

Beispiel für: Fourier-Integrale (C6.3), Green'sche Funktion (C7.5), Homogene + Partikuläre Lösung (C7.4), delta-Funktion (C6.1), komplexe Wegintegration (C9.2) C7.5Bsp.a

Überdämpfter harmonischer Oszillator mit periodischem Antrieb:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x = f(t), \quad \text{überdämpft: } \gamma > \Omega \quad (1)$$

$$\hat{L}(t)x = f(t), \quad \hat{L}(t) = (d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) \quad (2)$$

Endziel: Finde $x(t)$, mit Anfangsbedingung: $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3)$

für Antriebsfunktion $f(t)$ \leftarrow wird später angegeben (als $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$) (4)

Homogene Lösung: $\hat{L}(t)x_h(t) = 0$ (finde mittels exp-Ansatz) (5)

Allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ (6)

Finde mittels GF:
erst $\tilde{g}(\omega)$ mittels Fourier-Transf.
dann $\tilde{g}(t)$ mittels komplexem Wegintegral

Zusammenfassung: C7.5 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green

C7.5A
C7.5Bsp.b

$$\underbrace{[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0]}_{\hat{L}(d_t)} x(t) = f(t) \quad (1)$$

Kurznotation: $\hat{L}(d_t)x(t) = f(t) \quad (2) \quad \hat{L}(d_t) = \sum_{l=0}^n c_l \frac{d^l}{dt^l}$

Fourier-transformiert: $x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega) \quad \frac{d}{dt} x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega) \quad (3)$

$$\tilde{L}(-i\omega) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (4) \quad \text{mit} \quad \tilde{L}(-i\omega) = \sum_{l=0}^n c_l (-i\omega)^l \quad (5)$$

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega) \quad (6) \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} \quad (7)$

Green'sche Funktion erfüllt: $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \stackrel{(7)}{=} \tilde{\xi}(\omega) \quad (8) \quad \xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}} \hat{L}(d_t)g(t) \stackrel{(1)}{=} \delta(t) \quad (9)$
[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u) \quad (10) \quad \text{allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!}$

Homogene Lösung: $x_h(t) \stackrel{(d.6)}{=} A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \quad (1)$

mit $\lambda_{\pm}^2 + 2\gamma\lambda_{\pm} + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \quad (2)$

Partikuläre Lösung: $x_p(t) \stackrel{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u), \quad f(t) = f_0 \cos \omega_0 t \quad (3)$

Green'sche Funktion: $\tilde{g}(\omega) \stackrel{(f.5)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad (4)$

Fourier-Rücktransformation: $g(t) \stackrel{(g.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \stackrel{(i.7)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_+} [e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}] = \Theta(t) x_h(t) \quad (5)$
 mit $x_h(0) \stackrel{(i.8)}{=} 0, \dot{x}_h(0) \stackrel{(i.9)}{=} 1$

(5) in (3): $x_p(t) \stackrel{(m.4)}{=} \text{Re} \left[f_0 \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)} \right] \stackrel{(m.6)}{=} f_0 \frac{(-\omega_0^2 + \Omega^2) \cos \omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin \omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (6)$

Volle Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (7) \quad + \text{Anpassen der Konstanten: (o.8,9)}$

(a) Homogene Lösung: Exp-Ansatz

$x_h(t) = A e^{\lambda t} \quad (1)$

eingesetzt in: $(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) x_h(t) \stackrel{(a.2)}{=} 0 \quad (2)$

$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) A e^{\lambda t} = 0 \quad (3)$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 = 0 \quad (4) \leftarrow$

Kurznotation:

$\hat{L}(d_t) x_h(t) = 0$

$\hat{L}(d_t) A e^{\lambda t} = 0$

$\tilde{L}(\lambda) = 0$

$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \lambda_{\pm} \quad \text{für } \gamma > \Omega$

(wichtig !!)

(5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{vergleiche (C7.4m.6)} \\ \text{und Blatt 9, Bsp.Aufgabe} \end{array} \right\}$

Allgemeine homogene Lösung: $x_h(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \quad (6)$

$\dot{x}_h(t) = \lambda_+ A_+ e^{\lambda_+ t} + \lambda_- A_- e^{\lambda_- t} \quad (7)$

Konstanten A_+, A_- werden festgelegt, wenn partikuläre Lösung bekannt ist.

Für späteren Gebrauch: $\lambda_+ + \lambda_- = -2\gamma, \quad \lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \gamma_r \quad (8)$

$\lambda_+ \cdot \lambda_- = (-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2})(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}) = \gamma^2 - \Omega^2 = \Omega^2 \quad (9)$

(b) Partikuläre Lösung: mittels Greenscher Funktion

C7.5 Bsp. e

$$x_p(t) \stackrel{(b.10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u) \quad (1)$$

wobei $G(t)$ per Definition die Diff.Gl. mit delta-Antrieb erfüllt:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega_0^2 \right) g(t-u) \stackrel{(b.9)}{=} \delta(t-u) \quad (2)$$

Kurznotation:
 $\hat{L}(d_t)g(t) = \delta(t)$

Check, dass (e.1) die Gl. (a.1) erfüllt: (Logik: siehe Seite b.)

$$\begin{aligned} & \left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega_0^2 \right) x_p(t) = & (3) \\ \stackrel{(1)}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} du \underbrace{\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega_0^2 \right) g(t-u)}_{\delta(t-u)} f(u) & (4) \\ = & f(t) \checkmark & (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{L}(d_t) x_p(t) \\ \stackrel{(1)}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} du \underbrace{\hat{L}(d_t) g(t-u)}_{\delta(t-u)} f(u) \\ = & f(t) \checkmark \end{aligned}$$

(c) Bestimmung der Greenschen Funktion im Fourier-Raum

C7.5 Bsp. f

$$g(t) \stackrel{(ZC6.3b.1)}{=} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega) \quad (1)$$

$$d_t \rightarrow -i\omega \quad (2)$$

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega_0^2 \right) g(t) \stackrel{(e.2)}{=} \delta(t) \quad (3)$$

$$\stackrel{(b.4)}{\Rightarrow} \underbrace{\left((-i\omega)^2 + 2\gamma(-i\omega) + \Omega_0^2 \right)}_{\equiv \tilde{L}(-i\omega)} \tilde{g}(\omega) = 1 \quad (4)$$

Kurznotation:
 $\tilde{L}(-i\omega)\tilde{g}(\omega) = 1$

$$\stackrel{(b.7)}{\Rightarrow} \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} = \frac{1}{\Omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad (5)$$

[vgl.: (C7.5a.6)]

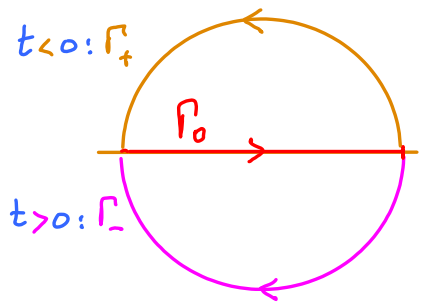
(d) Bestimmung v. $G(t)$ mittels komplexer Wegintegration

C7.5 Bsp.g

[vergleiche (C8.3g-h) und Blatt 15, Bsp.Aufgabe 4 & Hausaufgabe 4]

Kurzüberlegung:

$$g(t) \stackrel{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} d\omega \quad \left(\omega = \pm iR \right) \quad e^{-i(\pm iR)t} = e^{\pm Rt} \stackrel{<0?}{\sim}$$



$$g(t_{>0}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} \frac{e^{-iz} (-|t|)}{2\pi \tilde{L}(-iz)} dz \quad (2)$$

$$\equiv h_{\pm}(z)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} h_{\pm}(z) dz \quad (4)$$

$$\Gamma_0: \{z(s) = s, s \in (-R, R)\} \quad (3)$$

Falls $t < 0$: SchlieÙe Weg in oberer Halbebene, unterer

entlang $\Gamma_{\pm}: \{z(\phi) = R e^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi) \mid \phi \in (0, \pm\pi)\}$ (5)

denn $e^{\pm iz|t|} = e^{\pm iz(\phi)|t|} = e^{\pm i|t|R \cos\phi} e^{\pm |t|R \sin\phi} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ wähle: ≥ 0 (6)

Finde nun Pole von $h_{\pm}(z)$, d.h. die Nullstellen von:

C7.5 Bsp.h

$$\Omega^2 - z^2 - z i \gamma = \tilde{L}(-iz) = 0 \quad (f.5) \quad (1)$$

⇒ Pole der Ordnung 1 bei:

$$z_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \Omega^2} = i(-\gamma \pm \sqrt{+\gamma^2 - \Omega^2}) \stackrel{(d.5)}{=} i\lambda_{\pm} \quad (2)$$

Check: $(z - i\lambda_+)(z - i\lambda_-) = z^2 - iz(\lambda_+ + \lambda_-) - \lambda_+ \lambda_-$
 $= z^2 + z i \gamma - [\gamma^2 - (\gamma^2 - \Omega^2)] \stackrel{(1)}{=} -\tilde{L}(-iz) \quad (3)$

Übrigens:

λ_{\pm} sind die in (d.5) gefundenen 'Eigenfrequenzen' für die homogene Lösung!

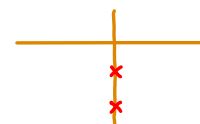
Das ist kein Zufall, denn die Gleichungen für z_{\pm} und λ_{\pm} sind analog:

Einerseits: $\tilde{L}(-iz) \stackrel{(h.1)}{=} 0$, andererseits $\tilde{L}(\lambda) \stackrel{(d.4)}{=} 0 \Rightarrow$ konsistent mit (h.3) $-iz = \lambda$ (4)

Liegen die Pole in oberer oder unterer Halbebene?

Es gilt: $\text{Im}(z_{\pm}) \stackrel{(h.2)}{=} \text{Im}(i\lambda_{\pm}) \stackrel{(d.5)}{=} \lambda_{\pm} < 0$ (5)

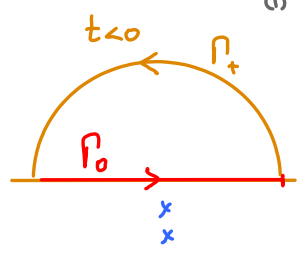
also liegen beide in unterer Halbebene!



$$\Rightarrow h_{\pm}(z) \stackrel{(9.2)}{=} \frac{e^{\pm iz|t|}}{2\pi i(-iz)} \stackrel{(h.3)}{=} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \frac{e^{\pm iz|t|}}{(z-i\lambda_+)(z-i\lambda_-)}$$

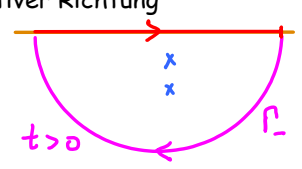
$$g(t < 0) \stackrel{(9.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0, \Gamma_+)} dz h_+(z) \stackrel{(C9.2g.3)}{=} 0 \quad \text{Satz v. Cauchy} \quad (2)$$

denn $h_+(z)$ ist analytisch in oberer Halbebene!



$$g(t > 0) \stackrel{(9.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0, \Gamma_-)} dz h_-(z) \stackrel{(3)}{=} -2\pi i \left[\text{Res}(h_-, i\lambda_+) + \text{Res}(h_-, i\lambda_-) \right] \quad (4)$$

(C9.4a.4): Residuensatz
 (h.2) z_+ (h.2) z_-
 - Zeichen, weil (Γ_0, Γ_-) in math. negativer Richtung durchlaufen wird



$$\stackrel{(1)}{=} (-2\pi i) \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \left[\frac{e^{-i(i\lambda_+)|t|}}{(i\lambda_+ - i\lambda_-)} + \frac{e^{-i(i\lambda_-)|t|}}{(i\lambda_- - i\lambda_+)} \right] \quad (5)$$

$$\lambda_+ - \lambda_- \stackrel{(d.8)}{=} 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \gamma_r \quad (6)$$

$$g(t) = \theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[e^{+\lambda_+ t} - e^{+\lambda_- t} \right] = \theta(t) x_h(t) \quad (7)$$

(6) $\theta(t)$ (d.7) $\equiv x_h(t)$ mit $A_{\pm} = \pm 1/\gamma_r$

mit $x_h(0) = 0$, (8) $\dot{x}_h(t) = \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t} \right]$, $\dot{x}_h(0) = 1$ (9)

(e) Skizziere $G(t)$

$$g(0) = 0 \quad (1)$$

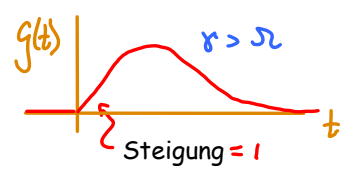
$$g(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0^+ \quad (2) \leftarrow \begin{cases} \text{denn } |\lambda_+| < |\lambda_-| \\ \text{dominiert der erste Term.} \end{cases} \text{ also}$$

Steigung bei $t=0^+$:

$$d_t g(t) \stackrel{(i.7)}{=} d_t [\theta(t) x_h(t)] = \dot{\theta}(t) x_h(t) + \theta(t) \dot{x}_h(t) \quad (2)$$

$$= \theta(t) \dot{x}_h(t) \quad (3) \quad \begin{matrix} \delta(t) x_h(0) = 0 \\ (i.8) \end{matrix}$$

$$d_t g(t) \Big|_{t \rightarrow 0^+} = \dot{x}_h(0) = 1 \quad (4)$$

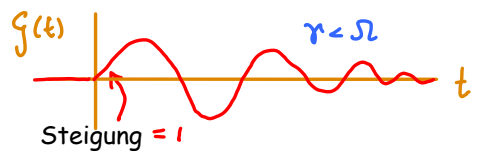


Vergleiche: Analoge Eigenschaft gilt für den unterdämpften Fall: ($\gamma < \Omega$)

$$g(t) = \theta(t) \frac{1}{\Omega_r} \underbrace{\sin(\Omega_r t)}_{x_h(t)} e^{-\gamma t} \stackrel{(C7.5b.5)}{=} \dot{x}(t) \quad (5) \quad \Omega_r = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \quad (C7.4j.1)$$

mit $x_h(0) = 0$, $\dot{x}_h(t) = \left[\Omega_r \cos(\Omega_r t) + (-\gamma) \sin(\Omega_r t) \right] e^{-\gamma t}$, $\dot{x}_h(0) = 1$ (6)

$$d_t g(t) \Big|_{t \rightarrow 0} \stackrel{(3)}{=} \theta(t) \dot{x}_h(t) \Big|_{t \rightarrow 0} = 1 \quad (7)$$



(f) Erfüllt $G(t)$ die definierende Gleichung (e.2)? Allgemeines Argument

C7.5Bsp.k

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] g(t) \stackrel{?}{=} \delta(t)$$

Vergleiche Blatt 12,
Bsp-Aufgabe 3, Hausaufgabe 3 (1)

$$g(t) \stackrel{(i.7)}{=} \Theta(t) x_R(t) \quad \text{mit} \quad x_R(0) \stackrel{(i.8)}{=} 0, \quad \dot{x}_R(0) \stackrel{(i.9)}{=} 1 \quad (2)$$

$$d_t g(t) \stackrel{(j.3)}{=} \underbrace{\dot{\Theta}(t)}_{\delta(t)} x_R(t) + \Theta(t) \dot{x}_R(t) \quad (3)$$

$$d_t^2 g(t) \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\dot{\Theta}(t)}_{\delta(t)} \dot{x}_R(t) + \Theta(t) \ddot{x}_R(t) = \delta(t) + \Theta(t) \ddot{x}_R(t) \quad (4)$$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] g(t) = \delta(t) + \Theta(t) \left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] x_R(t) \quad (5)$$

$$= \delta(t) \quad \checkmark \quad \text{[wie gefordert in (e.2)]} \quad (6)$$

(f) Erfüllt $G(t)$ die definierende Gleichung (e.2)? Explizite Rechnung

C7.5Bsp.k'

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] g(t) \stackrel{?}{=} \delta(t) \quad (1)$$

$$g(t) \stackrel{(i.7)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\underbrace{e^{\lambda_+ t}} - \underbrace{e^{\lambda_- t}} \right] \quad (2)$$

$$d_t g(t) \stackrel{(j.3)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+ \underbrace{e^{\lambda_+ t}} - \lambda_- \underbrace{e^{\lambda_- t}} \right] \quad (3)$$

$$d_t^2 g(t) \stackrel{(2)}{=} \delta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+ \underbrace{e^{\lambda_+ t}} - \lambda_- \underbrace{e^{\lambda_- t}} \right] + \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+^2 \underbrace{e^{\lambda_+ t}} - \lambda_-^2 \underbrace{e^{\lambda_- t}} \right] \quad (4a)$$

$$= \lambda_+ - \lambda_- \stackrel{(d.8)}{=} \delta(t) \quad (4b)$$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] g(t) = \delta(t) + \Theta(t) \left[\lambda_+^2 + 2\gamma \lambda_+ + \Omega^2 \right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_+ t} - \Theta(t) \left[\lambda_-^2 + 2\gamma \lambda_- + \Omega^2 \right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_- t} \quad (5)$$

$$= \delta(t) \quad \checkmark \quad \text{[wie gefordert in (e.2)]} \quad (6)$$

mittels $G(t)$:
$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u) \stackrel{s=t-u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s) f(t-s) \quad (1)$$

Substitution empfiehlt sich, da f einfacher ist als G

$$\stackrel{(i.7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ds \underbrace{\theta(s)}_{=1} \frac{1}{\gamma_r} \left[e^{\lambda_+ s} - e^{\lambda_- s} \right] f(t-s) \quad (2)$$

$$\equiv x_+(t) - x_-(t) \quad (3)$$

$$x_{\pm}(t) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\gamma_r} \int_0^{\infty} ds e^{\lambda_{\pm} s} f(t-s) \quad (4)$$

Beispiel: Periodischer Antrieb:

$$f(t) = f_0 \omega \cos \omega t = f_0 \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \right] \quad (5)$$

$$x_{\pm}(t) \stackrel{(3)}{=} \frac{f_0}{\gamma_r} \int_0^{\infty} ds e^{\lambda_{\pm} s} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega(t-s)} \right] \quad (6)$$

$$x_{\pm}(t) = \frac{f_0}{\gamma_r} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \frac{e^{s(\lambda_{\pm} + i\omega)} \Big|_0^{\infty}}{\lambda_{\pm} + i\omega} \right] \stackrel{\lambda_{\pm} < 0 \text{ (d.6)}}{=} -\frac{f_0}{\gamma_r} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \frac{1}{i\omega + \lambda_{\pm}} \right] \quad (1)$$

Volle partikuläre Lösung:
$$x_p(t) = x_+ - x_- \stackrel{(1.4)}{=} -\operatorname{Re} \left[\frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\gamma_r} \left[\frac{1}{i\omega + \lambda_+} - \frac{1}{i\omega + \lambda_-} \right] \right] \quad (2)$$

$$= -\operatorname{Re} \left[\frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\gamma_r} \frac{(i\omega + \lambda_-) - (i\omega + \lambda_+)}{(i\omega + \lambda_+)(i\omega + \lambda_-)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\gamma_r} \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{-\omega^2 + i\omega(\lambda_+ + \lambda_-) + \lambda_+ \lambda_-} \right] \quad (3)$$

(d.8) -2γ (d.9) Ω^2

$$= \operatorname{Re} \left[f_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{-\omega^2 + \Omega^2 - 2i\gamma\omega} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\hat{L}(-i\omega)} \right] \leftarrow \text{bequemste Form, weil } \sim e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

kein Zufall - siehe (h.3)

$$= \operatorname{Re} \left\{ f_0 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \left[\frac{-\omega^2 + \Omega^2 + 2i\gamma\omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \right] \right\} \quad (5)$$

$$x_p(t) = f_0 \frac{(-\omega^2 + \Omega^2) \cos \omega t + 2\gamma\omega \sin \omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (6)$$

Check: erfüllt $x_p(t)$ die Gl. (a.1), mit $f(t) \stackrel{(b.5)}{=} f_0 \cos(\omega_0 t)$

$$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) x_p(t) \stackrel{?}{=} f_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

Ausgangspunkt: $x_p(t) \stackrel{(m.4)}{=} \operatorname{Re} \left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\hat{L}(-i\omega_0)} \right] \quad (2)$

(2) in (1): $(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) \operatorname{Re} \left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\hat{L}(-i\omega_0)} \right] \quad (3)$

$$= \operatorname{Re} \left[\underbrace{((-i\omega_0)^2 - 2\gamma i\omega_0 + \Omega^2)}_{\hat{L}(-i\omega_0)} f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\hat{L}(-i\omega_0)} \right] \quad (4)$$

$$= \operatorname{Re} \left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \right] = f_0 \cos(\omega_0 t) = (1) \checkmark \quad (5)$$



(h) Bestimme jetzt Anfangsbedingungen

Allgemeine Lösung: $x(t) \stackrel{(a.5)}{=} x_h(t) + x_p(t) \quad (1)$

$$x_h(0) \stackrel{(d.6)}{=} A_+ + A_-, \quad (2) \quad \dot{x}_h(0) \stackrel{(d.7)}{=} \lambda_+ A_+ + \lambda_- A_- \quad (3)$$

$$x_p(0) \stackrel{(m.6)}{=} f_0 \frac{(-\omega_0^2 + \Omega^2) \cos(\omega_0 t) + 2\gamma \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \quad (4)$$

$$\dot{x}_p(0) \stackrel{(4)}{=} f_0 \frac{-\omega_0^2 + \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \quad (5)$$

$$\dot{x}_p(t) \stackrel{(4)}{=} f_0 \frac{-(-\omega_0^2 + \Omega^2) \omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2\gamma \omega_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \quad (6)$$

$$\dot{x}_p(0) \stackrel{(6)}{=} f_0 \frac{2\gamma \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \quad (7)$$

Wähle A_+ und A_- so, dass $x(0) = x_0 = x_p(0) + x_h(0) \quad (8)$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0) \quad (9)$$

(i) Abkürzung bei Berechnung v. $x_p(t)$

C 7.5 Bsp. p

$$x_p(t) \stackrel{(L.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du \, g(t-u) f(u) \quad (1)$$

$$f(u) \stackrel{(L.5)}{=} f_0 \cos(\omega_0 u) \quad (2)$$

$$g(t) \stackrel{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega) \stackrel{(f.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \quad (3) \quad \tilde{L}(-i\omega) \stackrel{(f.4)}{=} \Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega \quad (4)$$

(2), (3) in (1):

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-u)}}{\tilde{L}(-i\omega)} \frac{f_0}{2} \left[e^{-i\omega_0 u} + e^{+i\omega_0 u} \right] \quad (5)$$

vertausche
Integrale:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f_0}{2i} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-i u(\omega_0 - \omega)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{i u(\omega_0 + \omega)} \right\} \quad (6)$$

$\delta(\omega_0 - \omega) \leftarrow (C6.3b.2) \rightarrow \delta(\omega_0 + \omega)$

$$= \frac{f_0}{2} \left\{ \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)} + \frac{e^{+i\omega_0 t}}{\tilde{L}(+i\omega_0)} \right\} \stackrel{(4)}{=} \operatorname{Re} \left[\frac{f_0 e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)} \right] = \operatorname{Re} \left[f_0 \frac{e^{-i\omega_0 t}}{(-\omega_0^2 + \Omega^2 - 2i\gamma\omega_0)} \right] \quad (7)$$

$= (m.4)$