Zusatztutorium PPH
Integration

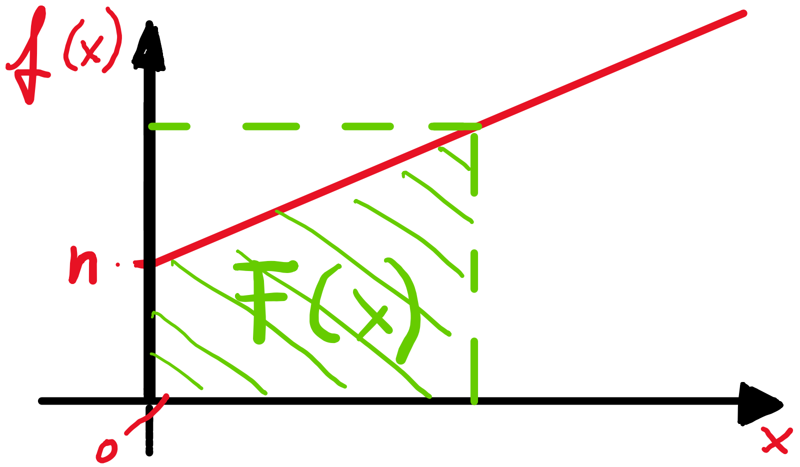
Integration - Allgemein

- Alle Darstellungen und Erklärungen in diesem Zusatztutorium sind vereinfacht, sodass ein besseres Verständnis für die PPh-Veranstaltung vermittelt werden kann

- Während die Ableitung allgemein als der Anstieg einer Funktion f(x) an der Stelle x verstanden werden kann, so kann die Integration als der Flächeninhalt F(x) bzw. die Fläche unter der Funktion f(x) verstanden werden
  - ➢ Um die Integration zu kennzeichnen, nutzt man die Bezeichnung der Funktion f(x) in Großbuchstaben F(x)

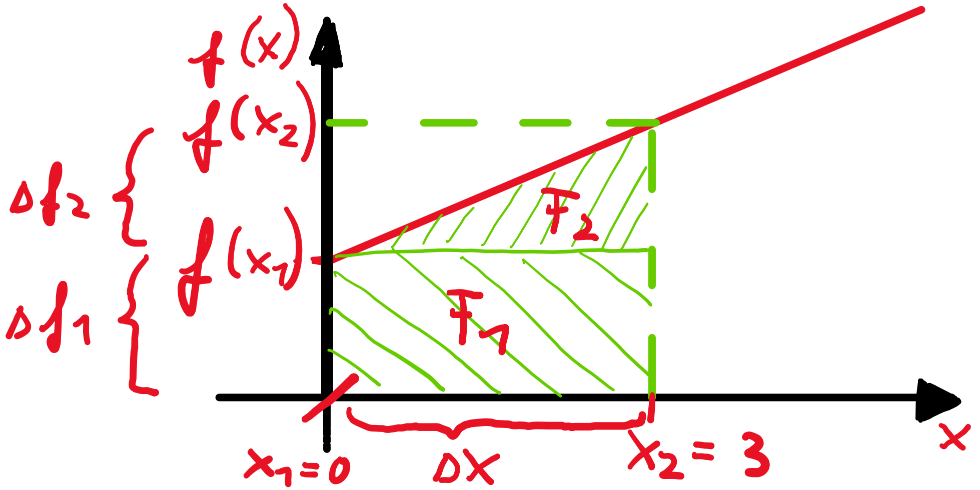
- Das einfachste Beispiel für die Integration bzw. den Flächeninhalt ist wieder die Gerade mit der Form

$$f(x) = m \cdot x + n$$



Integration - Gerade

- Als konkretes Beispiel soll die Gerade f(x) = 5x+3 betrachtet werden
- Der Flächeninhalt unter der Geraden lässt sich per Hand berechnen, indem man die Flächen des eingezeichneten Rechtecks sowie des Dreiecks berechnet und diese zusammen addiert:



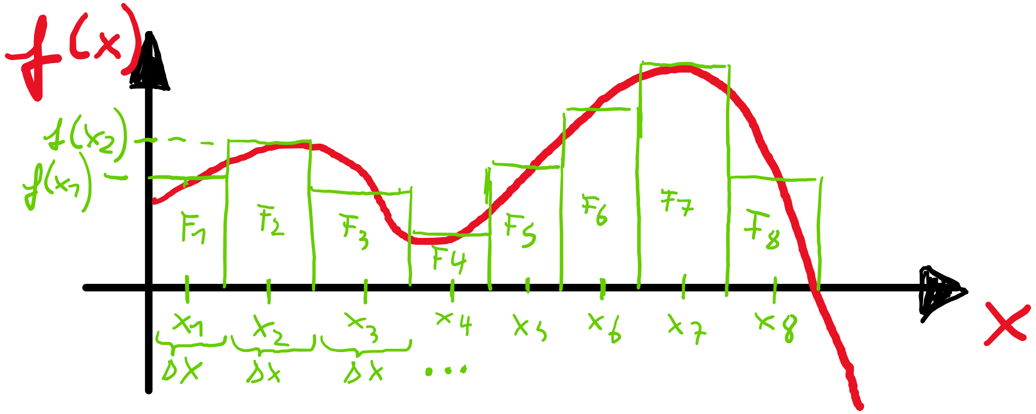
$$F = F_1 + F_2 = \Delta f_1 \cdot \Delta x + \frac{\Delta f_2 \cdot \Delta x}{2}$$

$$= f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$= 3 \cdot 3 + \frac{18 - 3}{2} \cdot 3 = \underline{\underline{37{,}5}}$$

Integration – Komplexe Funktionen

- Während die Berechnung der Fläche per Hand bei einer Geraden noch schnell machbar ist und vor allem genau, gestaltet sich dies bei komplexeren Funktion als deutlich schwieriger/ungenauer
  - ➢ Um den Flächeninhalt unter komplexeren Funktionen zu bestimmen, muss dieser mittels vieler kleiner Flächenelemente angenähert werden, welche dem Verlauf der Funktion besser folgen. Im einfachsten Fall sind dies Rechtecke mit gleicher Breite:



  - ➢ Der Flächeninhalt ist dann die Summe der Flächen in allen Rechtecken

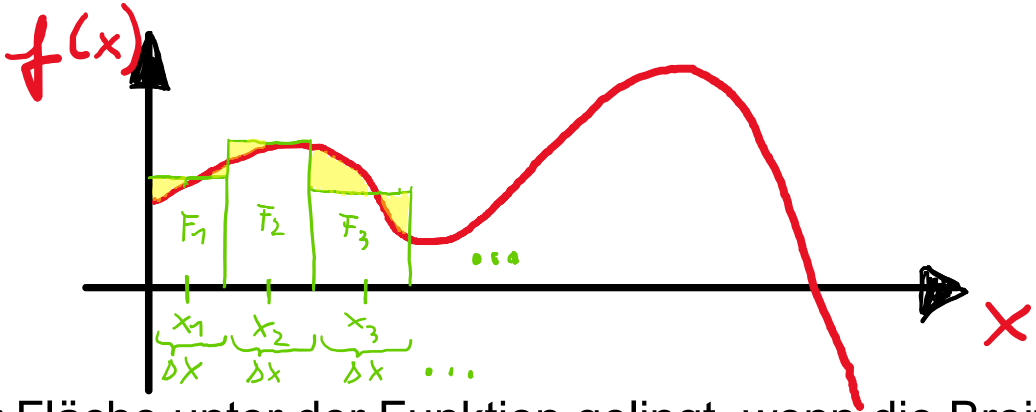
$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots = \sum^{x} F_x$$

  - ➢ Oder konkreter ausgedrückt mit der Höhe f(x) und der Breite der Rechtecke:

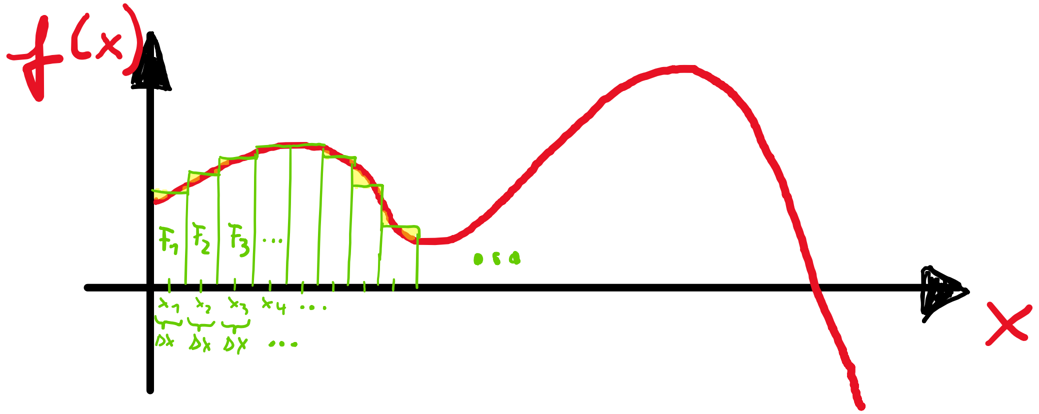
$$F = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x \ldots = \sum^{x} f(x)\cdot\Delta x$$

Integration – Komplexe Funktionen

- Hierbei lassen sich gut die Schwierigkeiten der händischen Methode erkennen
  - Eine Vielzahl von Flächenelementen muss per Hand berechnet werden, um dem Verlauf der Funktion hinreichend gut zu folgen
  - Da die Flächenelemente/Rechtecke eine endliche Breite Δx besitzen, entstehen Fehler für die Annäherung der Fläche unter der Funktion, da die Ecken der Rechtecke über die Funktion hinausragen oder deutlich darunter liegen



- Eine genauere Berechnung der Fläche unter der Funktion gelingt, wenn die Breite Δx kleiner gewählt wird, was allerdings auch die Anzahl der zu berechnenden Flächenelemente erhöht:



Integration - Analytisch

- Um nun die beste Genauigkeit für die Berechnung der Fläche zu erreichen, muss die Intervallbreite Δx der Flächenelemente infinitesimal/unendlich klein gewählt werden, da auch nur so die Fehler der überstehenden Ecken unendlich klein werden
  - Mathematisch gesehen wird dadurch, analog zur Ableitung, aus dem endlichen Intervall Δx das unendlich kleine Intervall dx

$$\Delta x \rightarrow dx$$

  - Aus der Beschreibung der Fläche mittels der Summe der einzelnen Flächenelemente wird das Integral

$$F(x) = \sum^{x} f(x) \cdot \Delta x \rightarrow F(x) = \int_{x} f(x) \cdot dx$$

  - Die Integralfunktion ist also vereinfacht gesehen nichts anderes als die Summe über unendlich kleine Flächenelemente!

- Da der Rechenaufwand per Hand dadurch aber auch unendlich groß wird, geht man dazu über, die Flächen analytisch mittels Integration zu bestimmen, wofür es eine Vielzahl an Regeln zu beachten gilt

Integration - Regeln

- Das erste Beispiel ist wie immer die Gerade f(x) = mx+n
- Die Integration bzw. die Stammfunktion F(x) sieht dann wie folgt aus:

$$F(x) = \int_x f(x)\,dx = \int_x (m x^{(1)} + n)\,dx = \overset{\#1}{m}\, \frac{x^{\overset{\#2}{1+1}}}{\underset{\#3}{1+1}} + n \overset{\#4}{x} + \overset{\#5}{C} = m\frac{x^2}{2} + nx + c$$

- ➢ #1: Konstanten vor der Laufvariablen, nach welcher integriert wird, bleiben unverändert stehen
- ➢ #2: Der Exponent der Laufvariablen wird um 1 erhöht
- ➢ #3: Der neue Exponent wird unter die Laufvariable geschrieben (Division). Tipp zur Selbstkontrolle: Die neue Laufvariable ableiten. Dann muss sich zusammen mit dem darunter geschriebenen Exponenten die ursprüngliche Laufvariable ergeben!

$$\frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{Abl.}} \frac{2x}{2} = x \;\checkmark \qquad\qquad 2x^2 \xrightarrow{\text{Abl.}} 4x \neq x \;\times$$

- ➢ #4: Einzeln stehende Konstanten oder Laufvariablen, nach denen nicht integriert wird, bekommen beim Integrieren die Laufvariable dahinter geschrieben
- ➢ #5: Beim Integrieren wird immer eine neue Konstante c eingefügt (nie vergessen!)

- Zur Selbstkontrolle bietet es sich immer an, die Ableitung der gebildeten Stammfunktion zu bilden, was üblicherweise einfacher gelingt, als die Integration und daher weniger fehleranfällig ist
  - ➢ Stimmt die Ableitung mit der ursprünglichen Funktion überein, stimmt höchstwahrscheinlich auch die Integration!

Integration - Bewegungsgleichung

- Die Wichtigkeit der hinzugefügten Konstante lässt sich gut anhand der allgemeinen Bewegungsgleichung zeigen
- Die bei der Integration hinzugefügten Konstanten entsprechen hier den Startwerten der jeweiligen Größe, d.h. Startgeschwindigkeit und Startweg

Beschleunigung: $f(t) = a$

Geschwindigkeit: $v(t) = F(t) = \int a \cdot dt = a \cdot t + c$

$= a \cdot t + v_0$

Weg: $s(t) = V(t) = \int v(t) \cdot dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c$

$= \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

Integration – Sinus/Cosinus

- Für die Integration von Sinus/Cosinus ergibt sich analog zur Ableitung folgende Reihenfolge
  - ➢ Hierbei wird die hinzuzufügende Konstante zur Einfachheit nur bei der ersten Integration hinzugeschrieben und für die weiteren vernachlässigt (da dies der Normalfall im Rahmen der PPh ist). Streng genommen muss sie aber auch bei den weiteren Integrationen mit einberechnet werden!

Ableitung

$$y(x) = \sin(x)$$
$$y'(x) = \cos(x)$$
$$y''(x) = -\sin(x) = Y'(x)$$
$$y'''(x) = -\cos(x) + C = Y(x)$$
$$y^{IV}(x) = \sin(x)$$

Integration

Integration – Natürlicher Logarithmus

- Ein Sonderfall tritt ein, wenn eine Laufvariable mit Exponent -1 integriert werden soll
- Hierbei würde sich nach der bisherigen Regel der neue Exponent zu 0 ergeben und die Laufvariable somit eine 1 ergeben und verschwinden
  - ➢ Die Umkehroperation, also die Ableitung von 1, ergibt aber eine Null und nicht die ursprüngliche Laufvariable mit Exponent -1

$$f(x) = x^{-1} \qquad F(x) = \int x^{-1}\,dx = x^{0} + C = 1 + C$$

$$1 + C \xrightarrow{\text{Abl.}} 0 \neq x^{-1}$$

  - ➢ Um diese Inkonsistenz zu lösen, muss der natürliche Logarithmus eingeführt werden
  - ➢ Dieser ist immer dann zu verwenden, wenn eine Laufvariable mit Exponenten -1 integriert werden soll:

$$f(x) = x^{-1} \qquad F(x) = \int x^{-1}\,dx = \ln(x) + C$$

  - ➢ Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist dann entsprechend

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Integration - Beispiele

- Weitere Beispiele:

$f(x) = n$ $\qquad F(x) = nx + c$

$f(x) = nx + c$ $\qquad F(x) = \frac{nx^2}{2} + cx + c_2$

$f(x) = \frac{nx^2}{2} + cx + c_2$ $\qquad F(x) = \frac{nx^3}{6} + \frac{cx^2}{2} + c_2 x + c_3$

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow$ $f(x) = \sqrt{x} \left(= x^{\frac{1}{2}}\right)$ $\qquad F(x) = 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

$f(x) = ax^{-4} + bx^{-1}$ $\qquad F(x) = -\frac{ax^{-3}}{3} + c_1 + b \cdot \ln(x) + c_2$

$= -\frac{ax^{-3}}{3} + b \cdot \ln(x) + c$

mit $c_1 + c_2 = c$

Integration – Partielle Integration

- Das äquivalent zur partiellen Ableitung ist die partielle Integration
- Besteht die zu integrierende Funktion f(x) aus zwei Teilfunktionen g(x) und h(x):

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{h(x)}$$

- Dann kann dies zur Vereinfachung wieder mit u und v statt den Ausdrücken g(x) und h(x) geschrieben werden
- Darüber hinaus wird eine weitere Vereinfachung getroffen und behauptet, eine der Teilfunktionen liegt als Ableitung vor

$$f(x) = u \cdot v' = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

  - Die Behauptung, dass eine Teilfunktion als Ableitung vorliegt, ändert rein gar nichts an der eigentlichen Funktion. Es ist lediglich eine Art Namensgebung – das entscheidende hierbei ist allerdings die korrekte Behandlung der Teilfunktion entsprechend ihrer Benennung, siehe hierzu die nächste Folie

- Die partielle Integration gibt dann folgendes Rezept zur Berechnung der Stammfunktion von f(x) vor:

$$F(x) = \int \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'} \, dx$$

$$\boxed{F(x) = \int u v' \, dx = u \cdot v - \int u' v \, dx}$$

Integration – Partielle Integration

- Da hierbei schnell komplizierte Ausdrücke auftreten können, hilft es, die partielle Integration stur als Rezept abzuarbeiten und alles sauber aufzuschreiben, entsprechend den nachfolgenden Schritten:

$$F(x) = \int \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}\, dx = u \cdot v - \int u' v \, dx$$

  - #1: Funktionen u und v‘ festlegen

$$u = 2x \qquad v' = \cos(x)$$

  - #2: Ableitung von u bilden, Integration von v‘ bilden
    (Im Allgemeinen wird die Konstante c hier ausnahmsweise ***NICHT*** berücksichtigt)

$$u' = 2 \qquad v = \sin(x)$$

  - #3: In die Formel zur partiellen Integration einsetzen

$$F(x) = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\, dx$$

  - #4: Integral lösen und zusammenfassen

$$F(x) = 2x \cdot \sin x - \left(-2\cos(x) + c\right)$$

$$= 2x \cdot \sin x + 2\cos(x) + c_2 \qquad \text{mit } c_2 = -c$$

Integration - Partielle Integration

- Der erste Schritt, die geschickte Auswahl der Funktionen u und v‘, ist der wichtigste Schritt von allen
- Die Wahl sollte immer so erfolgen, dass die Funktion u durch die Ableitung einfacher wird, d.h. z.B. die Potenz der Laufvariablen sollte sich verringern
  - Hintergrund ist, dass im Integral im rechten Teil der partiellen Integration am Ende möglichst nur eine Funktion mit der Laufvariablen stehen sollte
  - Ist dem nicht so, steht im Integral wieder eine Funktion, die aus zwei Teilfunktionen mit der Laufvariablen besteht, wodurch dieses Integral ebenfalls als partielle Integration berechnet werden muss

  - Was bei einer ungünstigen Wahl von u und v‘ beim vorherigen Beispiel passiert, zeigt die folgende Berechnung, die statt einem Ergebnis nur eine noch kompliziertere Formel ergibt:

$$F(x) = \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u}\, dx = u \cdot v - \int u' v\, dx$$

#1: $u = \cos(x) \qquad v' = 2x$

#2: $u' = -\sin(x) \qquad v = x^2$

#3: $F(x) = \cos(x) \cdot x^2 - \int \underbrace{-\sin(x) \cdot x^2}_{\text{Partielle Integration:}}\, dx$

Partielle Integration: $u = -\sin(x) \qquad v' = x^2$

$u' = -\cos(x) \qquad \ldots$

Integration - Partielle Integration

- Auch bei geschickter Wahl von u und v‘ kann es vorkommen, dass die partielle Integration mehrfach durchgeführt werden muss
- Das wichtigste ist hier wie vorher schon vermerkt: ***Der Ausdruck im rechten Integral sollte durch die partielle Integration einfacher werden***, d.h. z.B. geringere Potenzen der Laufvariablen, weniger Laufvariablen usw.
- Ein Beispiel, bei dem eine zweifache partielle Integration durchgeführt werden muss, lautet wie folgt:

$$F(x) = \int 2x^2 \cdot \cos(x)\,dx = u \cdot v - \int u' v\,dx$$

#1: $u = 2x^2$ $\quad v' = \cos(x)$

#2: $u' = 4x$ $\quad v = \sin(x)$

#3: $F(x) = 2x^2 \cdot \sin(x) - \int 4x \cdot \sin(x)\,dx$

1 Potenz weniger ✓

#1: $u = 4x$ $\quad v' = \sin(x)$

#2: $u' = 4$ $\quad v = -\cos(x)$

#3: $F(x) = \int 4x \cdot \sin(x)\,dx = -4x\cos(x) - \int -4 \cdot \cos(x)\,dx$

$= -4x\cos(x) + 4\sin(x) + c$

x ganz weg ✓

$$= 2x^2 \cdot \sin(x) - \left(-4x \cdot \cos(x) + 4\sin(x) + c\right) = 2x^2 \sin(x) + 4x\cos(x) - 4\sin(x) + c_2$$

Integration - Exponentialfunktion

- Weiteres Beispiel der partiellen Integration mit einer Exponentialfunktion
- Hierbei gilt wie bei der Ableitung: Die Exponentialfunktion bleibt unverändert

$$f(x) = \underbrace{3x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'}$$

#1: $u = 3x \qquad v' = e^x$

#2: $u' = 3 \qquad v = e^x$

#3: $F(x) = \underbrace{3x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{3}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} \, dx$

$$= 3xe^x - 3e^x + C$$

Integration - Substitution

- Das Äquivalent zur Kettenregel bei der Ableitung im Rahmen der Integration geht deutlich über die nötigen Kenntnisse in der PPh-Veranstaltung hinaus und soll hier nur kurz beispielhaft gezeigt werden
- Die Integration von verschachtelten Funktionen f(x) = h(g(x)) gestaltet sich als sehr aufwändig, wenn nicht sogar analytisch unmöglich in einigen Fällen
  - ➢ Um dies zu umgehen, bietet es sich an, die Verschachtelung mittels einer Substitution zu vereinfachen, wie im folgenden Beispiel:

$f(x) = \sin(2x) \rightarrow h(\ ) = \sin(\ ) \quad g(x) = 2x$

$F(x) = \int \sin(2x)\,dx$

Substitution: $\sin(x)$ lässt sich einfach integrieren, $\sin(2x)$ nicht

$\rightarrow 2x = \ell$

$\sin(2x) = \sin(\ell)$

$= \int \sin(\ell) \cdot dx \rightarrow dx = ???\ \rightarrow$

$2x = \ell \quad |$ Ableiten

$\frac{d(2x)}{dx} = \frac{d\ell}{dx}$

$2 = \frac{d\ell}{dx} \rightarrow dx = \frac{d\ell}{2}$

$= \int \sin(\ell) \cdot \frac{1}{2}\,d\ell$

$F(\ell) = -\frac{1}{2}\cos(\ell) + C$

➢ Zu beachten ist hierbei, dass sich die Laufvariable ebenfalls geändert hat!

Integration – Flächeninhalt und Flächenbilanz

- Der Sinn der Integration ist, wie anfangs schon beschrieben, die Berechnung der Fläche unter einer Funktion f(x)
- Mit den gebildeten Integralen/den Stammfunktionen F(x) kann dies bequem durchgeführt werden, insofern das Intervall Δx bekannt ist

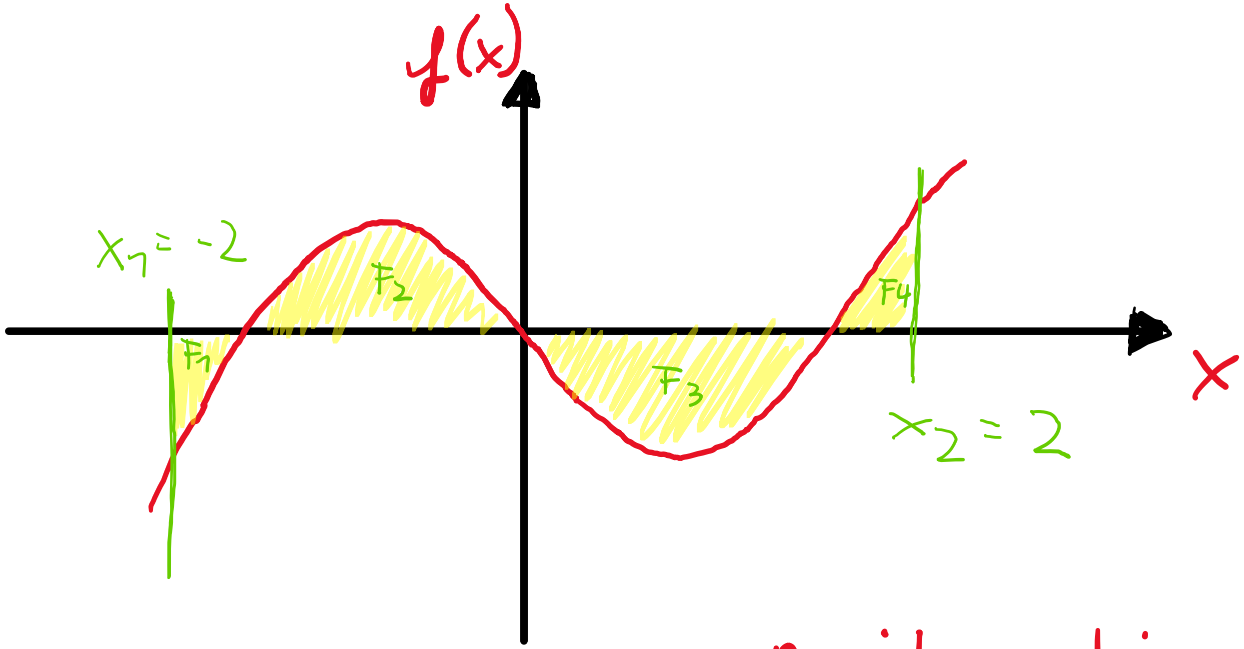
- Hierbei unterscheidet man zwei Fälle: Die Flächenbilanz und den Flächeninhalt
  - ➢ Die Flächenbilanz ist die Summe der Fläche unter der Funktion, einschließlich der Vorzeichen dieser Flächen
    - ➢ Es kann also durchaus sein, dass bei der Berechnung des Integrals eine 0 als Ergebnis entsteht (daher auch der Ausdruck Bilanz, negative Flächen werden gegen die positiven Flächen bilanziert)

  - ➢ Der Flächeninhalt ist die Summe der Beträge der Flächen unter der Funktion und somit immer größer 0 für Funktionen verschieden von 0

Integration - Flächenbilanz

- Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht die Anwendung der Integration für die Berechnung der Flächenbilanz sowie des Flächeninhalts

- $f(x) = x^3 - 2x$
- Intervall:
  $x_1 = -2$
  $x_2 = 2$
- ges.: Flächenbilanz
  Flächeninhalt



- lös.: $f(x) = x^3 - 2x$
  $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + c$

Flächenbilanz im Bereich x_1 bis x_2:

$$FB = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \underbrace{\frac{16}{4} - 4 + c}_{x_2 = 2} - \Big(\underbrace{\frac{16}{4} - 4 + c}_{x_1 = -2}\Big) = \underline{\underline{0}}$$

- Die Flächenbilanz ist 0, da die Funktion punktsymmetrisch ist und das Intervall symmetrisch zum Ursprung

Integration - Flächeninhalt

- Um den Flächeninhalt unter der Funktion zu bestimmen, benötigt es einen Zwischenschritt
- Es müssen alle Nullstellen der Funktion f(x) bestimmt werden, sodass der Flächeninhalt der Teilflächen F1, F2, F3 und F4 zuerst separat für jeden Abschnitt zwischen den Nullstellen berechnet werden kann, und anschließend die Summe aus den Beträgen gebildet werden kann

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$$

#1: Nullstellen von $f(x)$:

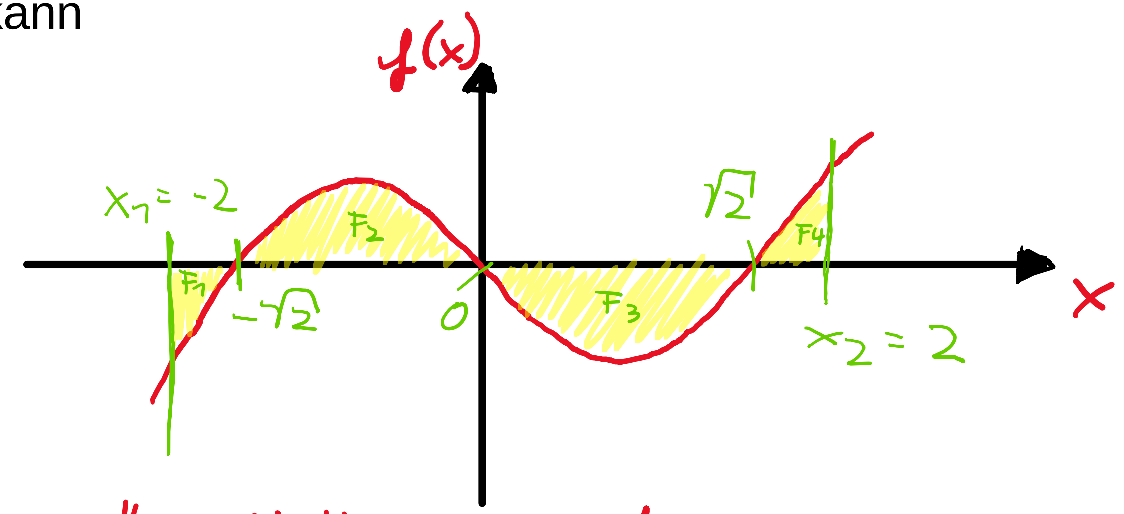
$$0 = x^3 - 2x$$
$$= x(\underbrace{x^2 - 2})$$

$x_{0/1} = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x_{0/2} = -\sqrt{2}$

$x_{0/3} = \sqrt{2}$



Flächeninhalt zw. x_1 und x_2:

$$FI = |F_1| + |F_2| + |F_3| + |F_4|$$

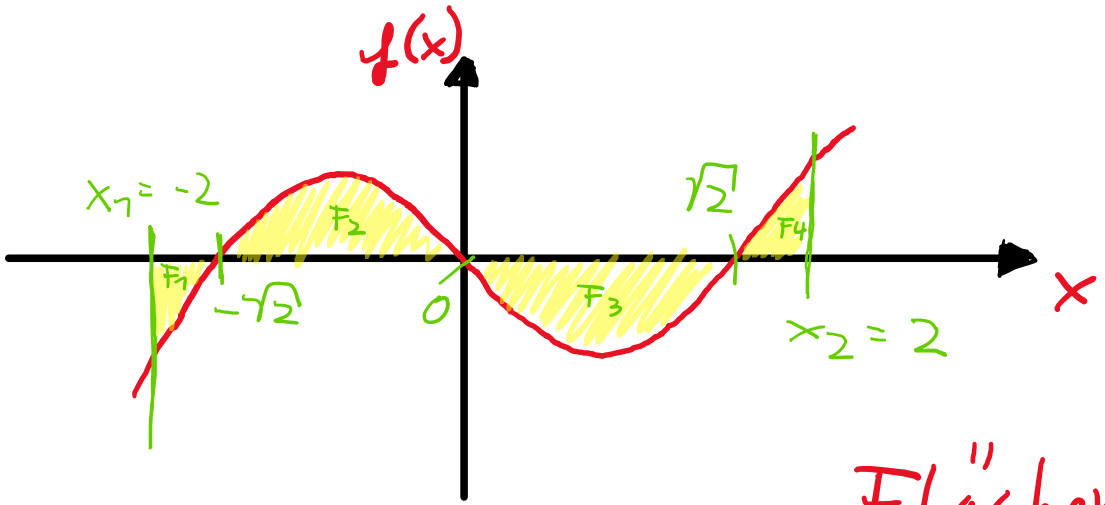
Als Beispiel: $F_1 = F(x)\Big|_{-2}^{-\sqrt{2}} = \frac{x^4}{4} - x^2 + C\Big|_{-2}^{-\sqrt{2}}$

$$= \underbrace{\frac{4}{4} - 2 + C}_{-\sqrt{2}} - \Big(\underbrace{\frac{16}{4} - 4 + C}_{-2}\Big) = -1$$

$$FI = |-1| + |1| + |-1| + |1| = \underline{\underline{4}}$$

Integration - Flächeninhalt

- Merke: Die Integration im strengen Sinne gibt nur die Flächenbilanz an, d.h. die Summe aller Flächen unter der Funktion f(x), inklusive deren Vorzeichen
- Der Flächeninhalt dagegen ist die Summe der Beträge der Flächen unter der Funktion f(x)



Flächenbilanz:

$$FB = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\left(= F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right)$$

Flächeninhalt:

$$FI = \left|F(x)\right|_{x_1}^{x_2} = |F_1| + |F_2| + |F_3| + |F_4|$$