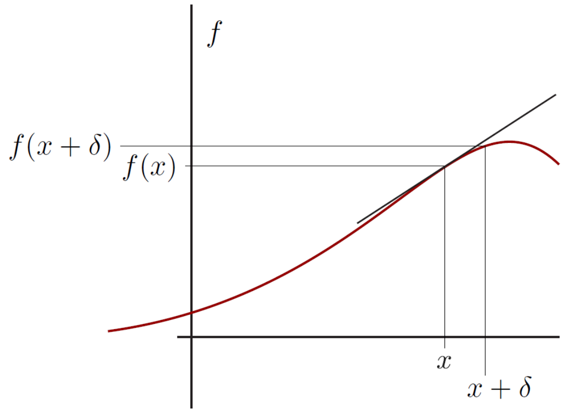
C: Calculus

C1: Differenzieren (Ableiten) 1-dimensionaler Funktionen

C1a

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Ableitung einer Funktion'

C1.1 Def. der Ableitung



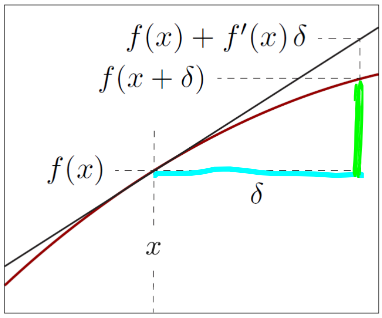
$f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mapsto$

sei eine glatte Funktion (keine Sprünge, keine Zacken).

'Ableitung von f am Punkt x ':

$$\equiv \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{'Differenzquotient'}} \qquad (1)$$

'Differentialquotient'



Interpretation: Steigung v. am Punkt

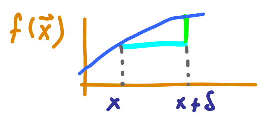
C1b

Alternative Notationen: $f'(x) \;\equiv \qquad \equiv \qquad \equiv \qquad \equiv$ (1)

Verallgemeinerbare Betrachtung: Sei δ klein, aber nicht infinitesimal klein.

(a.1) in guter Näherung, wird exakt für

Dann: $\dfrac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \simeq$ (2)



Grundlegende Formel: $f(x+\delta) \overset{(2)}{\simeq}$ (3)

E1-Sprech: 'Taylor-Entwicklung' 'Mutter aller Ableitungen'

Schreibe $x+\delta \;\equiv\; :$ $\quad f(\quad) \simeq f(x) + \qquad f'(x)$ (4)

linear in y!

Interpretation: nahe bei x kann näherungsbeweise beschrieben werden durch eine lineare Funktion v. !

> Allgemeine Faustregel: jede Ableitung liefert eine lokale Näherung einer Funktion durch eine lineare Funktion! (5)

Beispiel: $f(x) = x^3$ (1) C1c

$f(x \quad) = (x \quad)^3$

ausmultipliziert: $= x^3 + \underbrace{3x^2} + \underbrace{3(\quad)^2 x + (\quad)^3}$ (2)

Identifiziere: $= \quad + $ (3)

[(durch Vergleich mit (b.3)]

Fazit: $f'(x) =$

bedeutet: Terme 'höher als lineare Ordnung in ' (hier:)

sind vernachlässigbar relativ zu δ wenn :

vernachlässigbar relativ zum ersten Term in [ ], falls

$$f(x + \quad) = x^3 + \quad \left[3x^2 + \overbrace{\qquad\qquad} \right]$$ (4)

C1d

C1.2 Ableitungsregeln

(aus Schule bekannt? In Übungen trainieren!)

(Siehe auch Skript, Mathe Vorkurs)

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien 'glatte Funktionen', $a \in \mathbb{R}$

Ableitungen existieren

Kompaktnotation:

Produktregel: $\frac{d(\qquad)}{dx} = \frac{d(\quad)}{dx} \qquad + \qquad \frac{d(\quad)}{dx}$ (1) | $(fg)' =$

Kettenregel: $\frac{d(\qquad)}{dx} =$ (2) | $(f(g))' =$

Inverse: $f(y) =$ $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} \overset{(2)}{=} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}$ (3) | $\left(\frac{1}{g}\right)' =$

Ableitung der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x)$ $\frac{df^{-1}(x)}{dx} \overset{(e.2)}{=} \frac{1}{\qquad}$ (4) | $(f^{-1})' =$

C1e

Inverse Funktion: Sei f^{-1} die Inverse Funktion v. f :

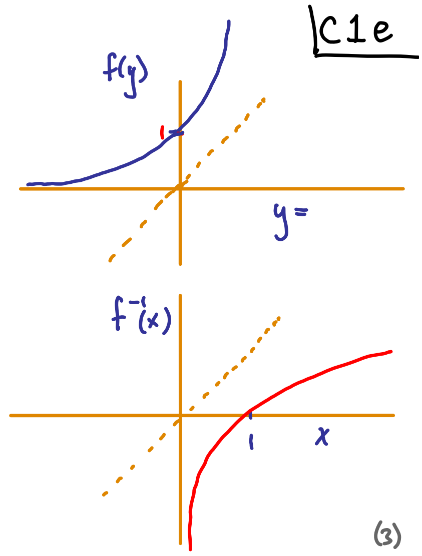
$$f^{-1}(x) = \qquad (1)$$

dann gilt:

$$f(f^{-1}(x)) \overset{KR}{=} \qquad = \quad x \quad = \qquad (1')$$

(d.2), mit $g = \quad =$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} \overset{(1')}{=} \frac{1}{\qquad} \qquad (2)$$



(3)

Beispiel: $\ln(x) \overset{(1)}{}$, $f^{-1}(x) =$, $f(y) =$ (4)

$$\frac{d\ln(x)}{dx} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\qquad} = \frac{1}{\qquad} = \frac{1}{\qquad} = \frac{1}{\quad} \qquad (5)$$

C1f

C1.3 Ableitungen v. wichtigen Funktionen

(1)

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$
sinus

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \qquad (3)$$
cosinus

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
tangens

$$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \qquad (4)$$
cotangens

$$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$$
Exponentialfunktion

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \qquad (5)$$
logarithmus

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right], \qquad \cosh(x) = \tfrac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right] \qquad (6)$$
sinus hyperbolicus, cosinus hyperbolicus

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \qquad (7)$$
tangens hyperbolicus, cotangens hyperbolicus

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \qquad (8)$$

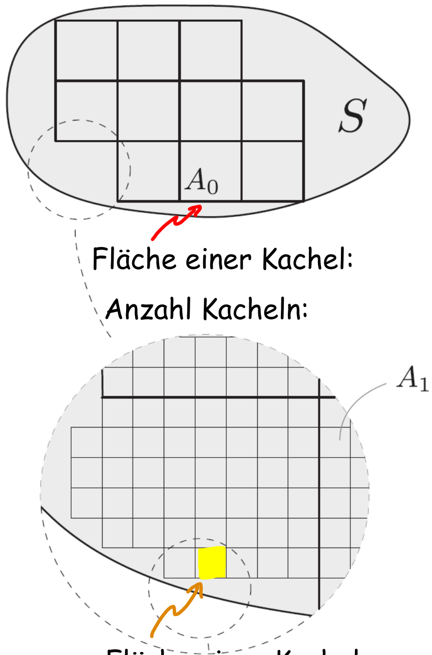
$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \frac{d}{dx} \coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} \qquad (9)$$

C2 Integrieren 1-dimensionaler Funktionen

C2.1 Grundidee der Integration

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation
des Begriffs 'Integral einer Funktion'

Beispiel: Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche:



Schätzung d. Gesamtfläche: $F \simeq \sum \quad =$ (1)

Fläche einer Kachel:

Anzahl Kacheln:

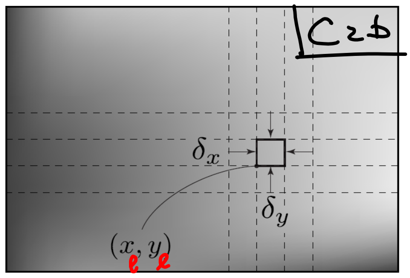
Bessere Schätzung d. Gesamtfläche: $F \simeq \sum \quad =$ (2)

Tatsächliche Gesamtfläche erhält man im Limes
'unendlich vieler', 'unendlich kleiner' Flächenelemente. (3)

Fläche einer Kachel:

Anzahl Kacheln:

Kompliziertere Aufgabe: Fläche sei ungleichmäßig
angemalt. Was ist Gesamtmasse der Farbe?



Farbmasse der Kachel bei (x_ℓ, y_ℓ)

Schätzung der Gesammtmasse: $M \simeq \sum$ (1)

Massendichte = Masse pro Flächenelement

Tatsächlicher Farbverbrauch, akkurat bestimmt im Limes unendlich vieler, infinitesimal
kleiner Kacheln:

Integrationsmass (2-dimensional)

$M = \lim \quad \sum_{\ell=1} \quad \equiv$ (2)

Funktion von zwei kontinuierlichen Variablen

Integrationsbereich

[Falls $\rho(x,y) =$ (2')
dann = Fläche von]

Allgemeine Faustregel: Integral = Grenzwert einer Summe (3)

'Riemann-Summe' $= \lim \quad \sum$

'Mutter aller Integrale'

Diskretisierungsparameter:

Diskretisierungsindex:

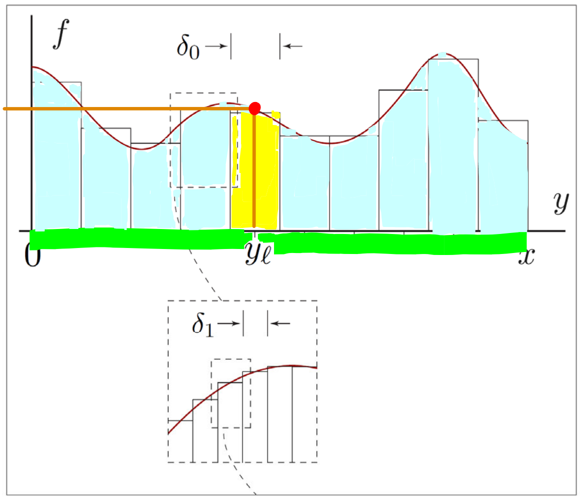
ist proportional zu

Größe, über die summiert wird:

Beispiel: Fläche unter einer Kurve

C2c

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$



Integrationsbereich: $S =$

Diskretisierungsparameter = Kachelbreite:

Diskretisierungsindex: (1)

Fläche v. Kachel ℓ : (2)

Schätzung d. Gesamtfläche: $F(x) = \sum$ (3)

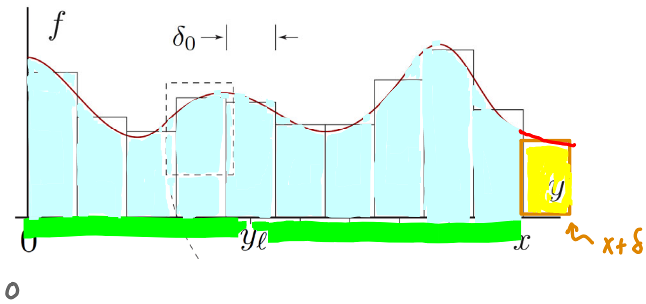
Tatsächliche Fläche: $F(x) = \lim \sum \equiv$ (4)

Definition: 'Integral d. Funktion f'

Integration als 'Umkehroperation' des Differenzierens

C2d

Wie ändert sich $F(x)$ als Funktion von ?
(halte fest, füge eine Kachel hinzu)



$F(x\ ) \overset{(c.3)}{\simeq} \delta \sum_{\ell=1}^{N_x} f_\ell$ (1)

$= \delta \sum_{\ell=1}^{N_x} f_\ell +$ (2)

$\simeq \quad + \quad +$ (3)

Aufgelöst nach f: $f(x) \overset{(3)}{=} \overline{\qquad\qquad} \overset{(1a.1)}{\simeq}$ (4)

Mutter aller Ableitungen

Im Limes $\delta \to 0$ erhalten wir den 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung':

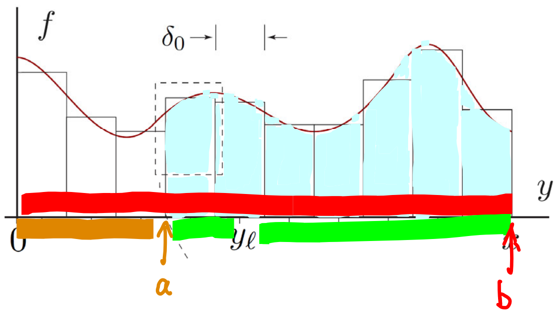
$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \implies$ (5)

'Bestimmtes Integral': C2e

$F(\quad) - F(\quad)$ (1)

(d.2) $= \lim_{\delta\to 0}\left[\delta\sum_{\ell=1} f_\ell - \delta\sum_{\ell=1} f_\ell\right]$ (2)

$= \lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{\ell=} f_\ell \equiv \int_a^b dy\, f(y)$ (3)



= Fläche unter Kurve zwischen a und b

Standardnotation: $\int dy\, f(y) \overset{(1)}{=} F(\quad) - F(\quad) \equiv F(y)\Big| \equiv \Big[F(y)\Big]$ (4)

Falls $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ist $F: x \mapsto$ eine 'Stammfunktion' von $f: x \mapsto f(x)$ (5)

Stammfunktion ist nicht eindeutig: $F \quad : x \mapsto F(x)$ ist auch eine Stammfunktion. (6)

beliebige Konstante

'Unbestimmtes Integral': $\int dy\, f(y) \equiv$ (7)

C2.3 Integrationsregeln

C2f

Partielle Integration (entstammt der Produktregel)

Sei $F(x) =$ mit beliebig aber differenzierbar.

Produktregel: $F \;=\; u\,v \;+\; u\,v$ (1)

$\int dx$ (1): $\overset{\text{Hauptsatz}}{=}$ $F' \;=\; u'v \;+\; u\,v'$ (2)

Umstellen: $\boxed{\int_a^b dx \overset{(1,2)}{=} \Big[\quad\Big]_a^b - \int_a^b dx}$ 'partielle Integration' (3)

Nützlich, falls einfacher ist .

Beispiel: $\int_0^\pi dx\; x \sin(x) =$ (4)

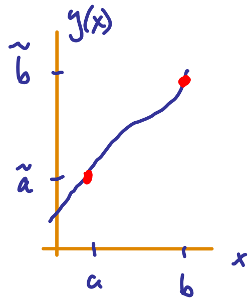
$u =$ $v' =$ $=$ $=$ (5)

$u' =$ $v =$

Variablen-Substitution (entstammt der Kettenregel)

C2g

Sei $f(y) =$ (1)



$\int dy\,(1)$: $f(y) \overset{(1)}{=} \frac{d}{dy}F(y) \overset{\text{Hauptsatz}}{=}$ (2)

Sei ferner $y:$ $\rightarrow$ $\mapsto$ (3)

eine monoton steigende Funktion v. und betrachte $F(y(\;))$ als Funktion von :

Kettenregel: $F(y(x))' \overset{(C1d.2)}{=} \overset{(1)}{=}$ (4)

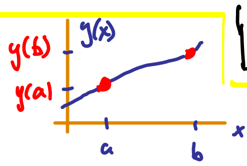
$\int dx\,(4)$: $\frac{dy}{dx} f(y(x)) = \frac{d}{dx} F(y(x)) \overset{\text{Hauptsatz}}{=}$ $= F(\;) - F(\;)$ (5)

$= F(\;) - F(\;)$ (6)

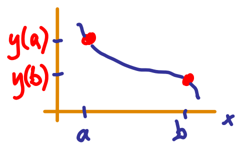
(6) = (2) $\boxed{\int_a^b dx\, \frac{dy}{dx} f(y(x)) \overset{(3)}{=} \int dy\, f(y)}$ (7)

C2h

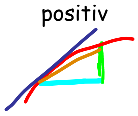
'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx\, \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \overset{(g7)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)$ [y(x) monoton zunehmend]



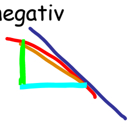
[y(x) monoton abnehmend]



Steigung positiv



Steigung negativ



Merkregeln:

Substitution: $y =$,

Integrationsmaß: $y = y(x) \simeq$

Eselsbrücke $\Longrightarrow \quad \simeq \quad \frac{dy(x)}{dx}$ (2)

Interationsgrenzen:

$x \mapsto y(x)$

$\mapsto$ (3)

$\mapsto$

Beispiel: $I = \int_4^5 dx\, \frac{x}{(1+x^2)^2}$ (4)

Substitution: $y(x) =$ (5)

Integrationsmaß: $\frac{dy}{dx} \overset{(5)}{=} \quad \Rightarrow \quad =$ (6)

Integrationsgrenzen:

$4 \mapsto y(4) \overset{(2)}{=}$ (7)

$5 \mapsto y(5) =$ (8)

$I = \int \frac{1}{(\;)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y}\Big|_{17}^{26} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{26} - \frac{1}{17}\right]$ (9)

(8)

(6)

(7)

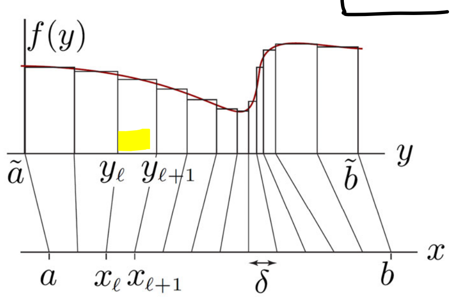
Variablen-Substitution (intuitive Diskussion)

C2i

Kacheln müssen nicht alle gleich groß sein!

$$f:[\tilde a,\tilde b]\longrightarrow\mathbb{R},\quad y\longmapsto f(y) \qquad (1)$$

$\{y_\ell\}$ seien Grenzpunkte v. 'ungleichbreiten' Kacheln.



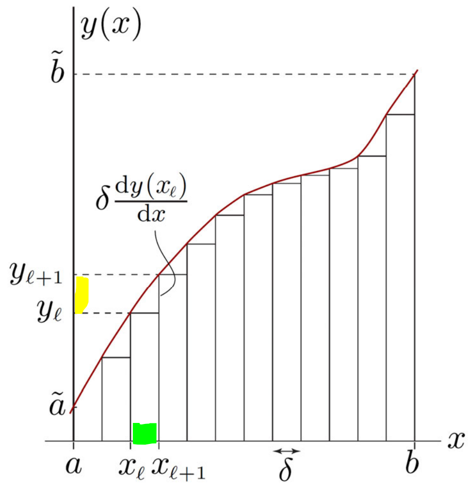
Verallgemeinerung der Riemann-Summe:

$$\int_{\tilde a}^{\tilde b} dy\, f(y) = \lim_{N\to\infty}\sum_\ell f(y_\ell)\underbrace{[y_{\ell+1}-y_\ell]}_{\text{Breite v. Kachel } \ell} \qquad (2)$$

Umformung in Riemann-Summe mit gleichbreiten Kacheln:

$$x_\ell \equiv \delta\cdot\ell \qquad (3)$$

$$\delta \equiv (b-a)/N \qquad (4)$$



Kachelbreiten seien bestimmt durch eine (frei gewählte) monoton steigende Funktion, y:

$$y:[a,b]\longrightarrow[\tilde a,\tilde b]=[y(a),y(b)]$$

$$x\longmapsto y(x) \quad \text{mit} \quad y_\ell = y(x_\ell) \qquad (5)$$

Variablen-Substitution in der Riemann-Summe:

C2j

$$\int_{y(a)=\tilde a}^{y(b)=\tilde b} dy\, f(y) \overset{(i.2)}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_\ell f(y_\ell)[y_{\ell+1}-y_\ell] \qquad (1)$$

$$\overset{(i.5)}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_\ell f(y(x_\ell))\left[\frac{y(x_{\ell+1})-y(x_\ell)}{\delta}\right]\cdot\delta \qquad (2)$$

(C1b.2) Mutter aller Ableitungen

$$\simeq \lim_{N\to\infty}\sum_\ell f(y(x_\ell))\,\frac{dy(x_\ell)}{dx}\cdot\delta \qquad (3)$$

$$= \int_a^b dx\, f(y(x))\,\frac{dy(x)}{dx} \qquad (4)$$

entstammt den ungleichen Kachelbreiten in Ausgangsformel (i.2), und beschreibt die Streckung/Stauchung der Kachelbreiten, die beim Übergang zu gleichbreiten Kacheln generiert wird.

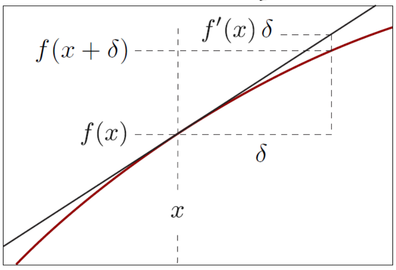
'Variablen-Substitution':

$$\boxed{\int_a^b dx\,\frac{dy(x)}{dx}\,f(y(x)) \overset{(4)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)} \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C1-C2

ZC1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen



Definition d. Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \qquad (1)$$

Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\delta) \simeq f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} \qquad (2)$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \qquad (3)$$

Kettenregel:

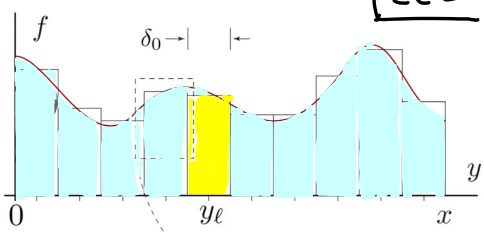
$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \qquad (4)$$

Ableitung d. Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}} \qquad (5)$$

C2 Integrale

ZC2



'Riemann-Summe'

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell=1}^{N(\delta)} X_\ell \qquad (1)$$

Fläche unter Kurve:

$$F(x) = \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell} f_\ell \equiv \int_0^x dy\, f(y) \qquad (2)$$

'Hauptsatz':

$$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (3)$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b dy\, f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b \qquad (4)$$

'Partielle Integration'

$$\int_a^b dx\, u(x)\, v'(x) = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x) \qquad (5)$$

'Variablen-Substitution':

$$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y), \quad dy = dx\, y'(x), \quad \begin{array}{l} x \mapsto y(x) \\ a \mapsto y(a) \\ b \mapsto y(b) \end{array} \qquad (6)$$