https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 03: Vektorprodukt, Raumkurven, Linienintegrale

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 6, 7, 4.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L4.3.1), 8 (V1.4.1).

Optionale Aufgabe 1: Natürliche Parametrisierung einer Kurve [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[0.5](M); (c)[0.5](E).

Gegeben ist die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T \in \mathbb{R}^2$ für $t \in (0, 2\pi)$.

(a) Skizzieren Sie die Raumkurve qualitativ.

(b) Bestimmen Sie ihre Bogenlänge, $s(t)$, im Zeitinterval $(0, t)$. [Kontrollergebnis: $s(2\pi) = 8$.]

(c) Geben Sie die natürliche Parametrisierung, $\mathbf{r}_L(s)$, an. [Kontrollergebnis: $\mathbf{r}_L(4) = (\pi, 2)^T$.]

Optionale Aufgabe 2: Natürliche Parametrisierung einer Kurve [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](E); (e)[1](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \,|\, t \in (0, \tau)\}$, $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{ct}(\cos \omega t, \sin \omega t)^T \ \in \mathbb{R}^2$, mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $\tau = 8\pi/\omega$ und $c = 1/\tau$. [Diese Angaben gelten nur für Teilaufgabe (a), nicht für (b-e).]

(b) Berechnen Sie den Betrag der Kurvengeschwindigkeit, $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$.

(c) Berechnen Sie die im Zeitintervall $(0, t)$ durchstrichene Bogenlänge, $s(t)$.

(d) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$.

(e) Überprüfen Sie explizit, dass $\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_L}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$ gilt.

[Kontrollergebnisse für $c = \omega = \tau = 1$: (b) $\sqrt{2}\mathrm{e}^t$, (c) $\sqrt{2}(\mathrm{e}^t - 1)$, (d) $\mathbf{r}_L(s) = [s/\sqrt{2} + 1]\left(\cos[\ln(s/\sqrt{2} + 1)], \sin[\ln(s/\sqrt{2} + 1)]\right)^T$.]

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 6]