

Trigonometrische Funktionen

Folgende Seiten sind ein Auszug aus dem Mathe-Crash-Kurs 2013, gehalten von Jan von Delft
Links zu allen Folien und Videos dieser Veranstaltung:
Moodle-Seite der R-Vorlesung -> Info -> Mathevorkurs (ganz unten!)

schwarz: wird für TO als Grundwissen (aus der Schule bekannt) vorausgesetzt

braun: wird in TO- Vorlesung und/oder Übungen behandelt

Mathe-Crash-Kurs Vorlesung 2

- S. 13 Definition von sinus, cosinus anhand vom Einheitskreis
- S. 14-15 Definition der sinus- und cosinus-Funktionen
- S. 16 Tangens
- S. 17 Umkehrfunktionen: arcsin, arccos, arctan [Blatt 01]
- S. 18 Additionstheoreme [Blatt 07, Blatt 09]
- S. 19 Spezielle Winkel

Mathe-Crash-Kurs Vorlesung 3

- S. 8 Definition der Ableitung [Vorlesung 02, AD-Buch, Kapitel C1]
- S. 23 Ableitung von sinus und cosinus (geometrisch begründet) [AD-Buch, Seite 211]

Mathe-Crash-Kurs Vorlesung 4

- S. 1-2 Ableitung tangens, cotangens [Blatt 01]
- S. 3 Ableitung arctan [Blatt 01]
- S. 4 Definition sinh, cosh, tanh [Blatt 01]
- S. 5-6 Ableitung von sinh, cosh, tanh [Blatt 01]

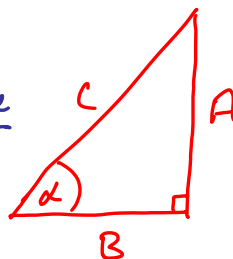
Mathe-Crash-Kurs Vorlesung 2

1. k. 4 Trigonometrische Funktionen

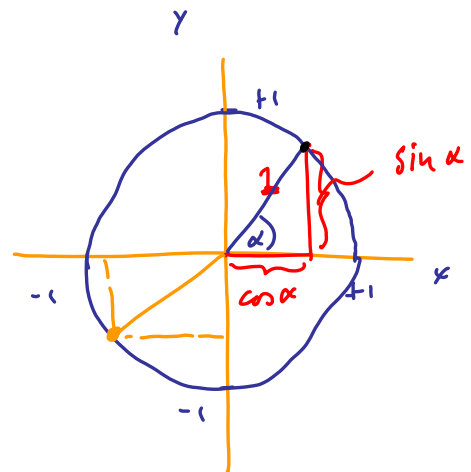
(13)

In rechtwinkligem Dreieck:

$$\sin \alpha \equiv \frac{A}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



$$\cos \alpha \equiv \frac{B}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



Pythagoras: $A^2 + B^2 = c^2 \Rightarrow$

$$\frac{A^2}{c^2} + \frac{B^2}{c^2} = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(14)

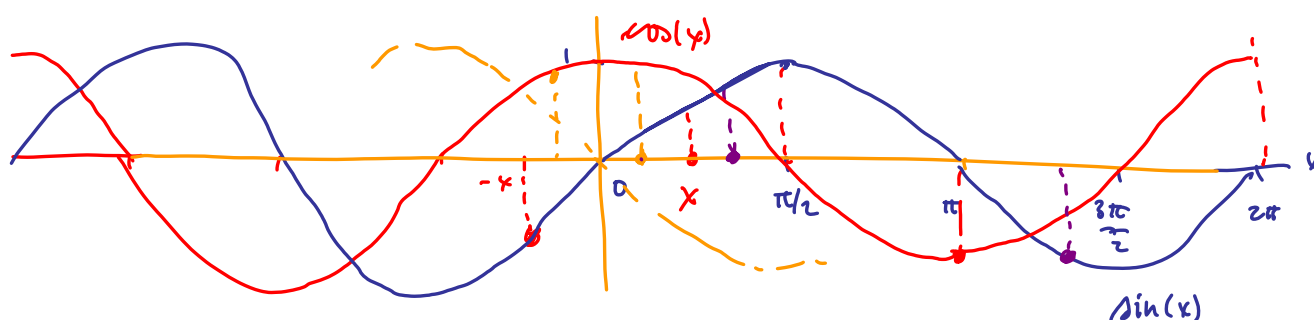
Def: Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin x, \text{ mit } \sin(x) = \sin(x + n2\pi)$$

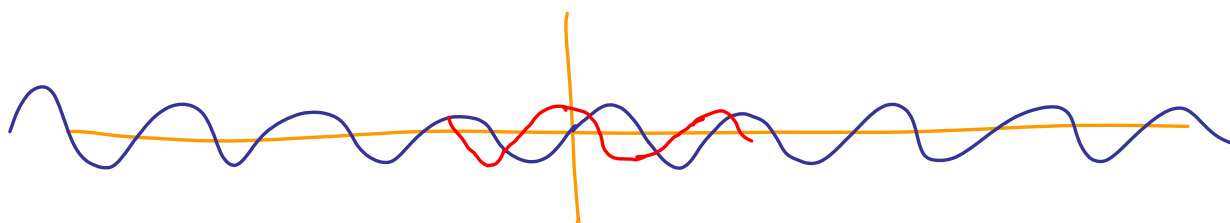
Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$
 $n \in \mathbb{Z}$
 "periodische Fortsetzung"

$$x \mapsto \cos x, \text{ mit } \cos(x) = \cos(x + n2\pi)$$

$$360^\circ = 2\pi$$



(15)



$\sin$ & $\cos$ sind periodische Fktn, mit Periode 2π .

Allg: "periodische Fkt" hat Periode L falls: $f(x+L) = f(x)$

 $\forall x$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

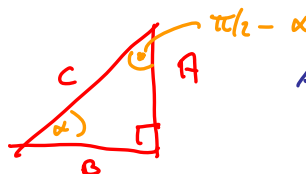
("punktsymmetrisch zum Ursprung")

$$\cos(-x) = \cos x$$

("achsensymmetrisch zur y-Achse")

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x = \frac{B}{L}$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x = \frac{A}{L}$$

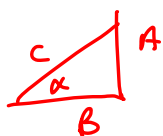


$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

(16)

Tangens: $\tan \alpha = \frac{A}{B} = \frac{(A/c)}{(B/c)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

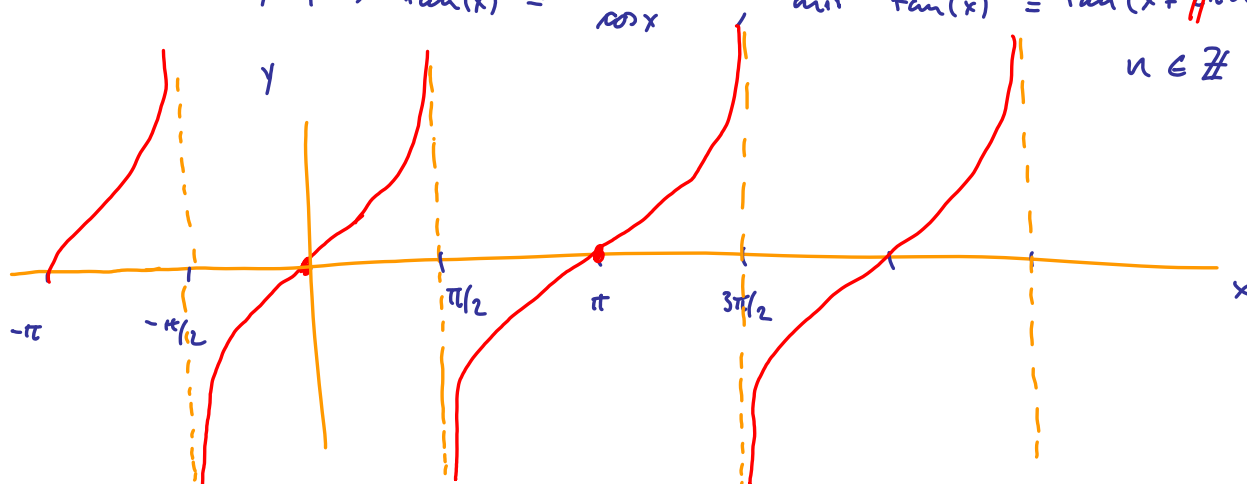


$$\pi/2 + m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Cosinus}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{mit } \tan(x) = \tan(x + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

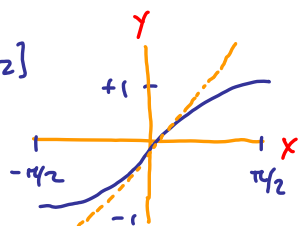


Umkehrfunktionen v. Trig. Funktionen:

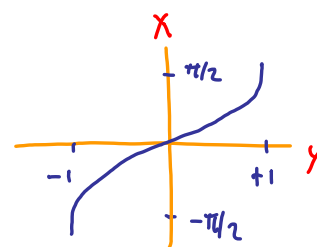
(17)

Sin, Cos, Tan, sind im gesamten Def-Bereich nicht umkehrbar, wohl aber in Teilbereichen, wo sie monoton sind.

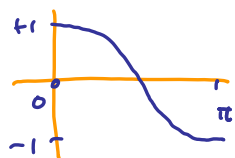
Sin in $[-\pi/2, \pi/2]$



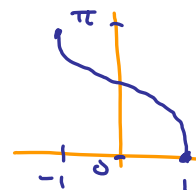
arsin "Arcsinus"



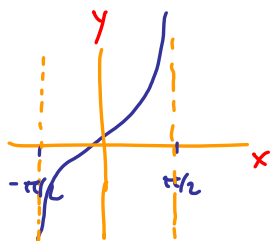
cos in $[0, \pi]$



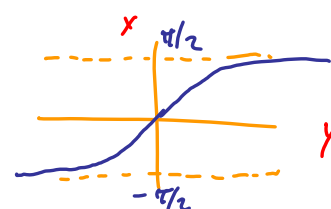
arccos "Arcosinus"



tan in $(-\pi/2, \pi/2)$



arctan "Arctangens"



$$\arcsin[\sin(x)] = x$$

Bsp:

$$x = \pi/2, \sin x = 1$$

(18)

$$\arccos[\cos(x)] = x$$

$$\arcsin 1 = \pi/2 \quad \checkmark$$

Additionstheoreme:

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \sin B$$

Beweis: TO - Vorlesung

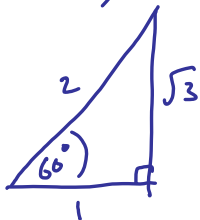
Spezielle Winkel: $\alpha = 45^\circ, \alpha = \pi/4$

(19)



$$\Rightarrow \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\alpha = 60^\circ, \alpha = \pi/2 \cdot 2/3 = \pi/3$



$$\sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \pi/3) = \sin x \cos \pi/3 + \sin \pi/3 \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$f(x)$ ist bei x_0 "differenzierbar" falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

$\equiv$ "Ableitung v. f .
bei x_0 "

Notationen:

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d_x f(x)|_{x_0}$$

"f - Strich" "df nach dx" "d nach dx von f(x)" "d-x von f"

bei x_0 bei x_0

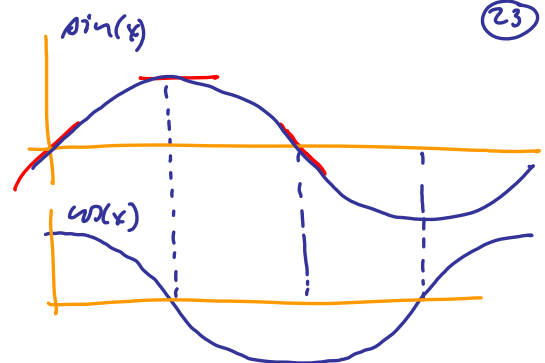
$f'(x_0)$ gibt Steigung an von der Tangente an den Graph f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Satz: Jede differenzierbare Fkt. ist stetig.

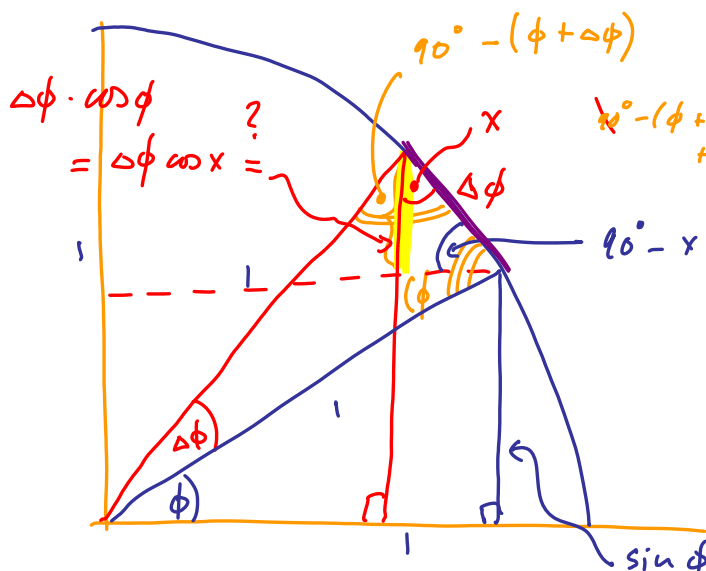
Trigonometrische Funktionen:

$$u(x) = \sin(x), \quad u'(x) = \cos x$$

$$v(x) = \cos(x), \quad v'(x) = -\sin x$$



23



$$90^\circ - (\phi + \Delta\phi) = 90^\circ - \phi - \Delta\phi = 90^\circ - \phi - \Delta\phi$$

$$2\phi = 2\phi - \Delta\phi$$

$$x = \phi - \Delta\phi/2$$

$$\sin' \phi = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin \phi}{\Delta\phi}$$

$$= \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi \cos \phi + \sin \phi - \sin \phi}{\Delta\phi}$$

$$= \cos \phi$$

Ableitung spezieller Funktionen (Fortsetzung):

$$u(x) = \sin(x), \quad w'(x) = \cos(x) \quad (1)$$

$$v(x) = \cos(x), \quad v'(x) = -\sin(x) \quad (2)$$

Bsp. 1

$$t(x) = \tan(x) \quad t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \text{"secans"}$$

Quotientenregel

$$t'(x) = \frac{\cos \cdot \sin' - \sin \cos'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos \cdot \cos - \sin(-\sin)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (3)$$

Bsp. 2

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{"cotangens"}, \quad \frac{1}{\sin(x)} = \operatorname{cosec}(x) \quad (1)$$

$$\cot'(x) = \frac{\sin(-\sin) - \cos(\cos)}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2} = -\operatorname{cosec}^2(x) \quad (2)$$

Bsp. 3

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

Beweisidee: Ausgangspunkt: $\frac{d}{dx} \arctan(\tan(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \quad (4)$

Kettenregel: $\arctan'(\tan(x)) \cdot \tan'(x) = 1$

$$\underbrace{\arctan'(\tan(x))}_{(4.3)} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (5)$$

(3). $\cos^2 x$: $\arctan'(\tan(x)) = \cos^2 x \quad (6)$

Substitution (führe neue Variable ein): $\tan(x) = y \quad (7)$

Nebenrechnung:

$$y = \tan(x)$$

(1)

$$y^2 = \tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1 - \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + y^2 \quad (3)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + y^2} \quad (4)$$

$$(2.6): \quad \arctan'(y) = (\cos^2(x))^{(y)} = \frac{1}{1 + y^2} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

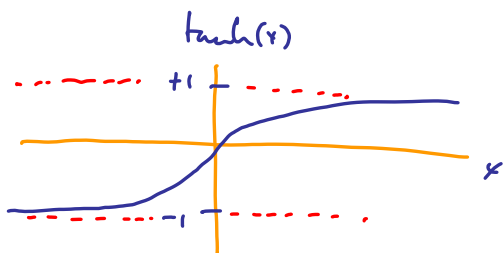
Endergebnis: $\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$

Bsp- 3:

$$f(x) = \tanh(x) \equiv$$

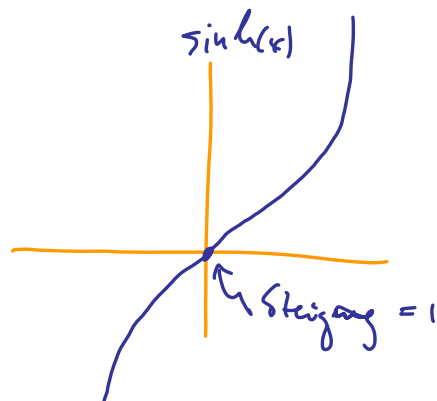
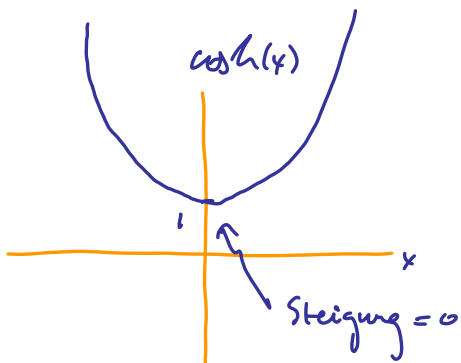
"tangensthyperbolicus"

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (1)$$



$$\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2)$$

$$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3)$$



$$\begin{aligned} \sinh'(x) &\stackrel{(4.2)}{=} \frac{1}{2} (e^x - e^{-x} \cdot (-1)) \stackrel{(4.3)}{=} \cosh(x) & (1) \quad (5) \\ &\text{(KR)} \\ \cosh'(x) &\stackrel{(4.3)}{=} \frac{1}{2} (e^x + e^{-x} \cdot (-1)) \stackrel{(4.2)}{=} \sinh(x) & (2) \end{aligned}$$

sehr analog!

$$\begin{aligned} \text{Vergleiche:} \quad \sinh'(x) &= \cosh(x) & (3) \\ \cosh'(x) &= -\sinh(x) & (4) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Grund:} \quad \begin{aligned} \sin(x) &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) & (5) \\ \cos(x) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) & (6) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{1}{i} \sinh(ix) \\ \cos(x) &= \cosh(ix) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh \cdot \cosh - \sinh \cdot \sinh}{\cosh^2} & (1) \quad (6) \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \equiv \operatorname{sech}^2(x) & (2) \quad \frac{1}{\cosh(x)} \equiv \operatorname{sech}(x) & (3) \\ & & & \text{"secans hyperbolicus"} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} \left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\cancel{e^{2x}} + \underbrace{2 \cdot e^x \cdot e^{-x}}_{=1} + \cancel{e^{-2x}}) - (\cancel{e^{2x}} - \underbrace{2 \cdot e^x \cdot e^{-x}}_{=1} + \cancel{e^{-2x}}) \right] \\ &= \frac{1}{4} [2 + 2] = 1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) & (4) \end{aligned}$$

(4) ist analogon zu $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$ (5)

