

Erläuterung der Seiten- und Gleichungsnummerierung:
 L: Teil "Lineare Algebra" in AD.
 L1: Kapitel L1, "Mathematics before Numbers", in AD
 a: erste Seite im handschriftlichen Skript zu Kapitel L1

Gleichungen die auf Seite L1a (Kapitel L1, Seite a) stehen, werden zitiert als
 (1), (2) falls die Zitate auf derselben Seite stehen;
 (a.1), (a.2) falls die Zitate auf anderen Seiten (z.B. b,c) desselben Kapitels L1 stehen;
 (L1a.1), (L1a.2) falls die Zitate auf Seiten anderer Kapitel (z.B. L2, C3) stehen.

L1a

L1 Mathematische Grundbegriffe

L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen: $A = \{x, +, \Delta\}$ $B = \{o, \square\}$

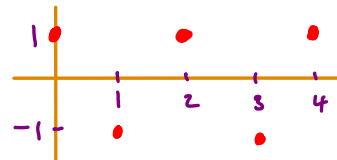
kartesisches Produkt: $A \times B = \{(,) \mid \text{ "ist Element von" } \} = \{(x, o), (x, \square), (+, o), (+, \square), (\Delta, o), (\Delta, \square)\}$ (1)

Abbildung:

Definitionsmenge $\xrightarrow{\text{Name der Abbildung}}$: $\xrightarrow{\text{Argument}}$ Zielmenge $\xrightarrow{\text{Zielelement}}$

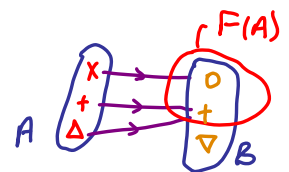
Diagramm (2): $A = \{x, +, \Delta\}$ $B = \{o, \square\}$
 $F(A) = B$

Beispiel: $F : \rightarrow$



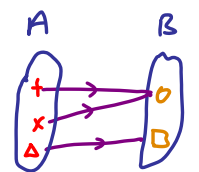
L1b

Bild v. A: $= \{a \in A\}$
 'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

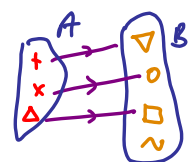


Eine Abbildung ist...

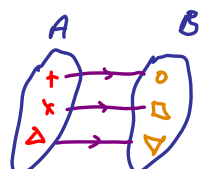
surjektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$
 'für alle' 'alle Elemente v. B werden erreicht'



injektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$
 'kein Element v. B wird mehr als einmal erreicht'



bijektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$
 (injektiv und surjektiv) '1-zu-1-Abbildung'



Verkettung / Komposition

Lic

$$F: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow C$$

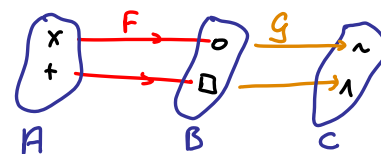
$$a \mapsto \quad b \mapsto$$

$$: A \rightarrow$$

$$a \mapsto$$

Beispiel: $A, B, C =$

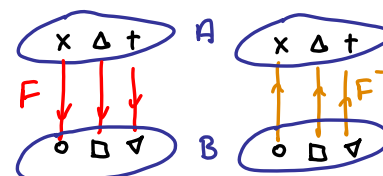
$$F(a) = \quad g(b) = \quad, \quad (g \circ F)(a) =$$



Inverse einer bijektiven Abbildung:

$$F: A \rightarrow B \quad F^{-1}: \rightarrow$$

$$a \mapsto \quad \mapsto$$

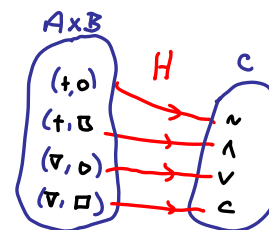


Binäre Verknüpfung:

Definitionsmenge ist ein
kartesisches Produkt:

$$H: \rightarrow$$

$$\mapsto$$

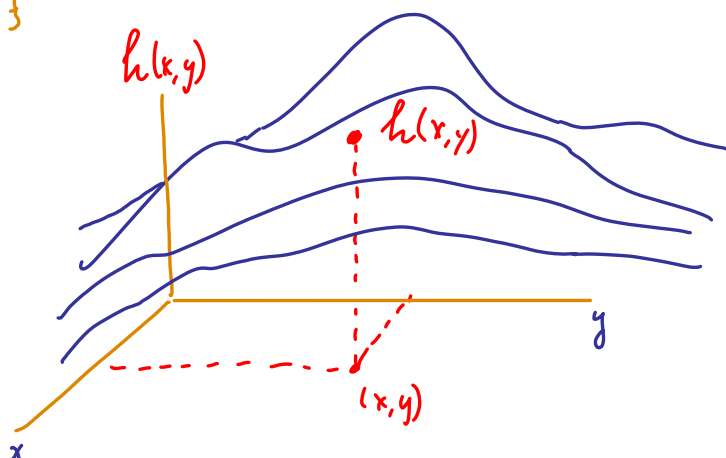


Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges

Lid

$$h: \{ \quad \} \rightarrow \{ \quad \}$$

$$\mapsto$$



L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

L1e

Definition: Eine 'Gruppe'
ist eine Menge A ausgestattet mit
einer binären Verknüpfung,

$$\bullet : \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \quad (1)$$

$$\left(\begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} , \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \right) \mapsto \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \quad (2)$$

und folgenden Eigenschaften ('Gruppenaxiome'):

i) Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in A, \quad (3)$

ii) Assoziativität: $a \bullet b \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \quad (4)$

iii) neutrales Element: $\exists e \in A, \text{ so dass } a \bullet e = a = e \bullet a, \forall a \in A \quad (5)$

iv) inverses Element: $\forall a \in A \exists a^{-1} \in A \text{ mit } a \bullet a^{-1} = e = a^{-1} \bullet a \quad (6)$

'links wird definiert durch rechts' (7)

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe'

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

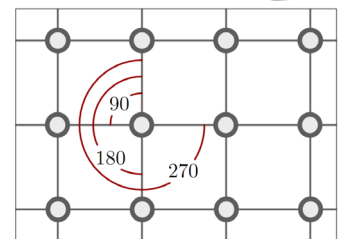
Beispiel 1: Rotationen eines Gitters um eine feste Achse um 0, 90, 180, 270 Grad

L1f

$$\tau(\phi) \equiv \text{Rotation um } \phi, \quad \tau(\phi + 360) = \tau(\phi) \quad (1)$$

$$\mathcal{R}_{90} \equiv \{ \tau(\phi) \mid \phi \in \{0, 90, 180, 270\} \} \quad (2)$$

'linke Seite ist Kurznotation für rechte Seite,
bzw. wird durch rechte Seite definiert'



Verknüpfung v. zwei Rotationen aus $\mathcal{C}$ sei die Rotation um die Summe der Winkel:

$$\bullet : \mathcal{R}_{90} \times \mathcal{R}_{90} \rightarrow \mathcal{R}_{90} \quad (3)$$

$$\text{z.B.: } (\tau(\phi), \tau(\phi')) \mapsto \tau(\phi) \bullet \tau(\phi') = \quad (4)$$

$$\tau(0) \bullet \tau(90) = \tau(\quad) \quad (5)$$

$$\tau(90) \bullet \tau(180) = \tau(\quad) \quad (6)$$

$$\tau(270) \bullet \tau(180) = \tau(\quad) \quad (7)$$

$(\quad, \quad)$ ist eine kommutative Gruppe.

Verknüpfungstabelle:

$\bullet$	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

(bestimmt Gruppe vollständig)

Neutrales element: $(\text{Inverse von } \tau(\phi)) =$

Beispiel 2: Addition ganzer Zahlen modulo q

L18

Definition: für $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $p \bmod q \equiv$ positiver Rest v. (p geteilt durch q) (1)

Beispiele: $5 \bmod 4 = 1$ $9 \bmod 4 = 1$ (2)

$7 \bmod 4 = 3$ $-3 \bmod 4 = 1$ (3)

Definition: $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ (4)

Verknüpfung v. zwei Elementen v. $\mathbb{Z}_q$ sei ihre Summe modulo q:

$\bullet: \rightarrow$ (5)

$(p, p') \mapsto p \bullet p' = (p + p') \bmod q$ (6)

z.B. für $q = 4$: $0 \bullet 1 = (0 + 1) \bmod 4 = 1$ (7)

$1 \bullet 2 = (1 + 2) \bmod 4 = 3$ (8)

$3 \bullet 2 = (3 + 2) \bmod 4 = 1$ (9)

$(\mathbb{Z}_q, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

Verknüpfungstabelle für $q = 4$:

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(bestimmt Gruppe vollständig)

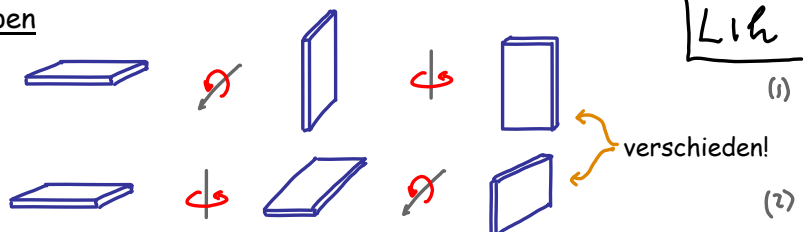
Ihre Verknüpfungstabelle hat dieselbe Struktur wie die von $(\mathbb{R}_{90}, \bullet)$

Folglich sind die beiden Gruppen 'isomorph': $(\mathbb{Z}_4, \bullet) \cong (\mathbb{R}_{90}, \bullet)$ [AD-Buch, S. 9-10]

Beispiele von nicht-kommutativen Gruppen

Rotationen in drei Dimensionen:

Rotationen um verschiedene Achsen sind nicht-kommutativ (Reihenfolge ist nicht egal):

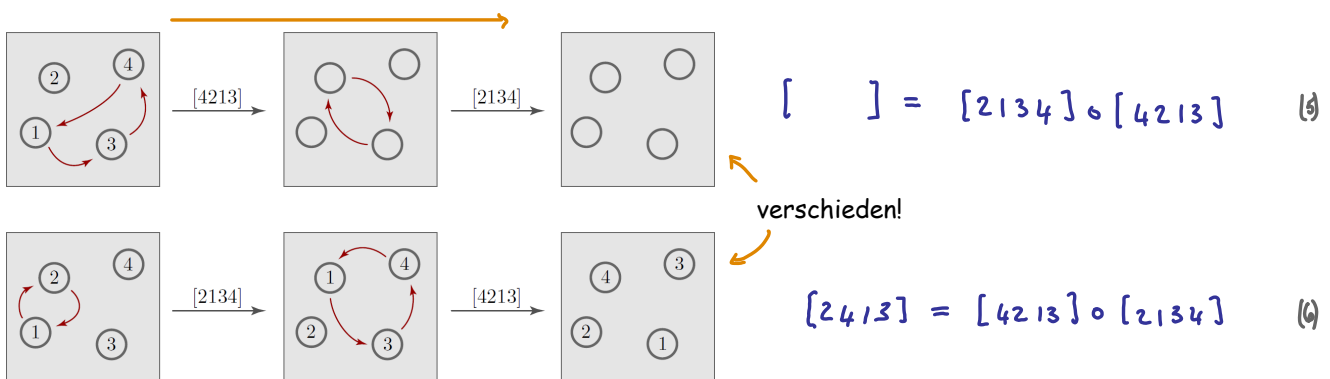


Permutationsgruppe z.B. von 4 unterscheidbaren (nummerierten) Objekten

Kurznotation:

Beispiel einer Permutation: 'Ersetze 1 durch 4, 2 durch 2, 3 durch 1, 4 durch 3': $[4213]$ (3)
(Die Ersetzungsregel bezieht sich nur auf die Nummern der Kugeln; sie gilt, egal wo die Kugeln liegen!)

Permutationen bilden eine Gruppe, mit Verknüpfungsregel: $P' \circ P =$ erst P, dann P' (4)



L1.3 Körper

L1i

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (, ,)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation) (1)

- Addition: $(A, +)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = 0. (2)

(additives Inverse v. a) = $-a$ Subtraktion: $a - b \equiv a + (-b)$ (3)

- Multiplikation: $(A, \cdot)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = 1. (4)

Multiplik. Inverse v. a = a^{-1} Division: $a/b \equiv a \cdot a^{-1}$ (5)

- Für das neutrale Element d. Addition, gilt: $0 \cdot a \equiv 0 \quad \forall a \in A$ (6)

Also hat 0 kein multiplikatives Inverse $\left[\text{sonst würde gelten: } 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \forall a \in A \right]$

- Distributivitätsaxiom: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (7)

$\mathbb{Z}$ (ausgestattet mit der üblichen Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen) ist kein Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$ (8)

Beispiele von Körpern:

L1j

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} \equiv \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \}$ (1)

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{ \text{alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können} \}$ (2)

z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1,4142\dots$

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,4 = \frac{14}{10} \in \mathbb{Q} \\ 1,41 = \frac{141}{100} \in \mathbb{Q} \\ 1,414 = \frac{1414}{1000} \in \mathbb{Q} \\ 1,4142 = \frac{14142}{10000} \in \mathbb{Q} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3)$$

$\mathbb{R} = \{ \text{alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren} \}$



Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$

Lik

Ausgangsfrage: was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$? x (1)

Lösungsansatz: erweitere unser Zahlensystem um eine neue Zahl, die 'imaginäre Einheit',

Definiere i als eine Zahl, deren Quadrat -1 liefert: $i^2 = -1$ (2a)

Dasselbe gilt für $-i$: $(-i)^2 = -1$ (2b)

i und $-i$ sind Wurzeln von -1. Notationskonvention: $\sqrt{-1} = i$ (3)

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$: $\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen: $\begin{cases} x \equiv \text{Re}(z) \\ y \equiv \text{Im}(z) \end{cases}$ (6)

'Realteil v. z' (7)

'Imaginärteil v. z' (7)

Def. v. Addition: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

Lik

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad (1)$$

Bsp: $(1 + 2i) + (2 - 3i) = 3 - i$

Def. v. Multiplikation: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$z z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \quad (2)$$

$$= (xx' - yy') + i(xy' + yx') \quad (3)$$

Bsp: $(1 + 2i)(2 - 3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i$

Neutrales Element der Addition: 0 Additives Inverse: $-z$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: 1 Falls $z \neq 0$, was ist das multiplikative Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)

Was sind $\text{Re}(z^{-1})$, $\text{Im}(z^{-1})$?

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x + iy$: $\bar{z} = x - iy$ Lin
(1)

dann:

$$z \bar{z} \stackrel{(1)}{=} (x + iy)(x - iy) \stackrel{(2.3)}{=} (x^2 + y^2) + i(\dots) = \dots \quad (2)$$

für $z \neq 0$:

$$(z) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} : z \cdot \bar{z} \stackrel{(2)}{=} \dots \quad (3)$$

Inverse: $z^{-1} \stackrel{(3)}{=} \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re}(z^{-1}) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im}(z^{-1}) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ (4)

Check: $z z^{-1} \stackrel{(4)}{=} (x + iy) \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \stackrel{(2)}{=} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$ ✓ (5)

Merkregel für Inverse:

'mache den Nenner reell'!

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (4) \quad (6)$$

Bsp: $z = 2 - 3i$, $z^{-1} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{1}{13}(2 + 3i)$ (7)

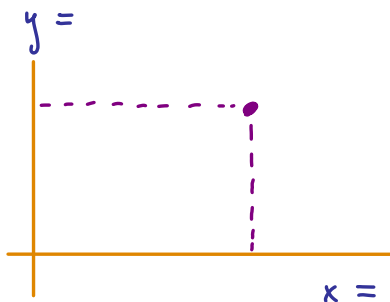
Komplexe Ebene:

Lin

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$$\mathbb{I} : \mathbb{C} \rightarrow \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \quad (1)$$

$$z \mapsto \dots = \text{Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene')} \quad (2)$$



Polardarstellung:

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$z = x + iy \quad (4)$$

$$= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \quad (5)$$

Reelle Achse: $z = \dots$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $z = \dots$ 'rein imaginär'

Zusammenfassung: L1

L1

Gruppe: $G = (A, \cdot)$ Verknüpfung: $\cdot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

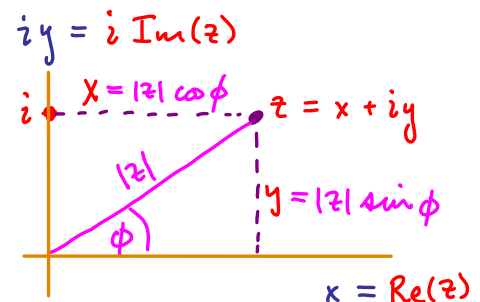
Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 $i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

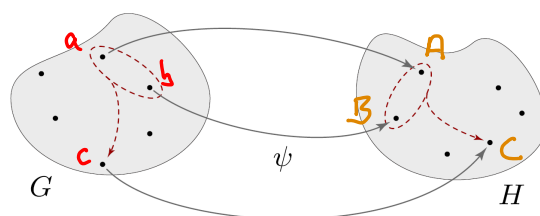
$$z^* = \bar{z} = x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$



Optional: Homomorphismus

$(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$
 $a \cdot b = c$ $A \circ B = C$

seien zwei Gruppen mit a priori unabhängigen Verknüpfungsregeln.



Def: Eine Abbildung $\psi : \rightarrow$, $\mapsto$

(1)

ist ein 'Homomorphismus', falls $\psi(\quad) = \psi(\quad) \psi(\quad) \quad \forall a, b \in G$
 'bewahrt die Form' verknüpfen, dann abbilden = abbilden, dann verknüpfen

(2)

Beispiel: $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, \circ) = (2\mathbb{Z}, +)$
 Addition ganzer Zahlen Addition gerader Zahlen

(3)

Die Abbildung $\psi : G \rightarrow H, n \mapsto \psi(n) = 2n$ ist ein Homomorphismus,

(4)

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ ist gleich $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m = 2m + 2n$
 verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

(5)

Die Abbildung $\phi : G \rightarrow H, n \mapsto \phi(n) = 2n^2$ ist kein Homomorphismus,

(6)

denn $\phi(n+m) = 2(n+m)^2$ ist nicht gleich $\phi(n) + \phi(m) = 2n^2 + 2m^2 = 2n^2 + 2m^2$
 verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

(7)

Optional: Isomorphismus

Lip

Def: Eine Abbildung $\psi: G \rightarrow H, a \mapsto \psi(a)$

(1)

heisst ein 'Isomorphismus' zwischen den Gruppen G und H ist,
falls sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Wir schreiben dann:

$$G \cong H$$

(2)

Isomorphe Gruppen sind praktisch 'identisch'.

$$(R_{90}, \bullet) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$$

Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die ihre Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben 'dieselbe' Verknüpfungstabelle, alle Eigenschaften der einen Gruppe gelten auch für die andere).

$\bullet$	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik !

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)