

L5.4 Inverse einer Matrix

L5.4a

Ausgangsfrage: Wie löst man ein lineares Gleichungssystem (LGS)?

Betrachte n lineare Gleichungen für n Unbekannte:

$$\begin{aligned} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n &= b^1 \\ A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \dots + A^2_n x^n &= b^2 \\ \vdots &\vdots \\ A^n_1 x^1 + A^n_2 x^2 + \dots + A^n_n x^n &= b^n \end{aligned} \quad (1)$$

$A^i_j x^j = b^i$
 $i, j = 1, \dots, n$

Ziel: durch geeignete Umformungen

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

bringe man das LGS in 'Diagonalform'

(1 auf der 'Diagonalen', 0 überall sonst):

(2)

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n &= d^1 \\ 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n &= d^2 \\ \vdots &\vdots \\ 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 1 \cdot x^n &= d^n \end{aligned}$$

Dann folgt sofort:

$$x^i = d^i$$

Nützliches Hilfsmittel (um Schreiberei zu reduzieren): 'Erweiterte Matrix':

L5.4b

$$\begin{array}{c} \text{Start:} \\ \begin{array}{cccc|c} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n & b^1 \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n & b^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n & b^n \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{'Gauß-Verfahren'}} \begin{array}{c} \text{Ziel:} \\ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & d^1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^n \end{array} \end{array} \quad (1)$$

Beispiel: finde Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} x^1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} x^3 &= 1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 2 \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Zeile:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l} [1]: \\ [2]: \\ [3]: \end{array} \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \quad (3) \Rightarrow$$

Ratschlag: Falls Brüche auftauchen, Zeile mit Hauptnenner durchmultiplizieren!

$$\begin{array}{l} 3[1]: \\ [2] - 3[1]: \\ [3] - 6[1]: \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 [1] - [2]: & \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad | \quad 4 \\
 [2] + 2[3]: & \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad | \quad -11 \quad (1) \Rightarrow \\
 [2] - [3]: & \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [1] + \frac{1}{3}[3]: & \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \frac{16}{3} \quad \text{LS.4c} \\
 \frac{1}{3}[2]: & \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad -\frac{11}{3} \quad (2) \\
 \frac{1}{3}[3]: & \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Lösung: $x^1 = \frac{16}{3}, \quad x^2 = -\frac{11}{3}, \quad x^3 = \frac{4}{3}$ (3)

Check durch einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 &= \frac{16}{9} + -\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad \checkmark \quad \text{konsistent mit z1} \\
 x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= \frac{16}{3} - 2 \cdot \frac{11}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \checkmark \quad (4) \\
 2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 2 \cdot \frac{16}{3} - 3 \cdot \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Falls das Gauß-Verfahren eine Zeile der Form liefert, hat das LGS keine Lösung.

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad d \neq 0$$

Falls das Gauß-Verfahren eine 'Nullzeile' der Form

liefert, kann eine der Variablen x^i frei gewählt werden. Setze diese Variable gleich einem Parameter, z.B. $x^i = t$. Lösung ist dann eine 'Parameterschar'.

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0$$

(Falls m Nullzeilen vorkommen, sind m der Variablen frei wählbar, $\Rightarrow$ m unabhängige Parameter.)

Betrachte nun analoges Gleichungssystem, aber mit anderem Vektor rechts, $\vec{b}'$

LS.4d

Um es zu lösen, müssten wir Gauß-Verfahren wiederholen. Umständlich!

Es geht aber auch kompakter, mittels Matrix-Notation:

Kompakte Notation für (a.1): $A^i_j x^j = b^i$ (1)

Schreibe $A = \{A^i_j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, (quadratisch) $\vec{x} = \{x^j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, 1)$ (2)

Matrix-Notation (1): $A \cdot \vec{x} \stackrel{(1)}{=} \vec{b}$ $(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})$ (3)

Angenommen, es gibt eine 'inverse Matrix' zu A, mit:

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

dann:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \stackrel{(3)}{=} A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}) \quad (5)$$

(4): $\mathbb{1}$

Gesuchte Lösung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ (funktioniert für alle $\vec{b}$!)

$$(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}) \quad (6)$$

Eine quadratische Matrix $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ heisst 'invertierbar',

L5.4e

falls eine 'inverse Matrix' $A^{-1} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ existiert, mit

$$\boxed{A^{-1} A = \mathbb{1}} \quad (1)$$

(1)

und

$$\boxed{A A^{-1} = \mathbb{1}} \quad (2)$$

(2)

wobei

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

= Einheitsmatrix.

(3)

(1) impliziert (2):

$$A = A \cdot \mathbb{1} \stackrel{(1)}{=} A \cdot (A^{-1} \cdot A) \stackrel{\text{Assoziativit\u00e4t}}{=} (A \cdot A^{-1}) \cdot A \quad (4)$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow (2) \quad (5)$$

[Analog: (2) impliziert (1).]

Wie findet man Inverse? Seite L5.4h. Kriterien f\u00fcr Invertierbarkeit: sp\u00e4ter...

Beispiel: 2x2-Rotationsmatrix

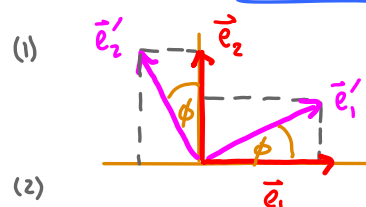
L5.4f

Rotation: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(\phi)} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(\phi)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$

Rotationsmatrix:

[laut (L5.2d.5) sind Spalten v. R die Abbilder v. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$]

$$\boxed{R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}} \quad (2)$$



Inverse v. R =

Rotation um $-\phi$:

$$R^{-1}(\phi) = R(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Check:

$$\begin{aligned} \cos &\equiv c \\ \sin &\equiv s \end{aligned}$$

$$R^{-1}(\phi) R(\phi) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & -cs + sc \\ -sc + cs & (-s)^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Übrigens:

$$\begin{aligned} \cos \phi_1 &= c_1 \\ \sin \phi_1 &= s_1 \\ \cos \phi_2 &= c_2 \\ \sin \phi_2 &= s_2 \end{aligned}$$

$$R(\phi_1) R(\phi_2) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix} \quad (6)$$

1 L5.49

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

Inverse existiert
nur falls $ad - bc \neq 0$ (3)

check:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$
$$1) \quad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} \quad (5)$$

Check: $(\lambda^{-1} A^{-1}) \cdot (\lambda A) \stackrel{(2.4)}{=} \lambda^{-1} \lambda (A^{-1} \cdot A) = 1 \cdot \mathbb{I} \quad (6)$

$$2) \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (7)$$

Check: $(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{1} \cdot B = B^{-1} \cdot B = 1 \quad \square \quad (8)$

Warnung: $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ [wie auch in $\mathbb{R}$: $(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$] (7)

Bestimmung der Inversen: Rückführung auf Lösung v. n linearen Gleichungssystemen | 25.4h

Sei $A = \{A_{ij}^i\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ (1)

und

$$\vec{c}' = (c'_1, \dots, c'_n) = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) \quad (2)$$

n Spaltenvektoren,
mit Komponenten:

$$(\vec{c}_b)^j \equiv c_{bk}^j \quad (3)$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} \stackrel{(2.4)}{=} I \quad (4)$$

$$A_{ij} C_{jk}^{(n.1)} = \delta_{ik} \quad (5)$$

$$A \cdot \vec{c}_k = \vec{e}_k \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_j & \dots & A^n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^1_k \\ \vdots \\ C^j_k \\ \vdots \\ C^n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_k \quad (7)$$
 [spielt die Rolle von b in (d.3)]

Für jeden Wert von $k = 1, \dots, n$ liefert (6) ein anderes LGS (wegen anderem $\vec{e}_k$),
zu lösen für den Spaltenvektor $\vec{c}_k$. [(h.6) hat dieselbe Form wie (d.3)] (8)

Die aus diesen Spaltenvektoren gebildete Matrix (2) ist dann die gesuchte Inverse, A^{-1}

Die n Gl.systeme der Form (h.7) lassen sich gleichzeitig lösen, mit Gauß-Verfahren:

LS.4i

$$\underbrace{\begin{matrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1 & \dots & A_j & \dots & A_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_n & \dots & A_j & \dots & A_n \end{matrix}}_A \begin{matrix} | \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Gauß-Verfahren}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} | \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} C_1 & \dots & C_k & \dots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \dots & C_k & \dots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \dots & C_k & \dots & C_n \end{matrix}$$

(1)

(h.8): $C = A^{-1}$ (2)

Beispiel (vergleiche Seite b):

Zeile:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l}
 [1]: \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad | \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 [2]: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\
 [3]: \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

A (3)

$$\begin{array}{l}
 3[1]: \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\
 [2] - 3[1]: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad | \quad -3 \quad 1 \quad 0 \\
 [3] - 6[1]: \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad -6 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{l}
 [1] \quad [2]: \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad | \quad 6 \quad -1 \quad 0 \\
 [2] + 2[3]: \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -15 \quad | \quad 1 \quad 2 \\
 [2] - [3]: \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \quad | \quad 1 \quad -1
 \end{array}$$

(1)

LS.4j

$$\begin{array}{l}
 [1] + \frac{1}{3}[3]: \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \quad | \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3}[2]: \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -5 \quad | \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \\
 \frac{1}{3}[3]: \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

$= A^{-1}$ (2)

Check:

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & -2 & -1 \\ -15 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (21-15+3) & (-2+1+1) & (-1+2-1) \\ (63-90+27) & (-6+6+9) & (-3+12-9) \\ (126-135+9) & (-12+9+3) & (-6+18-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

L5.5 Allgemeine lineare Abbildungen und Matrizen

L5.5a

V sei ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis $V \equiv \text{span}\{\hat{v}_j\}, j=1, \dots, n \leftarrow \dim(V)$ (1)

W sei ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis $W \equiv \text{span}\{\hat{w}_i\}, i=1, \dots, m \leftarrow \dim(W)$ (2)

[Hut bedeutet hier: allgemein/abstrakt, im Gegensatz zu bisherigen Spaltenvektoren in $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$]

Betrachte lineare Abbildung: $\hat{A} : V \rightarrow W$ (3)

Wirkung auf Basis sei: $\hat{v}_j \mapsto \hat{u}_j = \hat{A}(\hat{v}_j) \equiv \hat{w}_i A^i_j$ (4)

Bild von v -Basisvektor j ist
Linearkombination von w -Basisvektoren

Wirkung von A auf beliebigen Vektor in V : $\hat{v}_j x^j \equiv \hat{x} \mapsto \hat{A}(\hat{x}) = \hat{y} \equiv \hat{w}_i y^i$ (5)

(dargestellt in jeweiliger Basis):

$$\hat{w}_i y^i = \hat{y} \stackrel{(5)}{=} \hat{A}(\hat{v}_j x^j) = \hat{A}(\hat{v}_j) x^j \stackrel{(4)}{=} \hat{u}_j x^j \stackrel{(4)}{=} \hat{w}_i A^i_j x^j \stackrel{(6)}{\Rightarrow} y^i = A^i_j x^j \quad (7)$$

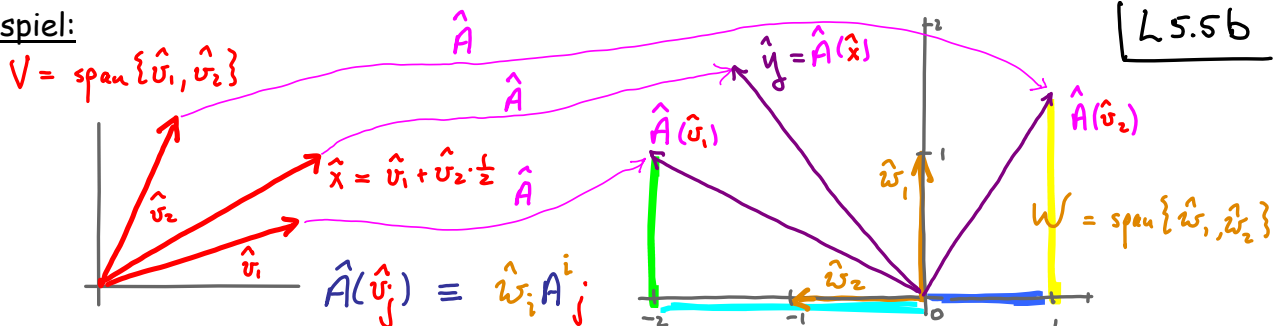
A ist linear, (L5b.2)

(7) entspricht einer Abbildung zwischen Standardvektorräumen:
 $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

$$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$(x^1, \dots, x^n)^T = \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} = \vec{y} = (y^1, \dots, y^m)^T \quad (8)$$

Beispiel:



Laut Skizze:

$$\hat{A}(\hat{v}_1) = \vec{u}_1 = \hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2 = \hat{w}_i A^i_1 \Rightarrow A^1_1 = 1, A^2_1 = 2 \quad (1)$$

$$\hat{A}(\hat{v}_2) = \vec{u}_2 = \hat{w}_1 \cdot \frac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1) = \hat{w}_i A^i_2 \Rightarrow A^1_2 = \frac{3}{2}, A^2_2 = -1 \quad (2)$$

Können wir hieraus die Wirkung v. A auf einen anderen Vektor, $\vec{x}$ bestimmen? Ja!

$$\hat{y} \equiv \hat{A}(\hat{x}) = \hat{A}(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 \cdot \frac{1}{2}) = \hat{A}(\hat{v}_1) \cdot 1 + \hat{A}(\hat{v}_2) \cdot \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\stackrel{(1), (2)}{=} (\hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2) \cdot 1 + (\hat{w}_1 \cdot \frac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{2} = \hat{w}_1 \cdot \frac{7}{4} + \hat{w}_2 \cdot \frac{3}{2} \quad (4)$$

$1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{4} \quad 2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$

Kompaktversion in Matrixnotation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

L5.5b

Für Basisvektoren:

$$V \xrightarrow{\hat{A}} W$$

diese Gl. definiert die Abbildung

L5.5c

$$V \ni \hat{v}_j \mapsto \hat{u}_j = \hat{A} \hat{v}_j = \hat{w}_i A^i_j \in W \quad (1)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow (L2.5a.4) \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}} (L2.5a.4)$

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ Position } j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_j \mapsto \vec{u}_j = A \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \hat{f}_i A^i_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{bmatrix} = \vec{A}_j \in \mathbb{C}^m \quad (2)$$

$\downarrow \phi_{\hat{w}} \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}}$

$$\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ der Matrix } A, \text{ ist Bild des Basisvektors } \vec{e}_j \text{ unter Abbildung } A. \quad (4)$$

Für allgemeine Vektoren:

$$V \xrightarrow{\hat{A}} W$$

$$V \ni \hat{v}_j x^j = \hat{x} \mapsto \hat{A} \hat{x} = \hat{y} = \hat{w}_i y^i \in W \quad (5)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}} \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}}$

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m \quad (6)$$

L5.6 Basistransformation [vergleiche Seite L2.5a,b] [wie L5.5, nun mit W=V]

L5.6a

$$\{\hat{v}_j\}, \{\hat{v}'_{i'}\} \text{ seien zwei Basen für } V, \dim(V) = n \text{ mit } \hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j \quad (1)$$

$j, i' = 1, \dots, n$

$$\text{In } \{\hat{v}_j\} \text{-Basis, } \hat{x} = \hat{v}_j x^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad (2)$$

$$\text{In } \{\hat{v}'_{i'}\} \text{-Basis, } \hat{x} = \hat{v}'_{i'} x'^{i'} \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{x}' \in \mathbb{C}^n \quad (3)$$

$$\hat{v}'_{i'} x'^{i'} \stackrel{(3)}{=} \hat{x} \stackrel{(2)}{=} \hat{v}_j x^j \stackrel{(1)}{=} \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j x^j \quad (4)$$

$$T = \phi_{\hat{v}'} \circ \phi_{\hat{v}}^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \phi_{\hat{v}'}(\phi_{\hat{v}}^{-1}(\vec{x}))$

$$\text{Fazit: } x'^{i'} = T^{i'}_j x^j \quad (5)$$

$$\text{Matrixnotation: } \vec{x}' = T \vec{x} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T^1_1 & \dots & T^1_j & \dots & T^1_n \\ T^2_1 & \dots & T^2_j & \dots & T^2_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^n_1 & \dots & T^n_j & \dots & T^n_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Neue Komponenten lassen sich durch Matrixmultiplikation von T mit den Alten berechnen!

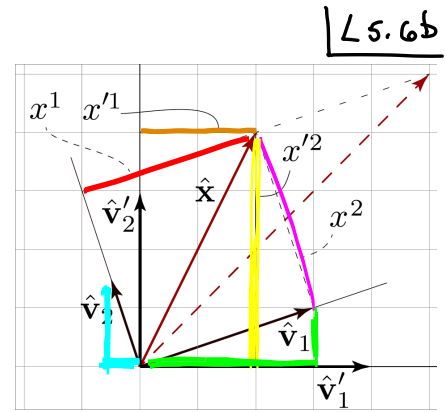
$$\text{Rücktransformation mittels inverser Matrix: } T^{-1} \vec{x}' \stackrel{(6)}{=} \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= \mathbf{1}} \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad (8)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &= \hat{v}'_1 \frac{3}{4} + \hat{v}'_2 \frac{1}{3} \quad (2) \\ \hat{v}_2 &= \hat{v}'_1 \left(-\frac{1}{8}\right) + \hat{v}'_2 \frac{1}{2} \quad (3)\end{aligned}$$

$$\hat{v}_j = \hat{v}'_i T^{ij} \quad (1)$$

$$T = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$



Der Vektor $\hat{x}$ hat zwei Darstellungen:

Einerseits, in $\{\hat{v}_j\}$ -Basis:

$$\hat{x} = \hat{v}_1 \cdot 1 + \hat{v}_2 \cdot 2 \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{x} \quad (5)$$

Andrerseits, in $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis:

$$\hat{x} = \hat{v}'_1 \frac{1}{2} + \hat{v}'_2 \frac{4}{3} \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \vec{x}' \quad (6)$$

(5) & (6) sind
konsistent mit
Skizze und (L5.6a.7):

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \stackrel{(5.6a.7)}{=} \overbrace{\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix}}^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/8 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{=} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \stackrel{(6)}{=} \vec{x}' \quad (7)$$

Transformation einer Matrix-Darstellung von einer Basis in eine andere

$\hat{A} : V \rightarrow V$, sei eine lineare Abbildung, mit $\hat{A} : \hat{x} \mapsto \hat{y}$

In $\{\hat{v}_j\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}_j x^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{x} \quad (1)$
 $\hat{y} = \hat{v}_j y^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{y} \quad (2)$

habe A die Darstellung $\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad (3)$
 [siehe (5.5a.8, 5.5c.6)]

In $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}'_i x'^i \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{x}' \quad (1')$
 $\hat{y} = \hat{v}'_i y'^i \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{y}' \quad (2')$

habe A die Darstellung $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}' \quad (3')$
 [siehe (5.5a.8, 5.5c.6)]

Die zwei Basen seien Verknüpft durch die Transformation

$$\hat{T} : \hat{v}_j = \hat{v}'_i T^{ij} \quad (4)$$

Dann sind Koordinaten
verknüpft durch:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= T \cdot \vec{x} \quad (5) \\ T^{-1} \cdot \vec{x}' &\stackrel{(5)}{=} \vec{x} \quad (6)\end{aligned}$$

$$\vec{y}' = T \cdot \vec{y} \quad (5')$$

$$T^{-1} \cdot \vec{y}' \stackrel{(5')}{=} \vec{y} \quad (6')$$

Und A' mit A durch:

$$\vec{y}' \stackrel{(5')}{=} T \cdot \vec{y} \stackrel{(3)}{=} T \cdot A \cdot \vec{x} \stackrel{(6)}{=} T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \vec{x}' \quad (7)$$

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$$

Interpretation: Wie wirkt lineare Abbildung auf Spaltenvektor in neuer Basis (wie lautet A')? Schicke ihn (3) zunächst in alte Basis (mittels T^{-1}), bilde ihn dort ab (mittels A), und schicke ihn dann zurück (mittels T).

Beispiel:

A : sei Streckung in $\hat{v}_1$ -Richtung um Faktor 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

L5.6d

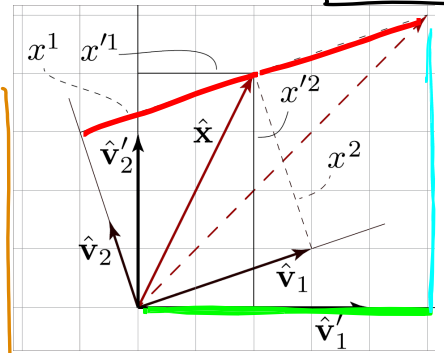
Falls nicht offensichtlich, wird A wie folgt bestimmt:

$$(5.6a.1): \hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{v}_j \cdot A^{jj} \quad (1)$$

$$\hat{A}(\hat{v}_1) = \hat{v}_1 \cdot \hat{A}^1_1 + \hat{v}_2 \cdot \hat{A}^2_1 \quad (2)$$

$$\hat{A}(\hat{v}_2) = \hat{v}_1 \cdot \hat{A}^1_2 + \hat{v}_2 \cdot \hat{A}^2_2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \hat{A}^1_1 & \hat{A}^1_2 \\ \hat{A}^2_1 & \hat{A}^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$



Finde nun Darstellung v. A in der $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis:

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{12}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Wie wirkt A auf den Vektor

$$\hat{x} \xrightarrow{\hat{\phi}_{\hat{v}'_i}} \bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad A' \cdot \bar{x}' = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Spur einer quadratischen Matrix

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

L5.6e

Spur = Summe der Diagonalelemente:

$$S_p(A) = \sum_i A^{ii} \quad (1)$$

Beispiel:

$$S_p \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 2 = 6 \quad (2)$$

Spur eines Matrixprodukts ist zyklisch invariant:

$$S_p(\overbrace{A \cdot B}^{(1)}) = \sum_i (A \cdot B)^{ii} = \sum_{ij} A^{ij} B^{ji} = \sum_{ij} B^{ji} A^{ij} = \sum_j (B \cdot A)^{jj} = S_p(\overbrace{B \cdot A}^{(3)}) \quad (3)$$

Analog:

$$S_p(\overbrace{A \cdot B \cdot C}^{(3)}) = S_p(\overbrace{C \cdot A \cdot B}^{(4)}) = S_p(\overbrace{B \cdot C \cdot A}^{(4)}) \quad (4)$$

Spur ist invariant unter Basistransformationen:

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad (5)$$

$$S_p(A') \stackrel{(5)}{=} S_p(\overbrace{T \cdot A \cdot T^{-1}}^{(4)}) = S_p(\overbrace{T^{-1} \cdot T \cdot A}^{=1}) = S_p(A) \quad (6)$$

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen

ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\}$,

$W = \text{span}\{\hat{w}_i\}$ (1)

Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A}: V \rightarrow W$

$$\hat{x} = \hat{v}_j x^j \mapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i \quad (2)$$

Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i_j$

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}, \quad A = \{A^i_j\} \quad (3)$$

In Standardbasis: A bildet Basisvektor $\vec{e}_j$ ab auf:

$$\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ von } A \quad (4)$$

Zwei Basen für denselben Raum: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\} = \text{span}\{\hat{v}'_{i'}\}$

(5)

Basistransformation: $T: V \rightarrow V$

$$\hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j \quad (6)$$

Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^{i'}_j\}$

$$x^{i'} = T^{i'}_j x^j, \quad \vec{x}' = T \cdot \vec{x} \quad (7)$$

Darstellung v. altem Basisvektor $\hat{v}_j$ in neuer Basis:

$$\vec{T}_j = \text{Spalte } j \text{ von } T \quad (8)$$

Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^{j'}_{i'}\}$

$$\hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^{j'}_{i'}, \quad x^j = (T^{-1})^{j'}_{i'} x'^{i'} \quad (9)$$

Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis:

$$(\vec{T}^{-1})_{i'} = \text{Spalte } i' \text{ von } T^{-1} \quad (10)$$

Bezug zwischen $\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad (11)$ und $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}' \quad (12)$:

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad (13)$$