 0$, $0+1 = 1$.

- (iii) Zu jedem Element gibt es nach Tabelle auch genau ein Inverses, d.h. in der Tabelle steht in jeder Zeile genau eine 0.

- (iv) Die Gruppe ist Abelsch, da die Tabelle symmetrisch zur Diagonalen ist.

- (b) Die Gruppe $(\{+1, -1\}, \cdot)$ mit der üblichen Multiplikation als Gruppenoperation ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, da ihre Verknüpfungstabelle dieselbe Struktur wie die von $\mathbb{Z}_2$ hat.

•	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Lösung Beispielaufgabe 3: Permutationsgruppen [4]

- (a) Die Einträge der Verknüpfungstabelle ergeben sich durch Berechnung des Bildes von 123 unter P gefolgt von P' . Zum Beispiel folgt aus $123 \xrightarrow{[213]} 213 \xrightarrow{[321]} 231$ dass $[321] \circ [213] = [231]$.

$P' \circ P$	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[123]	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[231]	[231]	[312]	[123]	[321]	[132]	[213]
[312]	[312]	[123]	[231]	[132]	[213]	[321]
[213]	[213]	[132]	[321]	[123]	[312]	[231]
[321]	[321]	[213]	[132]	[231]	[123]	[312]
[132]	[132]	[321]	[213]	[312]	[231]	[123]

- (b) Das neutrale Element ist die Permutation, die 'nichts tut', $[123]$. Jedes Element hat ein eindeutiges Inverses, da jede Zeile und Spalte das neutrale Element genau einmal enthält.
- (c) Die Verknüpfungstabelle ist nicht symmetrisch, $P' \circ P \neq P \circ P'$, daher ist S_3 keine Abelsche Gruppe. Es gilt beispielsweise $[312] \circ [213] = [132]$, aber $[213] \circ [312] = [321]$.

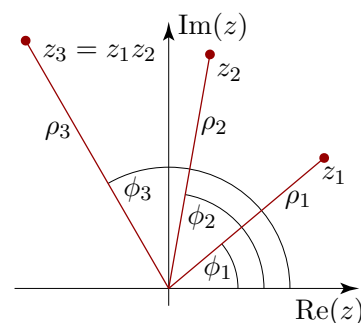
Lösung Beispielaufgabe 4: Algebraische Manipulationen mit komplexen Zahlen [4]

- (a) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = \boxed{2x} = 2\operatorname{Re}(z),$
- (b) $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = \boxed{i2y} = i2\operatorname{Im}(z),$
- (c) $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = \boxed{x^2 + y^2},$
- (d) $\frac{z}{\bar{z}} \stackrel{(c)}{=} \frac{z \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \boxed{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}},$
- (e) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} + z}{z \cdot \bar{z}} \stackrel{(a),(c)}{=} \boxed{\frac{2x}{x^2 + y^2}},$
- (f) $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} - z}{z \cdot \bar{z}} \stackrel{(b),(c)}{=} \boxed{i \frac{-2y}{x^2 + y^2}},$
- (g) $z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) = \boxed{(x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)},$
- (h) $z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3) = \boxed{(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)}.$

Lösung Beispielaufgabe 5: Multiplikation komplexer Zahlen: geometrische Deutung [4]

- (a) Mit $z_j = (\rho_j \cos \phi_j, \rho_j \sin \phi_j)$ und den angegebenen trigonometrischen Identitäten folgt

$$\begin{aligned}
z_3 &= z_1 z_2 = \rho_1 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \rho_2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\
&= \rho_1 \rho_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) \\
&\quad + i (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)] \\
&= \rho_1 \rho_2 [\cos (\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2)] \\
&\equiv \rho_3 [\cos \phi_3 + i \sin \phi_3]
\end{aligned}$$



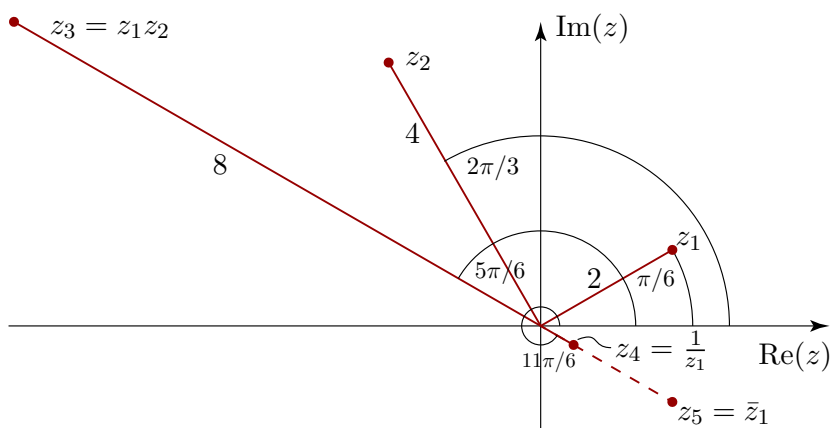
Wir lesen ab: $\rho_3 = \rho_1 \rho_2$, $\phi_3 = (\phi_1 + \phi_2) \bmod (2\pi)$. ✓

- (b) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ wird in der komplexen Ebene durch die Koordinaten $z \mapsto (x, y)$ dargestellt, mit Polarkoordinaten $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\phi = \arg(z) = \arctan(\frac{y}{x})$. Diese Formel für den Winkel ϕ bestimmt ihn nur modulo π ; um $\phi \in [0, 2\pi)$ eindeutig festzulegen, identifizieren wir das Quadrant, das den Punkt (x, y) enthält.

$z_1 = \sqrt{3} + i \mapsto (\sqrt{3}, 1)$	$\rho_1 = \sqrt{3+1} = 2$	$\phi_1 = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$
$z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i \mapsto (-2, 2\sqrt{3})$	$\rho_2 = \sqrt{12+4} = 4$	$\phi_2 = \arctan(\frac{-2\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}$
$z_3 = z_1 z_2 = (\sqrt{3} + i)(-2 + 2\sqrt{3}i)$	$\rho_3 = \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = 8$	$\phi_3 = \arctan(\frac{4}{-4\sqrt{3}}) = \frac{5\pi}{6}$
$\quad = -4\sqrt{3} + 4i \mapsto (-4\sqrt{3}, 4)$		
$z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$	$\rho_4 = \frac{1}{4}\sqrt{3+1} = \frac{1}{2}$	$\phi_4 = \arctan(\frac{-1/4}{\sqrt{3}/4}) = \frac{11\pi}{6}$
$\quad = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$		
$z_5 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - i \mapsto (\sqrt{3}, -1)$	$\rho_5 = \sqrt{3+1} = 2$	$\phi_5 = \arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{11\pi}{6}$

Wie erwartet gilt:

$$\begin{aligned}
\rho_3 &= \rho_1 \rho_2 \\
\phi_3 &= \phi_1 + \phi_2 \\
\rho_4 &= 1/\rho_1 \\
\phi_4 &= -\phi_1 \bmod (2\pi) \\
\rho_5 &= \rho_1 \\
\phi_5 &= -\phi_1 \bmod (2\pi)
\end{aligned}$$



Lösung Beispielaufgabe 6: Ableitungen von trigonometrischen Funktionen [1]

Mit $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, finden wir sofort

(a) $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{1 + \tan^2 x}$, ✓

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\sec^2 x}. \checkmark$$

(b) $\frac{d}{dx} \cot x = \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \boxed{-1 - \cot^2 x}$, ✓

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = \boxed{-\csc^2 x}. \checkmark$$

Lösung Beispielaufgabe 7: Ableitungen: Produktregel und Kettenregel [2]

- (a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}$ (b) $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}(x+1)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{x^{1/2}}{(x+1)^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}(x+1)^{3/2}}$
- (c) $f'(x) = e^x(2x-1)$ (d) $f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\ln 3^x} = \frac{d}{dx} e^{x \ln 3} = e^{x \ln 3} \ln 3 = 3^x \ln 3$
- (e) $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ (f) $f'(x) = \ln(9x^2) + x \frac{1}{9x^2} 18x = \ln(9x^2) + 2$

Lösung Beispielaufgabe 8: Ableitungen von inversen trigonometrischen Funktionen [4]

Die trigonometrischen Funktionen $f = \sin, \cos$ und $\tan$ sind alle periodisch, daher haben deren Umkehrfunktionen, $f^{-1} = \arcsin, \arccos$ und $\arctan$, jeweils unendlich viele Zweige, einen für jedes Intervall der x -Achse, auf welchem eine Bijektion definiert werden kann. Auf jedem Zweig hat die Steigung von f^{-1} stets dasselbe Vorzeichen wie die Steigung von f . Wir betrachten repräsentative Beispiele solcher Zweige, und berechnen jeweils die Ableitung von f^{-1} mittels $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$.

- (a) $\arcsin$ ist die Umkehrfunktion von $\sin$, mit $\sin(\arcsin x) = x$. Wir betrachten zwei Zweige, in denen $\arcsin x$ eine positive bzw. negative Steigung hat.

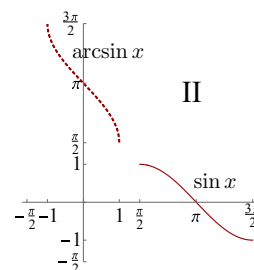
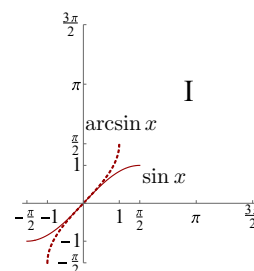
I: Die Funktion $\sin: (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \rightarrow (-1, 1)$ hat eine positive Steigung $\sin' x = \cos x$, und die Umkehrfunktion $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

II: Die Funktion $\sin: (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) \rightarrow (1, -1)$ hat eine negative Steigung $\sin' x = \cos x$, und die Umkehrfunktion $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Mit dem oberen/unteren Vorzeichen für Zweig I/II erhalten wir

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{\sin'(y)|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \boxed{\frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}}}. \end{aligned}$$

Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet die Notation $\arcsin$ üblicherweise Zweig I.

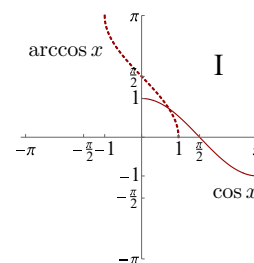


- (b) $\arccos$ ist die Umkehrfunktion von $\cos$, mit $\cos(\arccos x) = x$. Wir betrachten zwei Zweige, in denen $\arccos$ eine negative bzw. positive Steigung hat.

I: Die Funktion $\cos: (0, \pi) \rightarrow (1, -1)$ hat eine negative Steigung $\cos' x = -\sin x$, und die Umkehrfunktion $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (\pi, 0)$.

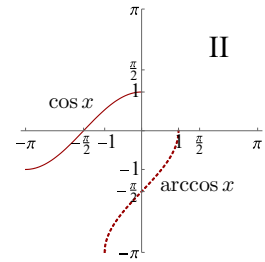
II: Die Funktion $\cos x: (-\pi, 0) \rightarrow (-1, 1)$ hat eine positive Steigung $\cos' x = -\sin x$, und die Umkehrfunktion $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (-\pi, 0)$.

Mit dem oberen/unteren Vorzeichen für Zweig I/II erhalten wir



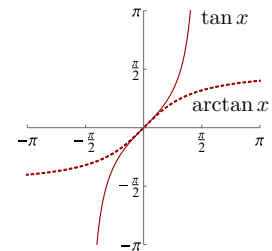
$$\begin{aligned}\arccos' x &= \frac{1}{\cos'(y)|_{y=\arccos x}} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ &= \frac{\mp 1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \boxed{\frac{\mp 1}{\sqrt{1 - x^2}}}.\end{aligned}$$

Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet die Notation $\arccos$ üblicherweise Zweig I.



- (c) $\arctan$ ist die Umkehrfunktion von $\tan$, mit $\tan(\arctan x) = x$. Die Steigung von $\tan$, gegeben durch $\tan' x = \sec^2 x$, ist für jeden Zweig positiv. Wir betrachten nur den um null zentrierten Zweig, $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, mit der Umkehrfunktion $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned}\arctan' x &= \frac{1}{\tan'(y)|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \boxed{\frac{1}{1 + x^2}}.\end{aligned}$$



Lösung Beispielaufgabe 9: Partielle Integration [6]

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad I(z) &= \int_0^z dx \, x^u e^{2x} = \left[x^u \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^z - \int_0^z dx \, \frac{u}{1} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \boxed{\frac{1}{2} z e^{2z} - \frac{1}{4} [e^{2z} - 1]} \\ I'(z) &= \left[\frac{1}{2}(1 + 2z) - \frac{1}{4} 2 \right] e^{2z} \stackrel{!}{=} z e^{2z} \qquad I\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Beachten Sie das Kürzungsmuster: $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$. [Analog bei (c,d).]

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad I(z) &= \int_0^z dx \, x^u e^{2x} = \left[x^u \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^z - \int_0^z dx \, \frac{u}{2x} \frac{1}{2} e^{2x} \\ \text{Das Integral rechts lässt sich durch nochmalige partielle Integration lösen, siehe (a):} \\ I(z) &\stackrel{\text{(a)}}{=} \boxed{\frac{1}{2} z^2 e^{2z} - \frac{1}{2} z e^{2z} + \frac{1}{4} [e^{2z} - 1]} \\ I'(z) &= \left[\frac{1}{2}(2z + 2z^2) - \frac{1}{2}(1 + 2z) + \frac{1}{4} 2 \right] e^{2z} \stackrel{!}{=} z^2 e^{2z} \qquad I\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{e}{8} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Da zweifach partiell integriert wurde, ist das Kürzungsmuster komplizierter als in (a).

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad I(z) &= \int_0^z dx \, (\ln x) \cdot 1 = \left[(\ln x) x \right]_0^z - \int_0^z dx \, \frac{1}{x} x = \boxed{(\ln z)z - z} \\ I'(z) &= \frac{1}{z} z + \ln z - 1 \stackrel{!}{=} \ln z \qquad I(1) \stackrel{!}{=} -1\end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad I(z) = \int_0^z dx \, (\ln x) \cdot \frac{v'}{\sqrt{x}} = \left[(\ln x) 2\sqrt{x} \right]_0^z - \int_0^z dx \, \frac{1}{x} 2\sqrt{x} = \boxed{(\ln z)2\sqrt{z} - 4\sqrt{z}}$$

Zur Auswertung von $[(\ln(x)\sqrt{x})]_{x=0}$ wurde der Satz von L'Hôpital benutzt (siehe Blatt 01, optionale Aufgaben 3,4):

$$\left[(\ln x) \sqrt{x} \right]_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2} x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [-2x^{1/2}] = \boxed{0}.$$

Folglich divergiert $\ln(x)$ so langsam für $x \rightarrow 0$, dass $\sqrt{x}$ diese Divergenz unterdrückt.

$$I'(z) = 2 \left[\frac{1}{z} \sqrt{z} + (\ln z) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} \right] - 4 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} \stackrel{!}{=} (\ln z) \frac{1}{\sqrt{z}} \quad I(1) \stackrel{!}{=} -4$$

$$(e) \quad I(z) = \int_0^z dx \sin^u x \sin^{v'} x = \left[\sin^u x (-\cos x) \right]_0^z - \int_0^z dx \underbrace{\cos x (-\cos x)}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin z \cos z - I(z) + \int_0^z dx 1, \quad \text{und lösen nach } I(z) \text{ auf:}$$

$$I(z) = \boxed{\frac{1}{2}(-\sin z \cos z + z)}$$

$$I'(z) = \frac{1}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1) \stackrel{!}{=} \sin^2 z \quad I(\pi) \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$(f) \quad I(z) = \int_0^z dx \sin^u x \sin^{v'} x = \left[\sin^u x (-\cos x) \right]_0^z - \int_0^z dx \underbrace{(3 \sin^2 x \cos x) (-\cos x)}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin^3 z \cos z - 3 \left[I(z) - \int_0^z dx \sin^2 x \right], \quad \text{lösen nach } I(z) \text{ auf, und nutzen (e):}$$

$$I(z) \stackrel{(e)}{=} \boxed{\frac{1}{4} \left[-\sin^3 z \cos z + \frac{3}{2}(-\sin z \cos z + z) \right]}$$

$$I'(z) = \frac{1}{4} \left[-3 \underbrace{\sin^2 z \cos^2 z}_{1 - \sin^2 z} + \sin^4 z + \frac{3}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1) \right] \stackrel{!}{=} \sin^4 z \quad I(\pi) \stackrel{!}{=} \frac{3\pi}{8}$$

Lösung Beispielaufgabe 10: Integration mittels Substitution [4]

$$(a) \quad I(z) = \int_0^z dx x \cos(x^2 + \pi) \quad [y(x) = x^2, dy = 2x dx]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y(0)}^{y(z)} dy \cos(y + \pi) = \frac{1}{2} \sin(y + \pi) \Big|_0^{z^2} = \boxed{\frac{1}{2} \sin(z^2 + \pi)}$$

$$I'(z) = \frac{1}{2} \cos(z^2 + \pi) \frac{d}{dz} z^2 \stackrel{!}{=} \cos(z^2 + \pi) z \quad I(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}$$

$$(b) \quad I(z) = \int_0^z dx \sin^3 x \cos x \quad [y(x) = \sin x, dy = \cos x dx]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} dy y^3 = \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^{\sin z} = \boxed{\frac{1}{4} \sin^4 z}$$

$$I'(z) = \sin^3 z \frac{d}{dz} \sin z \stackrel{!}{=} \sin^3 z \cos z \quad I\left(\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{16}$$

$$(c) \quad I(z) = \int_0^z dx \sin^3 x = \int_0^z dx \sin x [1 - \cos^2 x] \quad [y(x) = \cos x, dy = -\sin x dx]$$

$$= - \int_{y(0)}^{y(z)} dy (1 - y^2) = - \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_1^{\cos z} = \boxed{-\cos z + \frac{1}{3} \cos^3 z + \frac{2}{3}}$$

$$I'(z) = \sin z + \cos^2 z (-\sin z) = \sin z (1 - \cos^2 z) \stackrel{\checkmark}{=} \sin^3 z \quad I\left(\frac{\pi}{3}\right) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{5}{24}$$

(d) $I(z) = \int_0^z dx \cosh^3 x = \int_0^z dx \cosh x [1 + \sinh^2 x] \quad [y(x) = \sinh x, \, dy = \cosh x dx]$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} dy (1 + y^2) = \left(y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{\sinh z} = \boxed{\sinh z + \frac{1}{3} \sinh^3 z}$$

$$I'(z) = \cosh z + \sinh^2 z \cosh z = \cosh z (1 + \sinh^2 z) \stackrel{\checkmark}{=} \cosh^3 z \quad I(\ln 2) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{57}{64}$$

(e) $I(z) = \int_0^z dx \sqrt{1 + \ln(x+1)} \frac{1}{x+1} \quad [y(x) = \ln(x+1), \, dy = \frac{1}{1+x} dx]$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} dy \sqrt{1+y} = \frac{2}{3} (1+y)^{3/2} \Big|_0^{\ln(z+1)} = \boxed{\frac{2}{3} \left[(1 + \ln(z+1))^{3/2} - 1 \right]}$$

$$I'(z) = (1 + \ln(z+1))^{1/2} \frac{d}{dz} \ln(z+1) \stackrel{\checkmark}{=} \sqrt{1 + \ln(z+1)} \frac{1}{z+1} \quad I(e^3 - 1) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{14}{3}$$

(f) $I(z) = \int_0^z dx x^3 e^{-x^4} \quad [y(x) = x^4, \, dy = 4x^3 dx]$

$$= \frac{1}{4} \int_{y(0)}^{y(z)} dy e^{-y} = -\frac{1}{4} e^{-y} \Big|_0^{z^4} = \boxed{\frac{1}{4} [1 - e^{-z^4}]}$$

$$I'(z) = \frac{1}{4} e^{-z^4} \frac{d}{dz} z^4 \stackrel{\checkmark}{=} e^{-z^4} z^3 \quad I(\sqrt[4]{\ln 2}) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{8}$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 34]
