

L5 Matrizen I: Lineare Abbildungen

L5.1a

Matrix:
(Plural: Matrizen)

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_n \end{pmatrix} = \{A^i_j\}$$

$$i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n$$

(1)

Vielfältige Anwendungen in der Physik:

- Lösung von linearen Gleichungssystemen
- Beschreibung von Drehungen
- Beschreibung von Lorentz-Transformationen (spezielle Relativitätstheorie)
- Lösung von linearen Differenzialgleichungen (nach Fouriertransformation)
- Bestimmung der Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren
- Bestimmung der Eigenzuständen und Eigenenergien eines Quantensystems
- Dirac-Gleichung (relativistische Version der Schrödingergleichung)

-

Für gründliche Einführung: siehe lineare Algebra Vorlesung

L5.1 Lineare Abbildungen

L5.1b

Wir betrachten zwei- $\mathbb{C}$ Vektorräume, V und W
mit Dimensionen n bzw. m

und eine Abbildung

$$F: V \rightarrow W, \vec{v} \mapsto F(\vec{v}) \equiv F\vec{v} \quad (1)$$

Kompaktnotation verzichtet auf $()$ -

Abbildung ist 'linear', falls $\forall a, b \in \mathbb{C}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt:

$$F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w}) \quad (2)$$

Lin. Abb. ist ein Homomorphismus: sie 'respektiert' die Vektorraumstruktur v. V und W :
erst addieren/strecken, dann abbilden = erst abbilden, dann addieren/strecken

Alltagsbeispiele: Foto einer Person ist eine lineare Abbildung von

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

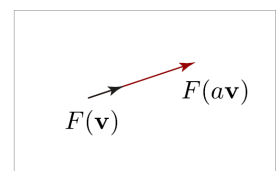
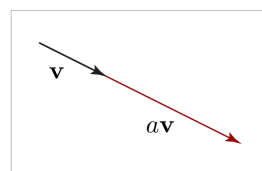
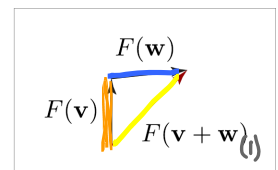
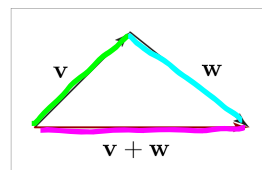
Foto einer Buchseite ist eine lineare Abbildung von

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Im Folgenden betrachten wir zunächst die Standardvektorräume

$$V = \mathbb{C}^n, W = \mathbb{C}^m$$

Beispiel: F = Rotation um 45° und Streckung um Faktor $\frac{1}{2}$



$n = 1, m = 1:$ $A : \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$, Kompaktnotation (nur für lineare Abbildungen): L5.1c
verzichte auf ()-Klammern

$$x \mapsto y = A(x) \equiv Ax = ax, \quad a \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Beispiel:

$x \mapsto 3x$, dann: $A(5x + 6\tilde{x}) = 3(5x + 6\tilde{x}) = 5(3x) + 6(3\tilde{x}) = 5A(x) + 6A(\tilde{x})$ wie in (b.2) gefordert ✓
(2)

Essentielle Eigenschaft v. A:

linear in x:

$$Ax = ax$$

d.h. keine Konstante:

$$Ax \neq ax + b$$

und keine Potenzen:

$$Ax \neq a(x)^3$$

dann wäre (b.2) (3)
nicht erfüllt
wie in (b.2) gefordert

Konstante würde Linearität zerstören. Beispiel:

$x \mapsto 3x + 1$ dann: $A(5x + 6\tilde{x}) = 3(5x + 6\tilde{x}) + 1 = 5(3x + 1) + 6(3\tilde{x} + 1) = 5A(x) + 6A(\tilde{x})$ -10 -10

$n = 2, m = 1:$ $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$, $A_j \in \mathbb{C}$
 $j = 1, 2$
(3)

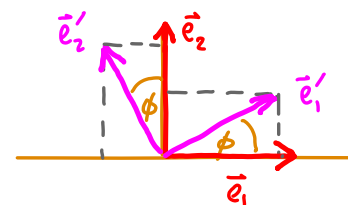
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \mapsto y = A\vec{x} = A_1 x^1 + A_2 x^2$$

$n = 2, m = 2:$ $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, oben-Index links, unten-Index rechts
 $A^i_j \in \mathbb{C}$,
 $j = 1, 2$
 $i = 1, 2$
(4)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \mapsto \vec{y} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 \\ A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Rotation in 2 Dimensionen

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \phi x^1 - \sin \phi x^2 \\ \sin \phi x^1 + \cos \phi x^2 \end{bmatrix}; \quad (1)$$



L5.1d

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \vec{e}'_1, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \vec{e}'_2 \quad (2)$$

Allgemein: n, m beliebig:

$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$,
 $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$, mit

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_j x^j + \dots + A^1_n x^n \\ \vdots \\ A^i_1 x^1 + \dots + A^i_j x^j + \dots + A^i_n x^n \\ \vdots \\ A^m_1 x^1 + \dots + A^m_j x^j + \dots + A^m_n x^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Einstein-Notation:

$$y^i = A^i_j x^j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

L5.2 Matrizen

L5.2a

'm x n Matrix' $A = \{A^i_j\}$ ist rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten,

'Matrizelement': $A^i_j \in \mathbb{C}$

Reihenindex links (oben): $i = 1, \dots, m$
 Spaltenindex rechts (unten): $j = 1, \dots, n$ (2)

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{pmatrix} = \{A^i_j\} \quad (1)$$

Spalte j: $\vec{A}_j \equiv \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^i_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$ ist ein 'Spaltenvektor', mit Komponenten $(\vec{A}_j)^i = A^i_j$ (mx1 Matrix) (3)

Reihe i: $\vec{A}^i \equiv (A^i_1, \dots, A^i_j, \dots, A^i_n)$ ist ein 'Reihenvektor', mit Komponenten $(\vec{A}^i)_j = A^i_j$ (1xn Matrix) (4)

'Quadratische Matrix' falls $m = n$

Notationskonventionen:

$A, \{A^i_j\}, \{A_{ij}\}, \{A^i_j\}, (A^i_j), [A^i_j]$

oft auch mit beiden Indizes unten, oder oben:

Multiplikation: Matrix mal Spaltenvektor

Spaltenvektor mit n Komponenten
 ist nx1 Matrix.

L5.2b

$$\vec{y} = A \vec{x} \quad \text{bedeutet:} \quad y^i \stackrel{(1d.4)}{=} A^i_j x^j \stackrel{(2a.3)}{=} (\vec{A}^i)_j x^j = (\vec{A}^i) \cdot \vec{x} \quad (1)$$

Kompaktnotation: Skalarprodukt von Reihenvektor $\vec{A}^i$ und Spaltenvektor $\vec{x}$ (2)

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \stackrel{(1d.3)}{=} \begin{pmatrix} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_j x^j + \dots + A^1_n x^n \\ \vdots \\ A^i_1 x^1 + \dots + A^i_j x^j + \dots + A^i_n x^n \\ \vdots \\ A^m_1 x^1 + \dots + A^m_j x^j + \dots + A^m_n x^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{per Definition}}{=} \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3/2 \cdot 1/2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Einschub: Matrizen bilden einen Vektorraum

L5.2c

$$\text{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{A = \{A^i_j\} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, A^i_j \in \mathbb{C}\} \quad (1)$$

Menge aller $m \times n$ Matrizen ist ein Vektorraum, mit Dimension $m \cdot n$, isomorph zu $\mathbb{C}^{m \cdot n}$

(i) Matrixaddition: $(A, B) \mapsto A + B, (A + B)^i_j \equiv A^i_j + B^i_j$ 'elementenweise Addition' (2)

Beispiel: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (3)

Neutrales Element: 'Nullmatrix': $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ alle Matrixelemente = 0 (4)

Additives Inverse: $A + (-A) = O \Rightarrow -A = \{-A^i_j\}$ (5)

Matrixaddition ist assoziativ: $(A + B) + C \stackrel{(2)}{=} A + (B + C)$ (6)

und kommutativ: $A + B \stackrel{(2)}{=} B + A$ (7)

(ii) Skalarmultiplikation: $(\lambda, A) \mapsto \lambda A, (\lambda A)^i_j \equiv \lambda A^i_j$ 'elementenweise Multiplikation' (8)

Beispiel: $3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (9)

Wirkung einer linearen Abbildung auf Standardbasis

L5.2d

Standardbasis in $\mathbb{C}^n$: $\{\vec{e}_j\} \quad j = 1, \dots, n \quad \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ Position j von insgesamt n (1)

Standardbasis in $\mathbb{C}^m$: $\{\vec{f}_i\} \quad i = 1, \dots, m \quad \vec{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ Position i von insgesamt m (2)

Was ist das Bild eines Standardbasisvektors für Abbildung A ?

$$\begin{aligned} & A^1_1 \cdot 0 + \dots + A^1_{j-1} \cdot 0 + A^1_j \cdot 1 + A^1_{j+1} \cdot 0 + \dots + A^1_n \cdot 0 \\ & \text{Position } j: \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & \dots & A^2_{j-1} & A^2_j & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_{j-1} & A^m_j & \dots & A^m_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A^1_j + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A^i_j + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} A^m_j \\ & \vec{e}_j \mapsto A \vec{e}_j = \vec{f}_i A^i_j \quad (4) \quad \vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ der Matrix } A \end{aligned}$$

Fazit: für lineare Abbildung $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, dargestellt durch $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

liefert $\vec{A}_j$ ($\equiv$ Spalte j der Matrix A) das Bild des Basisvektors $\vec{e}_j$ (5)

Transponierte Matrix (das werden wir später brauchen)

LS.2e

Sei $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$ eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen A^i_j

Definition: Die 'transponierte Matrix', A^T [sprich: A-transponiert] ist eine $n \times m$ Matrix, erhalten durch Vertauschen der Reihen und Spalten von A: (1)

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C^T = (4, 5)$ (2)

Formal: A^T hat Matrixelemente $(A^T)^i_j = A^i_j$ (3)
 { auf beiden Seiten der Gleichung gilt:
 linker Index = Reihenindex
 rechter Index = Spaltenindex
 kovariante Stellung (oben/unten) unverändert

Rezept: um Reihen/Spalten zu vertauschen, 'verschiebe Indizes horizontal': $A^i_j \xrightarrow[A^i_j \leftarrow]{A^T} A^T{}^i_j$ (4)

Gilt auch umgekehrt: für $n \times m$ Matrix B , mit Elementen B^i_j ist die Transponierte, B^T , eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $(B^T)^i_j = B^i_j$ (5)

Rezept: Horizontale Rückverschiebung der Indizes: $B^i_j \xrightarrow[B^i_j \rightarrow]{B^T} B^T{}^i_j$ (6)

Zweimal transponieren liefert ursprüngliche Matrix: $(A^T)^T = A$ (7)

In alle-Indizes-unten-Notation: $(B^T)_{ji} = B_{ij}$ (8)

Adjungierte Matrix (das werden wir später brauchen)

LS.2f

(andere Namen: adjungiert = hermitesch transponiert = transponiert-konjugiert)

Sei $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$ eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen A^i_j (1)

Definition: Die 'adjungierte Matrix', $A^\dagger$ [sprich: A-adjungiert] ist eine $n \times m$ Matrix, erhalten durch Transposition und komplexer Konjugation:

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3+i \\ 2i & 4 & -i+5 \end{pmatrix}$, $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 4 \\ 3-i & i+5 \end{pmatrix}$ (2)
 'Kreuz' →

Formal: $(A^\dagger)^i_j = \overline{A^i_j}$ (3)

Rezept: 'verschiebe Indizes horizontal' und konjugiere: $A^i_j \xrightarrow[A^i_j \leftarrow]{A^\dagger} A^\dagger{}^i_j$ (4)

Gilt auch umgekehrt: für $n \times m$ Matrix B , mit Elementen B^i_j ist die Adjungierte, $B^\dagger$, eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $(B^\dagger)^i_j = \overline{B^i_j}$ (5)

Rezept: Horizontale Rückversch. der Indizes und Konj.: $B^i_j \xrightarrow[B^i_j \rightarrow]{B^\dagger} B^\dagger{}^i_j$ (6)

Zweimal adjungieren liefert ursprüngliche Matrix: $(A^\dagger)^\dagger = A$ (7)

In alle-Indizes-unten-Notation: $(B^\dagger)_{ji} = \overline{B_{ij}}$ (8)

L5.3 Matrixmultiplikation: Verknüpfung v. zwei linearen Abbildungen

L5.3a

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^l \quad (1)$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{y} = A \cdot \vec{x} \xrightarrow{B} \vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) \equiv C \cdot \vec{x} \quad (2)$$

Komponenten: $y^i = A^i_j x^j \quad z^k = B^k_i y^i = B^k_i A^i_j x^j = C^k_j x^j \quad (3)$

Spaltendarstellung:

$$\begin{matrix} j=1, \dots, n & i=1, \dots, m & k=1, \dots, l \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_j x^j \\ \vdots \\ A^i_j x^j \\ \vdots \\ A^m_j x^j \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^k \\ \vdots \\ z^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1_i y^i \\ \vdots \\ B^k_i y^i \\ \vdots \\ B^l_i y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1_i A^i_j x^j \\ \vdots \\ B^k_i A^i_j x^j \\ \vdots \\ B^l_i A^i_j x^j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} C^1_j x^j \\ \vdots \\ C^k_j x^j \\ \vdots \\ C^l_j x^j \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{matrix} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{C \equiv B \circ A} & \mathbb{C}^l \\ \vec{x} & \xrightarrow{C \equiv B \circ A} & \vec{z} = C \cdot \vec{x} \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} C^{(2)} = B \cdot A \\ C^k_j^{(3)} = B^k_i A^i_j \end{matrix} \quad (5)$$

Matrixmultiplikation (zusätzliche Struktur zu der des Vektorraums)

L5.3b

$$\bullet : \text{mat}(\mathbb{C}, l, m) \times \text{mat}(\mathbb{C}, m, n) \longrightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, l, n) \quad (1)$$

$$(B, A) \longmapsto B \cdot A = C$$

mit $C^k_j = B^k_i A^i_j = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \quad (2)$

= Skalarprodukt von 'Zeile k von B' und 'Spalte j von A'

Nur definiert falls (# Spalten v. B) = (# Zeilen v. A).

Explizit:

$$\begin{matrix} l \text{ Zeilen, } n \text{ Spalten} & l \text{ Zeilen, } m \text{ Spalten} & m \text{ Zeilen, } n \text{ Spalten} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} C^1_1 & \dots & C^1_j & \dots & C^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^k_1 & \dots & C^k_j & \dots & C^k_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^l_1 & \dots & C^l_j & \dots & C^l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1_1 & \dots & B^1_i & \dots & B^1_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^k_1 & \dots & B^k_i & \dots & B^k_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^l_1 & \dots & B^l_i & \dots & B^l_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Zeilenvektor k von B Spaltenvektor j von A

Beispiel: ($l = 3, m = 2, n = 2$)

L5.3c

$$B \cdot A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrixmultiplikation

(1)

1) nicht kommutativ:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

(sogar gar nicht definiert, falls Dimensionen nicht passen!)

(2)

Beispiel: ($l = 2, m = 2, n = 2$)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 34 \end{pmatrix} \quad (3)$$

verschieden!

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \quad (4)$$

verschieden!

2) assoziativ (falls definiert)

L5.3d

$$D \equiv (C \cdot B) \cdot A = C \cdot (B \cdot A) \equiv \tilde{D}$$

(1)

Beweis:

$$D_j^l = \sum_i (C \cdot B)_i^l A_j^i = \sum_i \left(\sum_k C_k^l B_i^k \right) A_j^i = \sum_i \sum_k \underbrace{(C_k^l B_i^k A_j^i)}_{\text{gleich!}} \quad (2)$$

$$\tilde{D}_j^l = \sum_k C_k^l (B \cdot A)_j^k = \sum_k C_k^l \left(\sum_i B_i^k A_j^i \right) = \sum_k \sum_i \underbrace{(C_k^l B_i^k A_j^i)}_{\text{gleich!}} \quad (3)$$

Reihenfolge, in der die Terme addiert werden, ist egal, $\sum_i \sum_k = \sum_k \sum_i$, denn Addition von Zahlen (hier Produkte von Matricelementen) ist assoziativ! (4)

Beispiel: ($k=2, l=2, m=2, n=1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dieselben Terme werden in unterschiedlicher Reihenfolge addiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

3. distributiv

$$\mu, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A \cdot (\lambda B + \mu C) = \lambda A \cdot B + \mu A \cdot C$$

(1) LS.3e

Beweis:

$$A^i_k (\lambda B^k_j + \mu C^k_j) = \lambda A^i_k B^k_j + \mu A^i_k C^k_j \quad \square \quad (2)$$

ebenso:

$$(\lambda A + \mu B) \cdot C = \lambda A \cdot C + \mu B \cdot C \quad (3)$$

4.

$$(\lambda A) \cdot (\mu B) = \lambda \mu (A \cdot B) \quad (4)$$

Beweis:

$$(\lambda A^i_k)(\mu B^k_j) = \lambda \mu (A^i_k B^k_j) \quad (5)$$

5. Falls

$$A, B \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \Rightarrow A \cdot B \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \quad (6)$$

Quadratische Matrizen sind 'abgeschlossen' unter Matrixmultiplikation.

Quadratische Matrizen bilden eine 'Algebra'.

LS.3f

Eine Algebra ist ein Vektorraum mit einer Produkt-Operation, $V \times V \rightarrow V$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$, welche die folgenden Distributivitäts-Axiome erfüllt ($u, v, w \in V$, $c \in \mathbb{C}$):

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (1a)$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad (1b)$$

$$c(v \cdot w) = (cv) \cdot w = v \cdot (cw) \quad (1c)$$

6. Neutrales Element der Matrixmultiplikation

'Einheitsmatrix' (engl: identity)

(für $m = n$)

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \{\delta^i_j\} \quad (2)$$

(Einsen auf der Diagonalen, ansonsten Nullen)

$$\mathbb{1} \cdot A = A = A \cdot \mathbb{1} \quad (3a)$$

denn:

$$\delta^i_k A^k_j = A^i_j = A^i_k \delta^k_j \quad (3b)$$

Explizit:
($n=3$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Adjungiertes Produkt

L5.3 g

Sei $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, \ell, m)$, $B \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$, sodass $A \cdot B = \text{mat}(\mathbb{C}, \ell, n)$

Es gilt:

$$(A \cdot B)^{\dagger} = B^{\dagger} \cdot A^{\dagger}$$

Adjungiertes Produkt =
Produkt der Adjungierten,
in umgekehrter Reihenfolge (1)

Dimensionen: $n \times \ell = (\ell \times n)^{\dagger} = ((\ell \times m) \cdot (m \times n))^{\dagger} = (m \times n)^{\dagger} \cdot (\ell \times m)^{\dagger} = (n \times m) \cdot (m \times \ell) = n \times \ell$ (2)

Beweis: $(A \cdot B)^{\dagger}_{j,i} \stackrel{(2f.3)}{=} \overline{(A \cdot B)^{i,j}} \stackrel{(3b.2)}{=} \overline{A^i_k B^k_j} = \overline{A^i_k} \cdot \overline{B^k_j}$ (3)

$(B^{\dagger} \cdot A^{\dagger})_{j,i} \stackrel{(3b.2)}{=} B^{\dagger}_{j,k} A^{\dagger}_{k,i} \stackrel{(2f.3)}{=} \overline{B^k_j} \cdot \overline{A^i_k} = \overline{A^i_k} \cdot \overline{B^k_j}$ (4)

gleich!

Multiplikation von Zahlen (hier von
Matrizelementen) ist kommutativ!

Beispiel: ($\ell=m=2, n=1$)

(3): $\left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} \right)^{\dagger} = \left(\begin{pmatrix} 1 \cdot i + i \cdot 3 \\ 2 \cdot i + i \cdot 3 \end{pmatrix} \right)^{\dagger} = \left(\overline{1 \cdot i + i \cdot 3}, \overline{2 \cdot i + i \cdot 3} \right) = \left(\overline{1 \cdot i + i \cdot 3}, \overline{2 \cdot i + i \cdot 3} \right) = (-4i, -5i)$ (5)

(4): $\left(\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \right)^{\dagger} = \left(\overline{i}, \overline{3} \right) \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{i} & \overline{i} \end{pmatrix} = \left(\overline{i} \cdot \overline{1} + \overline{3} \cdot \overline{i}, \overline{i} \cdot \overline{2} + \overline{3} \cdot \overline{i} \right) = \left(\overline{1 \cdot i + i \cdot 3}, \overline{2 \cdot i + i \cdot 3} \right) = (-4i, -5i)$ (6)

Analog für Transposition:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

(6)

Zusammenfassung: L5.1-5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

ZL5a

Die Abbildung $F: V \rightarrow W$ ist 'linear', falls $F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w})$ (1)

Für $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$, mit $y^i = a_{ij}x^j = \vec{A}^i \cdot \vec{x}$ (2)

$m \times n$ Matrix:

$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{pmatrix} = \{A^i_j\}$ (3)

Spalte j:

$\vec{A}_j \equiv \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^i_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$ (4)

Reihe i:

$\vec{A}^i \equiv (A^i_1, \dots, A^i_j, \dots, A^i_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis:

$\vec{e}_j \xrightarrow{A} A\vec{e}_j = \vec{A}_j = \text{Spalte } j$ (6)

Komplexe $(m \times n)$ -Matrizen bilden $m \cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{C}^{m \cdot n}$ |ZL5b

$$\text{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{A = \{A_{ij}^i\} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, A_{ij}^i \in \mathbb{C}\} \quad (1)$$

mit Matrixaddition, (elementenweise) $(A, B) \mapsto A + B, \quad (A+B)_{ij}^i \equiv A_{ij}^i + B_{ij}^i \quad (2)$

und Skalarmultiplikation, (elementenweise) $(\lambda, A) \mapsto \lambda A, \quad (\lambda A)_{ij}^i \equiv \lambda A_{ij}^i \quad (3)$

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen $\Rightarrow$ Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^l \quad (4)$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{y} = A \cdot \vec{x} \xrightarrow{B} \vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) \equiv C \cdot \vec{x} \quad (5)$$

(5e.3,4)

$$C_{ij}^k = B_{ij}^k A_{ij}^i = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \quad \begin{cases} k = 1, \dots, l \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

(Zeile k von B) (Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber nicht kommutativ !