

## C9: Komplexe Analysis (KA)

Saff & Snyder, Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall, 1976.

C9.1a



Cauchy

Motivation: Differenzieren und Integrieren in der komplexen Ebene

Vorschau: Eine komplexe Funktion  $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sei nur von der Kombination

$$z = x + iy \text{ abhängig, } (x, y) \mapsto f(z) = f(x + iy) \equiv \underbrace{u(x, y)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{v(x, y)}_{\text{Imaginärteil}} \quad (1)$$

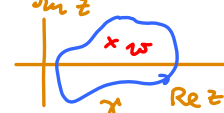
und 'komplex differenzierbar' ( $\frac{df}{dz}$  existiert) in  $\mathcal{U}$ . Dann gelten (u.a.):

- Cauchy-Riemann-Gleichungen:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$

- Geschlossene Linienintegrale in  $\mathbb{C}$  liefern 0:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad (3)$$


- Integralsatz von Cauchy:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - w} \quad (4)$$


- 'Residuen-Satz': Sei

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - w)^n \quad (5) \quad (\text{verallgemeinerte Taylor-Reihe, mit Divergenz bei } w)$$

dann:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz g(z) = a_{-1} \quad (6)$

Wichtige Anwendung der KA in der Physik: als Hilfsmittel beim Berechnen von Integralen. Besonders wichtig für 'konforme Feldtheorie' & Stringtheorie

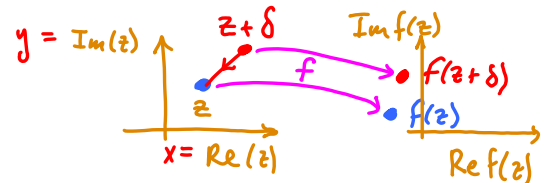
## C9.1 Komplexe Differenzierbarkeit

C9.1b

Definition: Eine komplexwertige Funktion  $f(z)$  einer komplexen Variable  $z \equiv x + iy$ ,

$$f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad [ \mathcal{U} \text{ offen} ] \quad (1)$$

$z \mapsto f(z)$  (wichtig!)



heißt 'komplex differenzierbar' an der Stelle  $z \in \mathcal{U}$

falls folgender Limes existiert:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta) - f(z)}{\delta} \equiv f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} \quad (2)$$

(beachte Notation: totale Ableitung nach  $z$ )

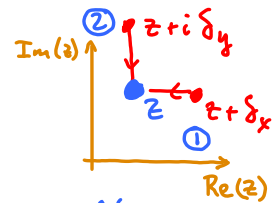
Anmerkung: Der Limes (2) muss unabhängig von der Richtung sein,

entlang der  $\delta$  nach Null strebt. Das ist gewährleistet, wenn

$f$  von  $x$  und  $y$  nur in der Kombination  $z = x + iy$  abhängt.

①:  $\delta = \delta_x$  :  $\lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta_x) - f(z)}{\delta_x} = \frac{\partial f(z(x + iy))}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (3)$

②:  $\delta = i \delta_y$  :  $\lim_{i \delta_y \rightarrow 0} \frac{f(z + i \delta_y) - f(z)}{i \delta_y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(z(x + iy))}{\partial y} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{i} f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \quad (4)$



Definition: Jeder Punkt  $z$  bei dem  $f'(z)$  nicht existiert, ist eine 'Singularität' von  $f(z)$

Definition:  $f$  heisst 'analytisch' auf  $U$ , falls  $f$  in ganz  $U$  komplex differenzierbar ist. C9.1c  
(1)

Anmerkung zur Nomenklatur: Manche Autoren nennen eine Funktion 'holomorph' in  $U$  falls sie (1) erfüllt, und 'analytisch' in  $U$  falls ihre Taylor-Entwicklung überall in  $U$  konvergiert. Man kann zeigen, dass eine komplexe Funktion genau dann holomorph ist, wenn sie analytisch ist. Deswegen verzichten wir hier auf eine Unterscheidung.

Beispiele für analytische Funktionen:

•  $z^n, e^z, \sin z, \cos z$  sind analytisch auf  $U = \mathbb{C}$  (2)

•  $\frac{1}{z - z_0}$  ist analytisch auf  $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  [das ganze  $\mathbb{C}$ , ausser  $z_0$ ] (3)

Beispiele für nicht-analytische Funktionen:

•  $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$  hängt nicht nur von  $x+iy$  ab, sondern auch von  $x-iy$  (4)

•  $\bar{z} = x-iy$  ist nicht eine analytische Funktion von  $z = x+iy$  (5)

denn Limes ist nicht eindeutig:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\overline{z+\delta} - \bar{z})}{\delta} = \frac{\bar{\delta}}{\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta = \delta_x = \bar{\delta} \\ -1 & \text{falls } \delta = i\delta_y = -\bar{\delta} \end{cases}$  (6)

Ableitungsregeln für analytische Funktionen (wie im Reellen):

C9.1d

(i) Linearität:  $\frac{d}{dz} [\lambda f(z) + \mu g(z)] = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$  (1)

(ii) Produktregel:  $\frac{d}{dz} [f(z) g(z)] = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$  (2)

Folgerung:  $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$  [Abl. v. Polynomen wie im Reellen] (3)

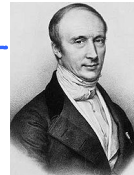
(iii) Quotientenregel:  $\frac{d}{dz} \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)}$  falls  $g(z) \neq 0$  (4)

(iii) Kettenregel:  $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z)) g'(z)$  (5)

Komplexe Differenzierbarkeit ist viel stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit. Wir diskutieren nur einige ihrer weitreichenden Folgen für analytische Funktionen.

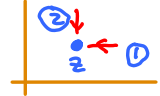
# Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

C9.1e



Cauchy

Riemann



Schreibe  $z \equiv x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) (1)

$f(z) = f(x + iy) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ) (2)

Also:  $u \equiv \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v \equiv \operatorname{Im} f(z)$  (3)

$f(z)$  sei komplex differenzierbar, dann gilt:  $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \stackrel{(b.3)}{=} \partial_x f(z) \stackrel{(b.4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z)$  (4)

Aber aus (2) folgt:  $f'(z) \stackrel{(4)}{=} \partial_x f(z) \stackrel{(2)}{=} \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)$  (5)

und auch:  $f'(z) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{i} \partial_y u(x, y) + i \frac{1}{i} \partial_y v(x, y)$  (6)

Laut (4) ist (5) = (6):  $\partial_x u + i \partial_x v \stackrel{(5)}{=} f'(z) \stackrel{(6)}{=} -i \partial_y u + \partial_y v$  (7)

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad (8)$$

$$\partial_x v = -\partial_y u \quad (9)$$

Folgerung: komplexe Differenzierbarkeit  $\Rightarrow$  Cauchy-Riemann-Gleichungen (CRG)

Beispiel:

C9.1e1

$f(z) = (1 + iz)^2 = 1 + 2iz - z^2$  (1)

$= 1 + 2i(x + iy) - (x + iy)^2$  (2)

$= \underbrace{1 + 2(-y) - (x^2 - y^2)}_{u(x, y)} + i \underbrace{(2x - 2xy)}_{v(x, y)}$  (3)

$= u(x, y) + i v(x, y)$  (4)

$u(x, y) = 1 - 2y - x^2 + y^2$ ,  $v(x, y) = 2x - 2xy$  (5)

Gelten CRG?

$\partial_x u = -2x$ ,  $\partial_x v = 2 - 2y = -\partial_y u$  ✓ [also gilt (e.9)] (6)

$\partial_y u = -2 + 2y$ ,  $\partial_y v = -2x = \partial_x u$  ✓ [also gilt (e.8)] (7)

Umkehrschluss gilt auch: Cauchy-Riemann-Gl.  $\Rightarrow$  komplexe Differenzierbarkeit: C9.1f

Satz: Sei  $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Abbildung, mit  $f = u + iv$  d.h. (1)

$$u(x,y) \equiv \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) \equiv \operatorname{Im} f(x+iy) \quad (2)$$

Falls  $u, v$  stetig differenzierbar sind für  $z \in \mathcal{U}$  und die Cauchy-Riemann-Gl. erfüllen, ist  $f$  komplex differenzierbar an der Stelle  $z$ .

Begründung: (Optional) Schreibe  $\delta = \delta_x + i\delta_y$ , mit  $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{R}$  (3)

Taylor für  $u$ : 
$$u(x + \delta_x, y + \delta_y) \stackrel{(C5.5b.1)}{=} u(x,y) + \delta_x \partial_x u(x,y) + \delta_y \partial_y u(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (4)$$

Taylor für  $v$ : 
$$v(x + \delta_x, y + \delta_y) \stackrel{(C5.5b.1)}{=} v(x,y) + \delta_x \partial_x v(x,y) + \delta_y \partial_y v(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (4+5) \\ -(4+5) \Big|_{\delta=0} : \quad f(z+\delta) - f(z) &= \delta_x \partial_x u + i \delta_x \partial_x v + \delta_y \partial_y u + \delta_y i \partial_y v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Nutze CRG, um  $\partial_y$  durch  $\partial_x$  zu ersetzen: C9.1g

$$(f.6): \quad f(z+\delta) - f(z) = \delta_x \overset{(1)}{\partial_x} u + i \delta_x \overset{(2)}{\partial_x} v + \delta_y \overset{(3)}{\partial_y} u + \delta_y i \overset{(4)}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (1)$$

CRG: (e.9)  $\overset{(3)}{\partial_y} u = -\overset{(3)}{\partial_x} v$  (e.8)  $\overset{(4)}{\partial_y} v = \overset{(4)}{\partial_x} u$

$$= (\overset{(1)}{\delta_x} + i \overset{(4)}{\delta_y}) \overset{(1)}{\partial_x} u + (\overset{(2)}{\delta_x} + i \overset{(3)}{\delta_y}) i \overset{(2)}{\partial_x} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (2)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(z+\delta) - f(z)] = \partial_x (u + iv) = \boxed{\partial_x f(z)} \stackrel{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \quad (3)$$

Es geht auch anders herum: nutze CRG, um  $\partial_x$  durch  $\partial_y$  zu ersetzen:

$$(f.6): \quad f(z+\delta) - f(z) = \delta_x \overset{(1)}{\partial_x} u + i \delta_x \overset{(2)}{\partial_x} v + \delta_y \overset{(3)}{\partial_y} u + \delta_y i \overset{(4)}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (4)$$

CRG: (e.8)  $\overset{(1)}{\partial_x} u = \overset{(1)}{\partial_y} v$  (e.9)  $\overset{(2)}{\partial_x} v = -\overset{(2)}{\partial_y} u$

$$= -i (\overset{(2)}{\delta_x} + i \overset{(3)}{\delta_y}) \overset{(2)}{\partial_y} u + -i (\overset{(1)}{\delta_x} + i \overset{(4)}{\delta_y}) i \overset{(4)}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (5)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(z+\delta) - f(z)] = \frac{1}{i} \partial_y (u + iv) = \boxed{\frac{1}{i} \partial_y f(z)} \stackrel{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \quad (6)$$

Fazit:  $f$  ist komplex differenzierbar in  $z$  !! □

Anmerkung:  $(x, y) \mapsto u(x, y) \equiv \operatorname{Re} f(x+iy)$   
 $(x, y) \mapsto v(x, y) \equiv \operatorname{Im} f(x+iy)$  } sind beide Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  | C9.1h (1)

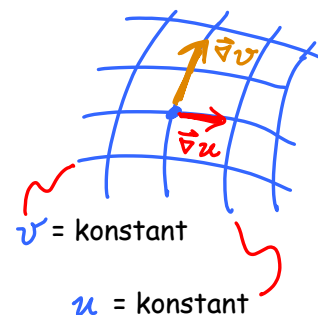
Folgerung aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen:

Die Höhenlinien dieser Abbildungen (1) sind orthogonal zu einander: (2)

Begründung:

Höhenlinien von  $u$  sind  $\perp \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$  (3)  
 $(u(x, y) = \text{konstant})$ :

Höhenlinien von  $v$  sind  $\perp \vec{\nabla} v = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$  (4)  
 $(v(x, y) = \text{konstant})$ :



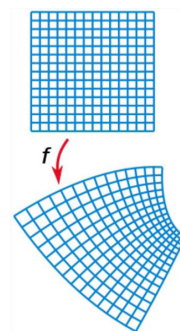
$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = (\partial_x u)(\partial_x v) + (\partial_y u)(\partial_y v) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v \quad (5)$$

CRG: (e.g.)  $-\partial_y u$  (e.g.)  $\partial_x v$

Weitere Folgerung: eine analytische Funktion  $f$  definiert [via (1)]

eine 'konforme' ('winkeltreue') Abbildung zwischen den

Koordinatensystemen  $(x, y)$  und  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  (6)



## C9.2 Integration im Komplexen

| C9.2a

Hauptsatz der Analysis für komplexe Funktionen einer reellen Variable:

Sei  $f(t) : (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige, stetige Funktion einer reellen Variable  $t$ , mit Stammfunktion  $F(t)$ , d.h.  $F'(t) = f(t) \quad \forall t \in (t_0, t_1)$ , dann

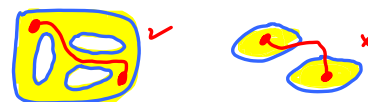
$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = F(t_1) - F(t_0) \quad [\text{genau wie im Reellen}] \quad (1)$$

Triviales Beispiel:  $\int_{t_0}^{t_1} [\sin t + i \cos t] dt = [-\cos t + i \sin t]_{t_0}^{t_1} \quad (2)$

Integration einer Funktion  $f(z)$  einer komplexen Variablen,  $z = x + iy$ , entspricht einem Linienintegral in der komplexen Ebene. Dafür benötigen wir folgende Begriffe:

Definition: Eine Menge  $G \subset \mathbb{C}$  (oder auch  $G \subset \mathbb{R}^n$ ) heißt 'Gebiet' falls (3)

$G \neq \emptyset$  (nicht leer) und 'zusammenhängend' ist (d.h. je zwei Punkte können durch eine stetige Kurve verbunden werden, welche das Gebiet nicht verläßt).



Definition: ein Gebiet ist 'einfach zusammenhängend', falls sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen läßt.



## Definition: Komplexes Wegintegral (oder 'Kontur-Integral')

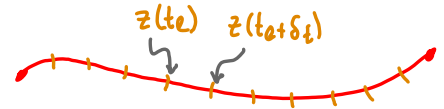
Sei  $\gamma$  eine glatte, gerichtete Kurve in einem zusammenhängenden Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , parametrisiert durch die reelle Variable  $t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ .

$$\gamma: (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow G \subset \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \quad (1)$$

Ferner sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$  eine stetige Funktion auf dem Gebiet  $G$ .

Das 'komplexe Wegintegral' ('Konturintegral') von  $f(z)$  entlang  $\gamma$  ist wie folgt definiert:

$$\int_{\gamma} dz f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) \quad (2)$$



Interpretation als

$$\text{Riemann-Summe: } = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{dz(t_k)}{dt} f(z(t_k)) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\ell} \underbrace{(z(t_{k+1}) - z(t_k))}_{\text{green}} f(z(t_k)) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Analog zu Linienintegral eines 2d-Vektorfeldes, } u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} \mapsto \vec{u}(\vec{r}) \quad (4) \\ \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \stackrel{(V1m.6)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{u}(\vec{r}(t)) \stackrel{(V1m.2)}{=} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\ell} (\vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k)) \cdot \vec{u}(\vec{r}(t_k)) \quad (5) \end{array} \right.$$

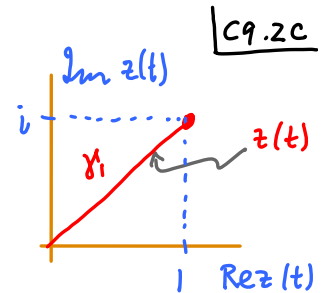
Kann gezeigt werden: Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung (d.h. eine andere Parametrisierung des selben Weges liefert dasselbe Ergebnis).

### Einfaches Beispiel 1

$$f(z) = z, \quad \gamma_1 = \{z(t) = (1+i)t, \quad t \in (0,1)\} \quad (1)$$

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{(1): 1+i} \overbrace{f(z(t))}^{f(z(t))=z(t)} \quad (2)$$

$$= (1+i)^2 \int_0^1 dt t = \frac{1}{2} (1+i)^2 = \frac{1}{2} (1+2i-1) = i \quad (3)$$

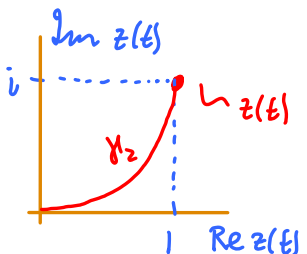


### Einfaches Beispiel 2

$$f(z) = z, \quad \gamma_2 = \{z(t) = t + it^2, \quad t \in (0,1)\} \quad (4)$$

$$\int_{\gamma_2} dz z \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{(5): (1+2it)} \overbrace{f(z(t))}^{f(z(t))=z(t)} \quad (5)$$

$$= \int_0^1 dt [t + (2i+i)t^2 - zt^3] = \frac{1}{2} + 3i \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} = i \stackrel{!!}{=} \quad (3)$$



Schnellster Rechenweg, mittels Gl. (C9.2e.5):

$$\int_{\gamma} dz z = \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{z(0)}^{z(1)} = \frac{1}{2} (1+i)^2 - 0 = (3) \checkmark$$

kein Zufall, siehe Seite C9.2e!

Wichtiges Beispiel: Kreisintegral v.  $z^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) um den Ursprung herum

C9.2d

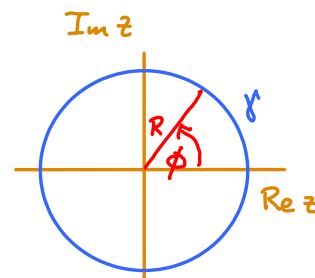
$\gamma$  sei Kreis in  $\mathbb{C}$ , mit Radius  $R$ , Mittelpunkt bei  $z = 0$ :

$$\gamma: \{ z(\phi) = R e^{i\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi) \}$$

(1)

Substitution:  $\gamma: z(\phi) = R e^{i\phi}$

(2)



$$I_n \equiv \oint_{\gamma} dz z^n \stackrel{(b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} (z(\phi))^n$$

(3)

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{i R e^{i\phi}}_{(2)} (R e^{i\phi})^n$$

(4)

$$= i R^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(1+n)} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ \frac{i R^{n+1}}{i(n+1)} \left[ e^{i(n+1)\phi} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases}$$

(5a)

(5b)

$$= 2\pi i \delta_{n,-1}$$

(6)

Wegunabhängigkeit

C9.2e

Satz:  $f(z) : G \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und dessen Stammfunktion  $F(z)$  existiere überall in  $G$ , d.h.  $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$ .

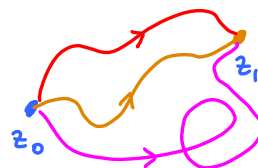
(1)

Dann gilt für jede glatte Kontur  $\gamma \subset G$ , mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ :

$$\int_{\gamma} dz f(z) = F(z_1) - F(z_0)$$

(2)

$\Rightarrow$  Ergebnis hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten ab, nicht vom Weg dazwischen! [Beispiel: (C9.2c.4) = (C9.2c.8)]



Begründung: Parametrisiere Weg mit

$$\gamma: \{ (t_0, t_1) \rightarrow z(t) \subset G, \quad \begin{matrix} z(t_0) = z_0 \\ z(t_1) = z_1 \end{matrix} \}$$

(3)

$$\text{Dann } \int_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(b.2)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz}{dt} F'(z(t)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} [F(z(t))]$$

(4)

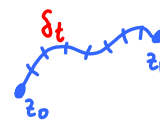
$$\stackrel{(a.1)}{=} F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \stackrel{(3)}{=} F(z_1) - F(z_0) \quad \square$$

(5)

(4) ermöglicht Interpretation für Wegintegral als Summe:

$$\int_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(4)}{=} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \delta z_{\ell} \frac{dF}{dz}(z_{\ell}) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \delta F_{\ell}$$

(6)



Definition: Eine 'zusammengesetzte Kontur'

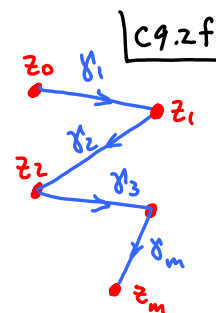
$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$$

bestehe aus glatten, gerichteten Teilstücken

$\gamma_i$ . Das Wegintegral

einer auf  $\Gamma$  stetigen Funktion  $f(z)$  ist definiert durch:

$$\int_{\Gamma} dz f(z) \equiv \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{\gamma_2} dz f(z) + \dots + \int_{\gamma_m} dz f(z) \quad (1)$$



Satz (e.2) gilt für jedes Teilstück, also auch für zusammengesetzte Kontur:

$$\int_{\gamma} dz f(z) = [F(z_1) - F(z_0)] + [F(z_2) - F(z_1)] + [F(z_3) - F(z_2)] + \dots + [F(z_m) - F(z_{m-1})] = F(z_m) - F(z_0) \quad (2)$$

Korollar [mit denselben Voraussetzungen wie (e.2)]:

Für einen geschlossenen Weg ist Anfangspunkt = Endpunkt:

$$\Rightarrow z_0 = z_m$$

$$\oint dz f(z) \stackrel{(2e.2)}{=} 0 \quad (3)$$

Beispiel: (2d.5b):  $f(z) = z^n = \begin{cases} z^n \neq -1 \\ \frac{1}{z} \end{cases}, \quad F(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \\ \ln(z) \end{cases}, \quad n \neq -1$

Für  $n = -1$ , (2d.5a), sind Voraussetzungen v. (e.2) nicht erfüllt, da die Stammfunktion von  $1/z$  nämlich  $\ln(z)$ , nicht überall auf einem geschlossenem Weg um 0 herum existiert.

Falls  $f(z)$  analytisch ist, läßt sich (3) zeigen auch ohne Verweis auf die  $F(z)$ , und zwar mittels Satz. von Cauchy:

Satz v. Cauchy

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,

(C9.1e.2)

$f: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) \equiv u(x,y) + i v(x,y) \quad (1)$  eine analytische Funktion auf  $G$

$\gamma: (0,1) \rightarrow G, \quad t \mapsto z(t) \equiv x(t) + i y(t) \quad (2)$  eine stetige, geschlossene Kurve in  $G$ .



Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad (3)$$

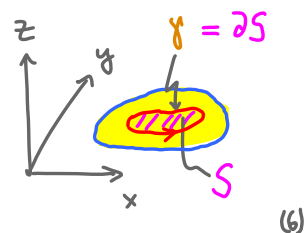
Begründung:

$$I \equiv \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \frac{d z(t)}{dt} \cdot f(z(t)) \quad (4)$$

$$= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} (x(t) + i y(t)) \cdot \underbrace{(u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)))}_{\equiv u(\tilde{r}(t)) + i v(\tilde{r}(t))} \quad (5)$$

Interpretiere (5) als reelles Wegintegral in der x-y-Ebene,

entlang dem Weg  $\gamma: \tilde{r}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \tilde{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$



Realteil v. (5):

$$\operatorname{Re}(I) = \int_0^1 dt \left[ \dot{x}(t) u(\tilde{r}(t)) - \dot{y}(t) v(\tilde{r}(t)) \right] \quad (7a)$$

Imaginärteil v. (5):

$$\operatorname{Im}(I) = \int_0^1 dt \left[ \dot{x}(t) v(\tilde{r}(t)) + \dot{y}(t) u(\tilde{r}(t)) \right] \quad (7b)$$



$$\begin{aligned}
 \text{(C9.2g.7a)} \quad \text{Re}(I) &= \int_0^1 dt \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(u, -v, 0)^T}_{\equiv \vec{P}(\vec{r}(t))} \quad (1a) \\
 \text{(V1m.6)} \quad &= \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{P}, \quad \vec{P} \equiv \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ -v(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2a)
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \text{(C9.2g.7b)} \quad \text{Im}(I) &= \int_0^1 dt \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(v, u, 0)^T}_{\equiv \vec{Q}(\vec{r}(t))} \quad (1b) \\
 \text{(V1m.6)} \quad &= \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{Q}, \quad \vec{Q} \equiv \begin{pmatrix} v(\vec{r}) \\ u(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2b)
 \end{aligned}
 \quad \text{[C9.2h]}$$

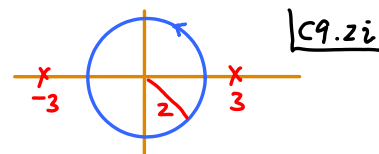
Schreibe diese Wegintegrale mittels Stokes als Flussintegrale, über die von  $\gamma$  eingeschlossene Fläche (nenne sie  $S$ ) in der x-y-Ebene, mit  $\delta \vec{S} = \vec{e}_z \delta x \delta y$

$$\begin{aligned}
 \text{(V3.6f.4)} \quad \text{Re}(I) &= \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{v} \times \vec{P}(\vec{r})) \quad (3a) \\
 \text{(1)} \quad &= \int_S dx dy \underbrace{(\vec{v} \times \vec{P}(\vec{r}))_z}_{\partial_x P_y - \partial_y P_x} \quad (4a) \\
 &= \int_S dx dy (\underbrace{\partial_x (-v)}_{\partial_y u} - \partial_y u) \quad (5a) \\
 \text{CRG (C9.1e.9)} \quad &= 0 \quad (6a)
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \text{(V3.6f.4)} \quad \text{Im}(I) &= \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{v} \times \vec{Q}(\vec{r})) \quad (3b) \\
 \text{(1)} \quad &= \int_S dx dy \underbrace{(\vec{v} \times \vec{Q}(\vec{r}))_z}_{\partial_x Q_y - \partial_y Q_x} \quad (4b) \\
 &= \int_S dx dy (\underbrace{\partial_x u}_{\partial_y v} - \partial_y v) \quad (5b) \\
 \text{CRG (C9.1e.8)} \quad &= 0 \quad (6b)
 \end{aligned}$$

Wir durften Cauchy-Riemann-Gleichungen (C9.1e.8-9) nutzen, da  $f(z)$  auf  $S$  analytisch ist!  $\square$

Beispiel

$$\oint_{\gamma: |z|=2} dz \frac{e^z}{z^2 - 9} = 0 \quad (1)$$



denn der Integrand ist überall analytisch ausser bei  $z = \pm 3$ , d.h.

überall analytisch in einem Gebiet, das  $\gamma$  enthält, also gilt der Satz v. Cauchy, (2g.3).

Faustregel: geschlossenes Wegintegral verschwindet, falls  $f(z)$  analytisch ist 'innerhalb des Wegs' (= 'im vom Weg eingeschlossenen Gebiet')!

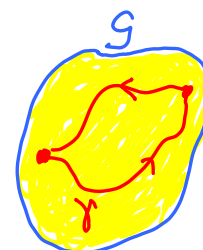
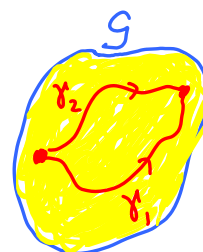
Korollar aus Satz v. Cauchy (mit denselben Voraussetzungen): Verschiedene Wegintegrale mit demselben Start- und Endpunkt sind gleich:

$$\boxed{\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z)} \quad (2)$$

Begründung

$$\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2) \quad (2) \quad \text{bildet geschlossenen Weg,}$$

$$\text{also: } \int_{\gamma_1} dz f(z) - \int_{\gamma_2} dz f(z) = \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2g.3)}{=} 0 \quad (4) \quad \square$$



# Zusammenfassung: C9.1-2 Analytische Funktionen I

1 ZC 9.1-2

Def: Komplexe Funktion

$$f(z) = \begin{cases} U \subset \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \end{cases}$$

ist analytisch in  $U$ , falls  $f'(z)$  überall in  $U$  existiert.

Cauchy-Riemann-

Differentialgleichungen (CRG):

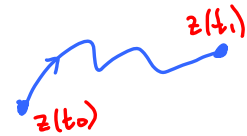
$$\partial_x u = \partial_y v \quad (2) \quad \partial_x v = -\partial_y u$$

Def: Komplexes

Wegintegral:

$$\int_{\gamma} dz f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$$

Weg-Parametrisierung:  $z = z(t)$

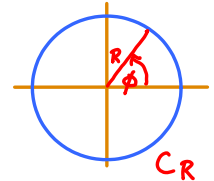


Wichtiges

Beispiel:

$n \in \mathbb{Z}$

$$I_n \equiv \oint_{C_R} dz z^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases} = 2\pi i \delta_{n,-1}$$



Satz v. Cauchy: falls  $f(z)$  analytisch ist auf einfach zusammenhängendem Gebiet, gilt:

Geschlossener Weg liefert 0:

Wegunabhängigkeit:

$$\oint_{\gamma} f(z) = 0$$



$\iff$

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z)$$

$$= F(z_1) - F(z_0), \text{ mit } F'(z) = f(z)$$

