Erläuterung der Seiten- und Gleichungsnummerierung:
L: Teil "Lineare Algebra" in AD.
L1: Kapitel L1, "Mathematics before Numbers", in AD
a: erste Seite im handschriftlichen Skript zu Kapitel L1

Gleichungen die auf Seite L1a (Kapitel L1, Seite a) stehen, werden zitiert als
(1), (2) falls die Zitate auf derselben Seite stehen;
(a.1), (a.2) falls die Zitate auf anderen Seiten (z.B. b,c) desselben Kapitels L1 stehen;
(L1a.1), (L1a.2) falls die Zitate auf Seiten anderer Kapitel (z.B. L2, C3) stehen.



# L1 Mathematische Grundbegriffe

## L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen: $A = \{ \times \;\; + \;\; \Delta \}$ $\quad B = \{ \circ \;\; \square \}$

kartesisches Produkt:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A , b \in B \} = \left\{ \begin{array}{cc} (\times, \circ) & (\times, \square) \\ (+, \circ) & (+, \square) \\ (\Delta, \circ) & (\Delta, \square) \end{array} \right\} \quad (1)$$

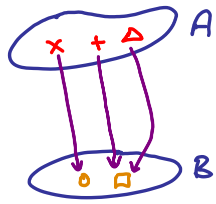
"ist Element von"

Abbildung:

Definitionsmenge $\qquad$ Zielmenge

Name der Abbildung $\quad F : A \longrightarrow B$

Argument $\quad a \longmapsto F(a) \quad$ Zielelement




$F(A) = B$ $\quad (2)$



Beispiel: $\quad F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{1, -1\}$

$$n \longmapsto F(n) = (-1)^n$$

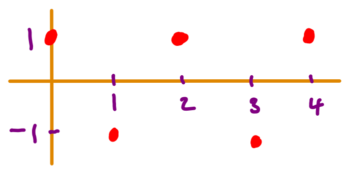
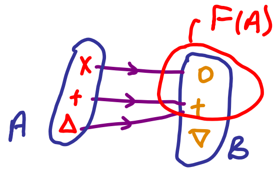



Bild v. A: $\quad F(A) = \{ F(a) \mid a \in A \} \subseteq B$

'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

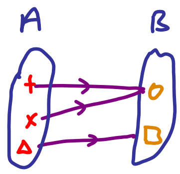



Eine Abbildung ist...

surjektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $\quad b = F(a)$ für mindestens ein $a \in A$

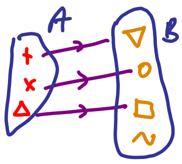
'für alle'

'alle Elemente v. B werden erreicht'



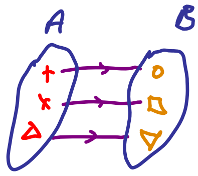

injektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $\quad b = F(a)$ für höchstens ein $a \in A$

'kein Element v. B wird mehr als einmal erreicht'




bijektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $\quad b = F(a)$ für genau ein $a \in A$

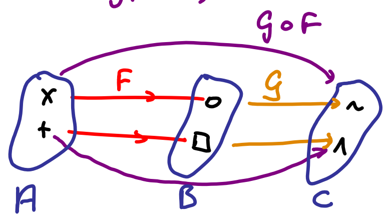
(injektiv und surjektiv) $\qquad$ '1-zu-1-Abbildung'



## Verkettung / Komposition

L1c

$$F: A \to B, \quad a \mapsto F(a) \qquad g: B \to C, \quad b \mapsto g(b) \qquad g \circ F: A \to C, \quad a \mapsto g(F(a))$$

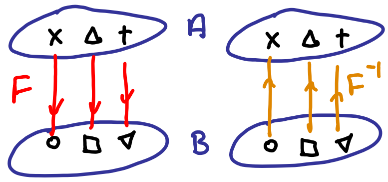



Beispiel: $A, B, C = \mathbb{Z}$

$$F(a) = a+1 \qquad g(b) = 2b, \qquad (g \circ F)(a) = 2(a+1)$$

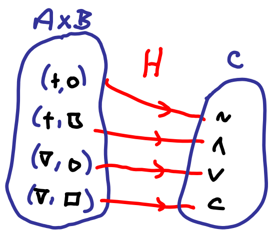
Inverse einer bijektiven Abbildung:

$$F: A \to B, \quad a \mapsto F(a) \qquad F^{-1}: B \to A, \quad F(a) \mapsto F^{-1}(F(a)) = a$$




Binäre Verknüpfung:
Definitionsmenge ist ein kartesisches Produkt:

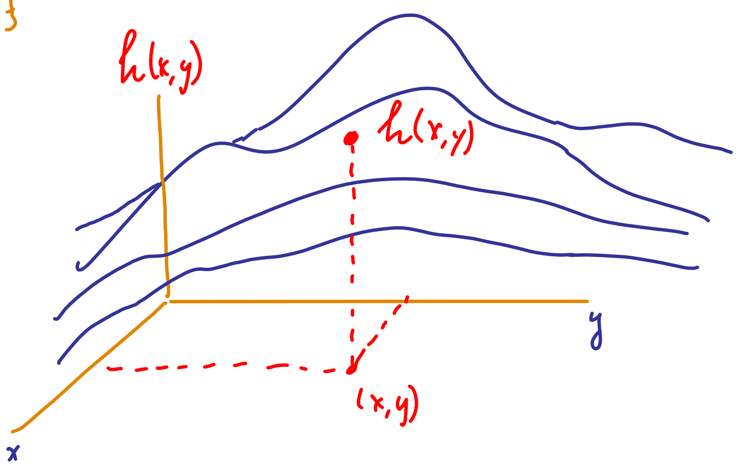
$$H: A \times B \to C, \quad (a,b) \mapsto c = H(a,b)$$




## Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges

L1d

$$h: \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto h(x,y)$$



## L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

Definition: Eine 'Gruppe' $G = (A, \bullet)$
ist eine Menge A ausgestattet mit
einer binären Verknüpfung,

kartesisches Produkt

$$\bullet : A \times A \longrightarrow A \qquad (1)$$

$$(a, b) \longmapsto a \bullet b \qquad (2)$$

und folgenden Eigenschaften ('Gruppenaxiome'):

'für alle'

i) Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in A, \quad a \bullet b \in A$ (3)

ii) Assoziativität: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (4)

'es existiert'

iii) neutrales Element: $\exists e \in A,$ so dass $a \bullet e = e \bullet a = a, \quad \forall a \in A$ (5)

iv) inverses Element: $\forall a \in A \;\exists\; b \in A$ mit $a \bullet b = e = b \bullet a$ (6)

$a^{-1} \equiv b$

links wird definiert durch rechts.

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe' (7)

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

---

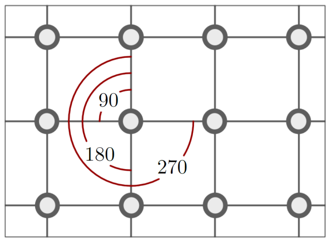


## Beispiel 1: Rotationen eines Gitters um eine feste Achse um 0, 90, 180, 270 Grad

$r(\phi) \equiv$ Rotation um $\phi$, $\quad r(\phi + 360) = r(\phi)$ (1)

$R_{90} \equiv \{ r(\phi) \mid \phi \in \{0, 90, 180, 270\} \}$ (2)

'linke Seite ist Kurznotation für rechte Seite,
bzw. wird durch rechte Seite definiert'




Verknüpfung v. zwei Rotationen aus C sei die Rotation um die Summe der Winkel:

$$\bullet : R_{90} \times R_{90} \longrightarrow R_{90} \qquad (3)$$

z.B.: $(r(\phi), r(\phi')) \longmapsto r(\phi) \bullet r(\phi') \equiv r(\phi + \phi')$ (4)

$$r(0) \bullet r(90) = r(90) \qquad (5)$$

$$r(90) \bullet r(180) = r(270) \qquad (6)$$

$$r(270) \bullet r(180) = r(90) = r(450) = r(360+90) \qquad (7)$$

Verknüpfungstabelle:

| • | 0 | 90 | 180 | 270 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 90 | 180 | 270 |
| 90 | 90 | 180 | 270 | 0 |
| 180 | 180 | 270 | 0 | 90 |
| 270 | 270 | 0 | 90 | 180 |

(bestimmt Gruppe vollständig)

$(R_{90}, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

Neutrales element: $r(0)$

(Inverse von $r(\phi)$) $= r(360 - \phi)$

## Beispiel 2: Addition ganzer Zahlen modulo q

L1g

Definition: für $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $p \bmod q$ $\equiv$ positiver Rest v. (p geteilt durch q) (1)

Beispiele: $5 \bmod 4 = 1$ $\qquad$ $9 \bmod 4 = 1$ (2)

$7 \bmod 4 = 3$ $\qquad$ $-3 \bmod 4 = (-4+1) \bmod 4 = 1$ (3)

Definition: $\mathbb{Z}_q \equiv \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ (4)

Verknüpfung v. zwei Elementen v. $\mathbb{Z}_q$ sei ihre Summe modulo q:

$$\bullet : \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q \qquad (5)$$

$$(p, p') \mapsto p \bullet p' = (p+p') \bmod q \qquad (6)$$

z.B. für q = 4:

$0 \bullet 1 = (0+1) \bmod 4 = 1$ (7)

$1 \bullet 2 = (1+2) \bmod 4 = 3$ (8)

$3 \bullet 2 = (3+2) \bmod 4 = 1$ (9)

Verknüpfungstabelle für q = 4:

| $\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

(bestimmt Gruppe vollständig)

$(\mathbb{Z}_q, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe. (10)

Ihre Verknüpungstabelle hat dieselbe Struktur wie die von $(R_{90}, \bullet)$

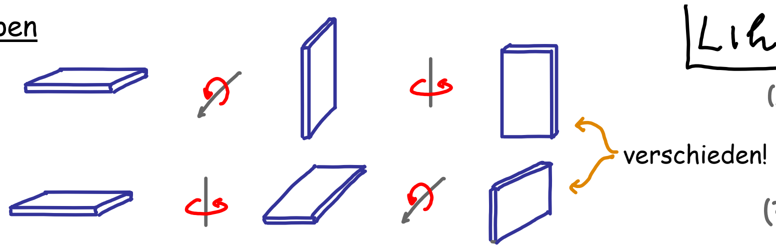
Folglich sind die beiden Gruppen 'isomorph': $(\mathbb{Z}_q, \bullet) \cong (R_{90}, \bullet)$ [AD-Buch, S. 9-10]

## Beispiele von nicht-kommutativen Gruppen

L1h

### Rotationen in drei Dimensionen: (1)

Rotationen um verschiedene Achsen sind nicht-kommutativ (Reihenfolge ist nicht egal): (2)




### Permutationsgruppe

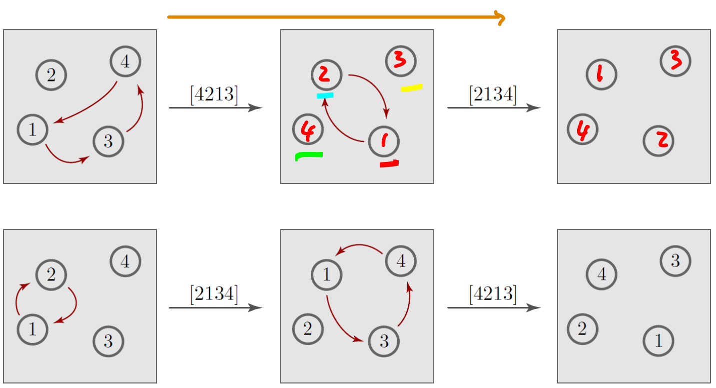
z.B. von 4 unterscheidbaren (nummerierten) Objekten

Kurznotation:

Beispiel einer Permutation: 'Ersetze 1 durch 4, 2 durch 2, 3 durch 1, 4 durch 3 ': [4213]

(Die Ersetzungsregel bezieht sich nur auf die Nummern der Kugeln; sie gilt, egal wo die Kugeln liegen!) (3)

Permutationen bilden eine Gruppe, mit Verknüpfungsregel: $P'' = P' \circ P$ = erst P, dann P' (4)




$[4123] = [2134] \circ [4213]$ (5)

verschieden!

$[2413] = [4213] \circ [2134]$ (6)

## L1.3 Körper

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation) (1)

- Addition: $(A, +)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = $0$. (2)

  (additives Inverse v. $a$) $= -a$ Subtraktion: $a - b \equiv a + (-b)$ (3)

- Multiplikation: $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = $1$. (4)

  Multiplik. Inverse v. $a = a^{-1}$ Division: $a/b \equiv a \cdot b^{-1}$ (5)

- Für das neutrale Element d. Addition, $0$ gilt: $0 \cdot a \equiv 0 \quad \forall a \in A$ (6)

  Also hat $0$ kein multiplikatives Inverse $\frac{1}{0}$ [sonst würde gelten: $\underbrace{0^{-1} \cdot 0}_{1} \cdot a = \underbrace{0^{-1} \cdot 0}_{1}$
  $\Rightarrow a = 1 \quad \forall a \in A$]

- Distributivitätsaxiom: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (7)

$\mathbb{Z}$ (ausgestattet mit der üblichen Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen)
ist <u>kein</u> Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$ (8)

---



Beispiele von Körpern:

<u>Rationale Zahlen:</u> $\mathbb{Q} \equiv \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z},\ p \neq 0 \}$ (1)

<u>Reelle Zahlen:</u> $\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können $\}$ (2)

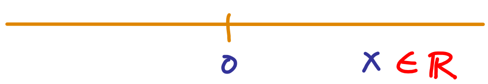
z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (3)

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1{,}4 = \frac{14}{10} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}41 = \frac{141}{100} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}414 = \frac{1414}{1000} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}4142 = \frac{14142}{10000} & \in \mathbb{Q} \\ \vdots & \end{array} \right.$$

(4)

$\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren $\}$



L1k

**Komplexe Zahlen:** $\mathbb{C}$

Ausgangsfrage: was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ ? $x \in \mathbb{R}$ (1)

Lösungsansatz: erweitere unser Zahlensystem um eine neue Zahl, die 'imaginäre Einheit', $i$ .

Definiere $i$ als eine Zahl, deren Quadrat -1 liefert: $\boxed{i^2 \equiv -1}$ (2a)

Dasselbe gilt für $-i$ : $(-i)^2 = -1$ (2b)

$\pm i$ sind Wurzeln von -1. Notationskonvention: $i \equiv \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$ (3)

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$ : $\sqrt{-r} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{r} = i\sqrt{r}$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} \equiv \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen:

$x \equiv \mathrm{Re}(z) =$ 'Realteil v. z' (6)

$y \equiv \mathrm{Im}(z) =$ 'Imaginärteil v. z' (7)

L1l

**Def. v. Addition:** (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') \overset{!}{\equiv} (x + x') + i(y+y') \qquad (1)$$

Bsp: $(1+2i) + (2-3i) = 3 + i(-1) = 3 - i$

**Def. v. Multiplikation:** (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$zz' = (x+iy)(x'+iy') \equiv (xx' + xiy' + iyx' + \underbrace{i^2}_{\overset{(k.2)}{=}-1} yy') \qquad (2)$$

$$= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \qquad (3)$$

Bsp: $(1+2i)(2-3i) = (2-(-6)) + i(-3+4) = 8 + i$

Neutrales Element der Addition: $0$ Additives Inverse: $-z = -x - iy$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: $1$

Falls $z \neq 0$, was ist das multiplikatives Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)

Was sind Re( $z^{-1}$ ), Im( $z^{-1}$ ) ?

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x+iy$: $\quad z^* = \bar{z} \equiv x - iy$ (1)

dann:

$$z\bar{z} \overset{(1)}{=} (x+iy)(x-iy) \overset{(\ell.3)}{=} (x\cdot x - y(-y)) + i(x(-y) + y\cdot x) = \overbrace{x^2+y^2}^{\geq 0} \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$$(2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}: \quad z\cdot\underbrace{\bar{z}\,\frac{1}{x^2+y^2}}_{\equiv z^{-1}} \overset{(2)}{=} 1 \qquad (3)$$

Inverse: $\quad z^{-1} \overset{(3)}{\equiv} \dfrac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}, \quad Re(z^{-1}) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad Im(z^{-1}) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ (4)

Check: $\quad z z^{-1} \overset{(4)}{=} (x+iy)\dfrac{x-iy}{x^2+y^2} \overset{(2)}{=} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad ✓$ (5)

Merkregel für Inverse:
'mache den Nenner reell' ! $\quad z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{x^2+y^2} \overset{✓}{=} (4)$ (6)

Bsp: $\quad z = 2-3i, \quad z^{-1} = \dfrac{1}{2-3i}\,\dfrac{2+3i}{2+3i} = \dfrac{2+3i}{4+9} = \dfrac{1}{13}(2+3i)$ (7)



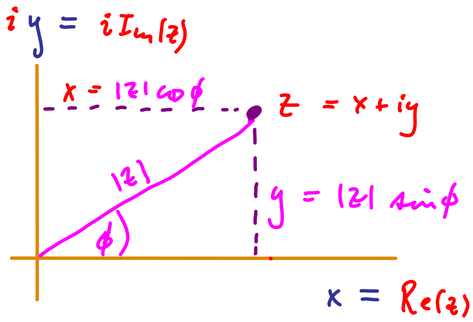
Komplexe Ebene:

$z = x+iy$

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$$I: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \qquad (1)$$

$z \mapsto (x,y) =$ Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene') (2)




Reelle Achse: $\quad z = x \quad$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $\quad z = iy \quad$ 'rein imaginär'

Polardarstellung:

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (3)$$

$$z = x + iy \qquad (4)$$

$$= |z|(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (5)$$

## Zusammenfassung: L1

ZL1

**Gruppe:** $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ Verknüpfung: $\bullet : A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \longmapsto a \bullet b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

---

Körper: $\mathbb{F} = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \ \mathbb{R}, \ \mathbb{C}$

---

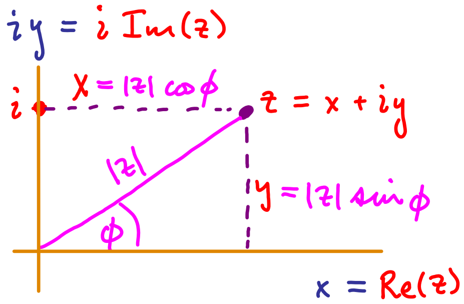
**Komplexe Zahlen:** $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, \qquad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$




---

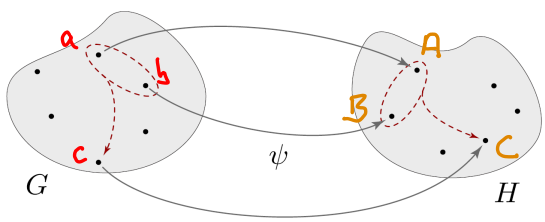
## Optional: Homomorphismus

L10

$(\mathcal{G}, \bullet)$ und $(H, \bullet)$

$a \cdot b = c$ $\quad A \bullet B = C$

seien zwei Gruppen mit *a priori* unabhängigen Verknüpfungsregeln.




Def: Eine Abbildung $\psi : \quad \longrightarrow \quad , \quad \longmapsto$ (1)

ist ein 'Homomorphismus', falls $\psi(\quad) = \psi(\quad)\ \psi(\quad) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}$ (2)

'bewahrt die Form' verknüpfen, dann abbilden = abbilden, dann verknüpfen

Beispiel: $(\mathcal{G}, \bullet) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, \bullet) = (2\mathbb{Z}, +)$ (3)

Addition ganzer Zahlen Addition gerader Zahlen

Die Abbildung $\psi : \mathcal{G} \to H, \quad n \mapsto \psi(n) = 2n$ ist ein Homomorphismus, (4)

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ ist gleich $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m = 2m + 2n$ (5)

verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

Die Abbildung $\phi : \mathcal{G} \to H, \quad n \mapsto \phi(n) = 2n^2$ ist <u>kein</u> Homomorphismus, (6)

denn $\phi(n+m) = 2(n+m)^2$ ist <u>nicht</u> gleich $\phi(n) + \phi(m) = 2n^2 + 2m^2 = 2n^2 + 2m^2$ (7)

verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

L1p

## Optional: Isomorphismus

Def: Eine Abbildung $\psi : G \longrightarrow H, \quad a \longmapsto \psi(a)$ (1)

heisst ein 'Isomorphismus' ('identische Form') zwischen den Gruppen G und H ist, falls sie ein <u>bijektiver</u> Homomorphismus ist. Wir schreiben dann: $G \cong H$ (2)

Isomorphe Gruppen sind praktisch 'identisch'.

$$(R_{90}, \bullet) \cong (\mathbb{Z}_4, \cdot)$$

Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die ihre Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben 'dieselbe' Verknüpfungstabelle, alle Eigenschaften der einen Gruppe gelten auch für die andere).

| $\bullet$ | 0 | 90 | 180 | 270 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 90 | 180 | 270 |
| 90 | 90 | 180 | 270 | 0 |
| 180 | 180 | 270 | 0 | 90 |
| 270 | 270 | 0 | 90 | 180 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik !

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)