

Vorausschau/Überblick:

'Integral über die Ableitung einer Funktion hängt nur von ihrem Wert am Rand ab'

Hauptsatz der Analysis: Linienintegral des Gradienten = Differenz an den Enden

$$\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}') \quad (1)$$

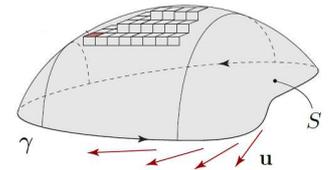
Integral (Änderung pro Schritt) = Gesamtänderung zwischen Endpunkten



Satz v. Stokes: Flächenintegral der Rotation = Linienintegral

$$\int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u} \quad (2)$$

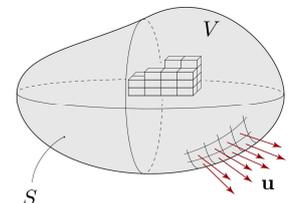
Integral (Zirkulation pro Flächenelement) = Gesamtzirkulation entlang Rand der Fläche



Satz v. Gauß: Volumenintegral der Divergenz = Flussintegral über Fläche

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{u} \quad (3)$$

Integral (Ausfluss pro Volumenelement) = Gesamtausfluss durch Aussenfläche des Volumens

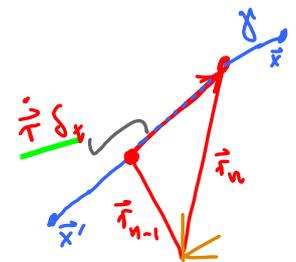


Erinnerung: V3.2 Linienintegral eines Gradientenfeldes

Skalarfeld: $\varphi: U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1, \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) \quad (1)$

Gradient: $\vec{\nabla} \varphi: U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) \quad (2)$

Weg: $\gamma_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t), \vec{r}(0) = \vec{x}', \vec{r}(1) = \vec{x} \quad (3)$

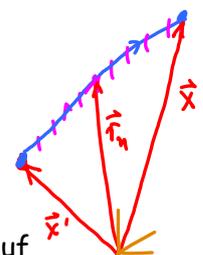


Änderung von φ von t nach $t + \delta t$:

$$\delta \varphi(\vec{r}(t)) = \varphi(\vec{r}(t + \delta t)) - \varphi(\vec{r}(t)) \stackrel{(C3i.2)}{=} \underbrace{\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}(t))}_{\text{'Steigung v. } \varphi'} \cdot \underbrace{\dot{\vec{r}} \delta t}_{\text{Schritt in Zeit } \delta t} \quad (4)$$

Gesamtänderung entlang Weg $\gamma_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$:

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}') = \int_0^1 dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}(t)) = \int_{\gamma_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi \quad (5)$$



Zusammenfassung der Strategie: finde geometrische Interpretation für Änderung auf einem infinitesimalem Wegelement; Summe über viele Elemente liefert ein Integral. Analoge Strategie funktioniert auch bei Gauß & Stokes (diese & nächste Vorlesung)

Erinnerung: V3.2 Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinaten (siehe Seite V3.2m) V3.5c

Für orthogonal krummlinige Koordinaten gilt: $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$, $g^{ij} = \delta^{ij} g^{ii} = \delta^{ij} \frac{1}{g_{ii}}$ (1)

Gradient: $\vec{\nabla} f \stackrel{(2.6)}{=} \bar{v}_i g^{ij} \partial_j f \stackrel{(1)}{=} \underbrace{\bar{v}_i \frac{1}{g_{ii}}}_{\sqrt{g_{ii}} \bar{e}_i} \partial_i f = \bar{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (2)
 (V2g.4) (in Koordinatenbasis) (in lokaler Basis) (3)

Zylinderkoordinaten: $\vec{r}(\rho, \phi, z)$, $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\phi\phi} = \rho^2$, $g_{zz} = 1$ [siehe (V2l.3)] (3)

$\vec{\nabla} f \stackrel{(2)}{=} \bar{e}_\rho \frac{1}{\sqrt{g_{\rho\rho}}} \partial_\rho f + \bar{e}_\phi \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \partial_\phi f + \bar{e}_z \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}} \partial_z f$ (in lokaler Basis) (4)

$= \bar{e}_\rho \partial_\rho f + \bar{e}_\phi \frac{1}{\rho} \partial_\phi f + \bar{e}_z \partial_z f$ (Vergleiche Seite V3.5r) (5)

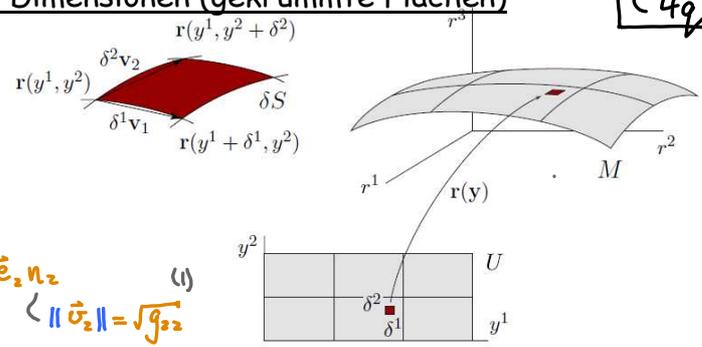
Kugelkoordinaten: $\vec{r}(r, \theta, \phi)$: $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ (6)
 [siehe (V2n.3)]

$\vec{\nabla} f \stackrel{(2)}{=} \bar{e}_r \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \partial_r f + \bar{e}_\theta \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \partial_\theta f + \bar{e}_\phi \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \partial_\phi f$ (in lokaler Basis) (7)

$= \bar{e}_r \partial_r f + \bar{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f + \bar{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f$ (Vergleiche Seite V3.5r) (8)
 (V2g.4)

Erinnerung: C4.4 2D-Flächenintegrale in 3 Dimensionen (gekrümmte Flächen) C4g

$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$
 $\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ x^2(\vec{y}) \\ x^3(\vec{y}) \end{pmatrix}$



Koordinatenbasis:
 $\bar{v}_1 = \frac{\partial \vec{r}(\vec{y})}{\partial y^1} = \bar{e}_1 n_1$, $\bar{v}_2 = \frac{\partial \vec{r}(\vec{y})}{\partial y^2} = \bar{e}_2 n_2$ (1)
 $\|\bar{v}_1\| = \sqrt{g_{11}}$, $\|\bar{v}_2\| = \sqrt{g_{22}}$

Flächenelement: $\delta S = \delta^1 \delta^2 \|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\|$ (2)

$\int_S f(\vec{r}) dS = \int_{y^1} \int_{y^2} \|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\| f(\vec{r}(y^1, y^2)) dy^1 dy^2$ (3)
 (analog zu Seite C4k)

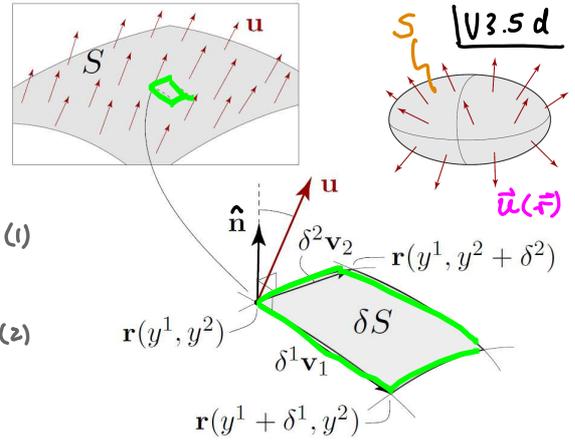
Für krummlinig-orthogonale Koordinaten, mit $\|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\| = \|\bar{v}_1\| \|\bar{v}_2\| \equiv n_1 n_2$ (4)

ist das Integrationsmaß: $dS = dy^1 dy^2 n_1 n_2$ (5)

Beispiel: Flächenelement einer Kugel mit Radius R:
 (V2n.4) $\bar{v}_\theta = R \bar{e}_\theta$, $\bar{v}_\phi = R \sin \theta \bar{e}_\phi$
 $n_\theta = R$, $n_\phi = R \sin \theta$
 $dS = d\theta d\phi R \cdot R \sin \theta$ (6)

V3.5 Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche

Sei $\vec{u}(\vec{r}) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.
 Wieviel 'fließt' durch eine Fläche S ?



Flächenelement (FE): $\delta S = \delta^1 \delta^2 \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$ (1)

Normalvektor: $\hat{n} = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$ (2)

Zerlege $\vec{u}(\vec{r})$ in Anteile \perp, \parallel zum FE:

$$\vec{u}(\vec{r}) \equiv \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel \quad (3) \quad \begin{cases} \vec{u}_\perp \parallel \hat{n} & \text{'Normalkomponente' fließt durch FE hindurch} \\ \vec{u}_\parallel \perp \hat{n} & \text{'Tangentialkomponente' fließt am FE entlang} \end{cases}$$

$\hookrightarrow \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u})$

Def: 'Fluss' durch FE: $\delta \Phi \equiv \delta S (\hat{n} \cdot \vec{u}) \stackrel{(1,2)}{=} \delta^1 \delta^2 \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \delta^1 \delta^2 (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{u}$ (4)

Def: 'gerichtetes Flächenelement': $\vec{\delta S} \equiv \delta S \hat{n} \stackrel{(1,2)}{=} \delta^1 \delta^2 \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \delta^1 \delta^2 (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ (5)

Def: 'Fluss' durch die Fläche: $\Phi \equiv \int_S \vec{\delta S} \cdot \vec{u} \stackrel{(5)}{=} \int_U dy^1 dy^2 (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{u}$ (6)

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

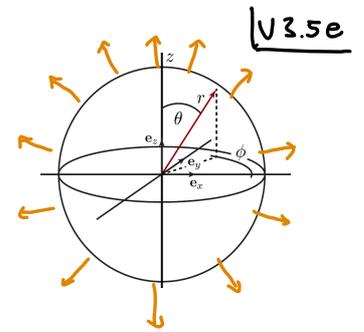
Berechne Fluss durch Oberfläche einer Kugel mit Radius R :

$$\Phi \stackrel{(a.3)}{=} \int_U d\theta d\phi (\vec{v}_\theta \times \vec{v}_\phi) \cdot \vec{E}(\vec{r}(\theta, \phi)) \quad (2)$$

$$\stackrel{(f.3)}{=} n_\theta \vec{e}_\theta \times n_\phi \vec{e}_\phi = R^2 \sin\theta \vec{e}_r \quad (3)$$

$$\stackrel{(3),(1)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (R^2 \sin\theta \vec{e}_r) \cdot \left(\vec{e}_r \frac{1}{R^2} Q \right) \quad (4)$$

$$= 2\pi \cdot 2 Q = 4\pi Q \quad (5)$$



Seite c:
 $n_\theta = r$
 $n_\phi = r \sin\theta$
 $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r$

Fluss hängt nicht vom Radius ab (!). Das ist ein Beispiel vom

Gauß-Gesetz der Elektrostatik: Der durch die Oberfläche S eines Volumens V hindurchtretende Fluss Φ des elektrischen Feldes ist proportional zur gesamten in V enthaltenen elektrischen Ladung:

$$4\pi Q = 4\pi \int_V dV \rho(\vec{r}) = \int_S \vec{\delta S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (6)$$

V3.5 Divergenz (Erinnerung)

V3.5f

Vektorfeld: $\vec{u} : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u^d(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{ES}{=} \vec{e}_j u^j(\vec{x})$ (1)

Definition: 'Divergenz von \vec{u} ' (in kartesischen Koordinaten):

$$\operatorname{div} \vec{u} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u} : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\vec{x} \mapsto \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{x}) \stackrel{ES}{=} \partial_i u^i(\vec{x}) = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \dots + \partial_d u^d \quad (3)$$

Notationscheck: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \underbrace{(\vec{e}_i \partial_i)}_{(b.3)} \cdot \underbrace{(\vec{e}_j u^j)}_{(d.1)} = \partial^i \delta_{ij} u^j = \partial_i u^i \checkmark$ (4)

Beispiel: $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_1 x^1 + \partial_2 x^2 + \partial_3 x^3 = 1 + 1 + 1 = 3$ (5)

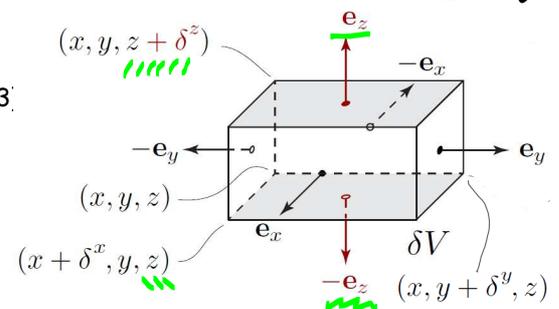
Geometrische Interpretation der Divergenz: Ausfluss pro Volumenelement

V3.5g

$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{e}_i u^i(\vec{x})$ sei ein Vektorfeld: (1)

(zur Anschauung: "Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit", mit $d=3$)

Ziel: Berechne den Ausfluss von \vec{u} durch ein quaderförmiges Volumenelement bei $\vec{x} = (x, y, z)^T$



$$\delta \Phi_{\text{oben}} + \delta \Phi_{\text{unten}} = \int_{\text{oben}} d\vec{s} \cdot \vec{u} + \int_{\text{unten}} d\vec{s} \cdot \vec{u} \quad (2)$$

$$= \int_x^{x+\delta x} \int_y^{y+\delta y} [\vec{e}_z \cdot \vec{u}(\vec{x}, \vec{y}, z+\delta z) + (-\vec{e}_z) \cdot \vec{u}(\vec{x}, \vec{y}, z)] \quad (3)$$

$$\approx \delta x \delta y [u^z(x, y, z+\delta z) - u^z(x, y, z)] \approx \delta x \delta y \delta z \partial_z u^z(x, y, z) \quad (4)$$

Im Limes $\delta x, \delta y \rightarrow 0$ ist x, y -Abhängigkeit des Integranden vernachlässigbar ('lokale Näherung')

Analog für anderen Flächen. Gesamtfluss [(hinten+vorne) + (rechts+links) + (oben+unten)]:

$$\delta \Phi_{\text{Quader}} = \int_{\text{Quader}} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \delta V [\partial_x u^x + \partial_y u^y + \partial_z u^z] = \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5)$$

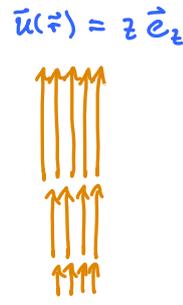
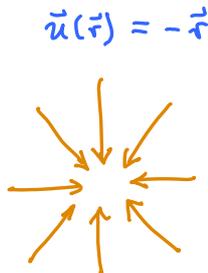
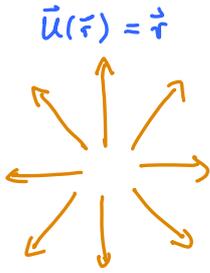
'Ausfluss pro Volumenelement'

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \Phi_{\text{Quader}}}{\delta V} \stackrel{(5)}{=} \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} d\vec{s} \cdot \vec{u} \stackrel{(5)}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Geometrische Definition der Divergenz (6)

Beispiele zur Anschauung:

V3.5h



$\nabla \cdot \vec{u} = > 0$

< 0

0

$\neq 0$

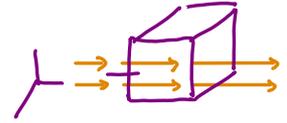
$= 0$

$\nabla \cdot \vec{u} > 0$: { mehr fließt raus als rein }
 $\nabla \cdot \vec{u} < 0$: { mehr fließt rein als raus }

z.B.:

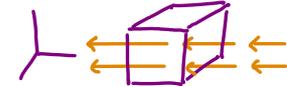
$u^x = x$

$\partial_x u^x = 1$



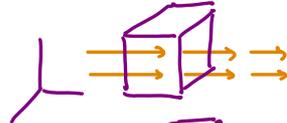
$u^x = -\frac{1}{x}$

$\partial_x u^x = \frac{1}{x^2}$



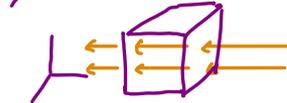
$u^x = \frac{1}{x}$

$\partial_x u^x = -\frac{1}{x^2}$



$u^x = -x$

$\partial_x u^x = -1$



Satz v. Gauß: Volumenintegral v. Divergenz = Flussintegral über Fläche

V3.5i

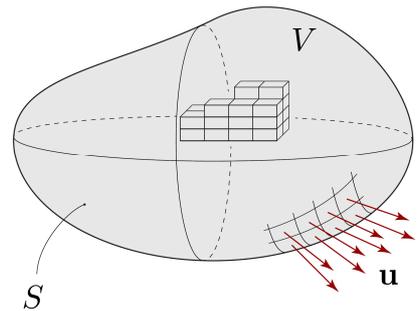
Betrachte nun endliches Volumen, V , umschlossen durch Aussenfläche S :
aufgeteilt in viele infinitesimal kleine Quader:

$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \int_{\delta V_\ell} dV \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad (1a)$$

lokale Näherung

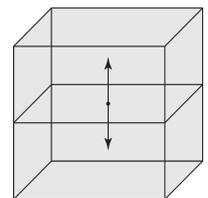
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \underbrace{\delta V_\ell \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}_\ell)}_{(q.b.) \text{ Ausfluss aus Quader } \ell} \quad (1b)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \int_{\delta S_\ell} d\vec{S} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad (2)$$



Beiträge aller (!) innerer Flächen heben sich weg, denn Normalvektoren benachbarter Quader haben entgegengesetzte Richtungen

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\text{Aussenflächen } \ell} \int_{\delta S_\ell} d\vec{S} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad (3)$$



$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{u}(\vec{r})$$

Satz von Gauß

□.

(4)

Interpretation: alles was quillt... muss durch die Aussenfläche!

[Mathematikvorlesung: sauberer Limesprozess, etc.]

Beispiele für Anwendungen

V3.5j

(1) Berechnung des durch eine Fläche S eingeschlossene Volumens V :

Wähle das triviale Vektorfeld $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (1)

$$\frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{1}{3} [\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z] = \frac{3}{3} = 1 \quad (2)$$

Volumen $V = \int_V dV \cdot 1 \stackrel{(2)}{=} \int_V dV \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \stackrel{(i.4)}{=} \frac{1}{3} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{r}$ (3)

Ermöglicht Volumenberechnung durch Integration allein über Oberfläche!

Beispiel Kugel K mit Radius R :

dS in Kugelkoordinaten (siehe Seite C4q.5)

$$V \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{3} \int_{\partial K} (R^2 \sin \theta d\theta d\phi) R \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{auf Kugeloberfläche gilt:} \\ \hat{n} = \vec{e}_r, \quad \vec{r} = R \vec{e}_r, \quad \hat{n} \cdot \vec{r} = R \end{array} \right.$$
$$= \frac{1}{3} R^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (4)$$

(2) Kontinuitätsgleichung

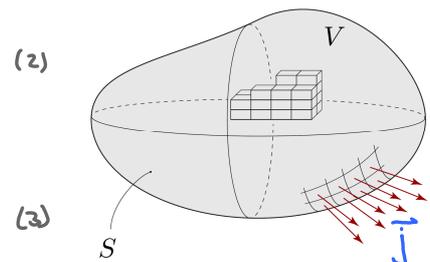
V3.sk

Sei $\rho(\vec{r}, t)$ = Massendichte, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ = Geschwindigkeitsfeld (1)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) = \text{Massenstromdichte} \quad (2)$$

Massenerhaltung in einem Volumen V :

Massenabnahme pro Zeit = Ausgeströmte Masse pro Zeit



$$-\frac{d}{dt} \int_V dV \rho(\vec{r}, t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \quad \text{Integralform der Kontinuitätsgleichung} \quad (4)$$

↓ (i.4), Satz v. Gauß, rückwärts gelesen

$$-\int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (5)$$

$$0 = \int_V dV \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \right] \quad (6)$$

(4) gilt für jedes Gebiet V , $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ Differentialform der Kontinuitätsgleichung (7)

äquivalent zu Erhaltung der Masse

(3) Maxwell-Gleichung für elektrisches Feld

V3.5l

$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho(\vec{r})$ Ladungsdichte (1)

Integriere über Volumen V

$\int_V dV \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{(1)}{=} 4\pi \int_V dV \rho(\vec{r})$ (2)

(mathematischer) Satz v. Gauß (i.4)

$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi Q$ Ladung in V (physikalisches) Gesetz v. Gauß: (3)

Fluss durch Oberfläche S

(4) Der Fluss \oint quellenfreier Vektorfelder durch geschlossene Flächen ist Null

Sei $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ 'quellenfrei', dann $\int_S d\vec{S} \cdot \vec{u} \stackrel{(i.4)}{=} \int_V dV \nabla \cdot \vec{u} = 0$ (4)

explizites Beispiel für (4): Seiten V3.5m-o

Anwendung: Maxwell-Gleichung für Magnetfeld lautet: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (5)

also sind Magnetfelder quellenfrei, und (4) gilt: $\int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0$ (6)

Beispiel: Fluss durch Pyramide (Selbststudium)

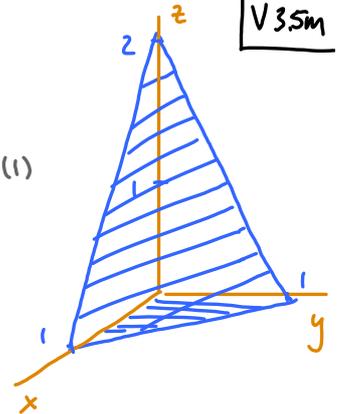
V3.5m

Berechne den Fluss des Magnetfeld eines ebenen Quadrupols,

$\vec{B}(\vec{r}) = g \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \left[= \nabla \times \vec{A}, \text{ mit } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \right]$ (1)

durch eine Pyramide:

$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \leq z \leq z - 2x - 2y \end{matrix} \}$ (2)



$\nabla \cdot \vec{B} \stackrel{ES}{=} \partial_i B_i = g(\partial_x y + \partial_y x + \partial_z 0) = 0$ (3)

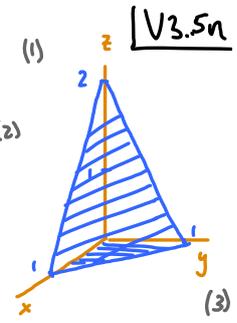
$\Phi = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{(i.4)}}{=} \int_V dV \nabla \cdot \vec{B} = 0$ (4)

Alternativ: $\Phi = \Phi_u + \Phi_l + \Phi_h + \Phi_s$ (5)

Rand: $S = S_u + S_l + S_h + S_s$ (6)
 unten links hinten schräg

Unten: $S_u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, z=0\}$ (1) | V3.5n

Normalenvektor: $\hat{n}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} \cdot \hat{n}_u = 0, \quad \Phi_u = 0$ (2)



Links: $S_l = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, y=0, z=2-2x\}$ (3)

Normalenvektor: $\hat{n}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} \cdot \hat{n}_l = -g \cdot x,$ (4)

$\Phi_l = \int_{S_l} dS \hat{n}_l \cdot \vec{B} = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dz (-g \cdot x) = -g \int_0^1 dx \cdot x (2-2x) = -g \left[x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = -\frac{g}{3}$ (5)

Hinten: $S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x=0, 0 \leq y \leq 1, z=2-2y\}$ (6)

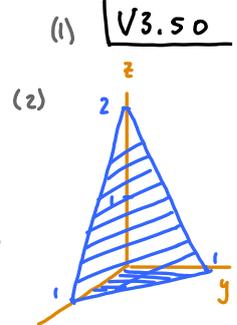
Normalenvektor: $\hat{n}_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} \cdot \hat{n}_h = -g \cdot y,$ (7)

$\Phi_h = \iint_{\partial \Omega_h} dA \hat{n}_h \cdot \vec{B} = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} dz (-g \cdot y) = \text{gleiche Rechnung wie für 'links'} = -\frac{g}{3}$ (8)

Schräg: $S_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, z=2-2x-2y\}$ (1) | V3.5o

Parametrisierung von S_s durch 'Gebirge'

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2-2x-2y \end{pmatrix}, \quad \partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3)



Orientiertes Flächenelement: $\delta \vec{S}_s = \delta_x \delta_y \partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} = \delta_x \delta_y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4)

Fluss durch $\delta \vec{S}_s$: $\delta \vec{S}_s \cdot \vec{B} = \delta_x \delta_y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot g \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_x \delta_y (2y + 2x)$ (5)

$\Phi_s = \iint_{S_s} d\vec{S}_s \cdot \vec{B} = g \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy z(y+x) = g \int_0^1 dx (y^2 + 2yx) \Big|_0^{1-x}$ (6)

$= g \int_0^1 dx \left[\underbrace{(1-x)^2 + 2(1-x)x}_{-x^2+1} \right] = g \left(-\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} g$ (7)

$\Phi = \Phi_u + \Phi_l + \Phi_h + \Phi_s = g \left(0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = 0$ konsistent mit (m.4) (8)

Divergenz in krumml. orthog. Koordinaten

V3.5p

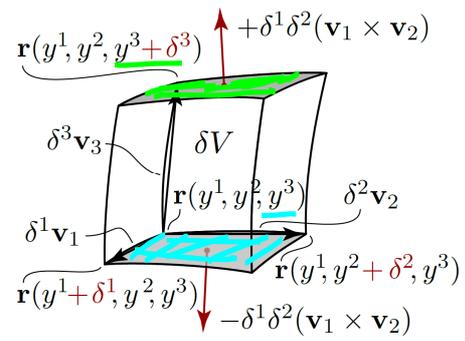
Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{y})$ (1)

Koordinatenbasis: $\partial_{y^j} \vec{r} = \vec{e}_j = \vec{e}_j n_j$ (2)
 keine Summation!

mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
 lokale Basis

Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{y}) = \sum_j \vec{e}_j u^j$ (3)

$\delta\Phi_{\text{oben}} + \delta\Phi_{\text{unten}} = \int_{\text{oben}} d\vec{s} \cdot \vec{u} + \int_{\text{unten}} d\vec{s} \cdot \vec{u}$ (4)



lokale Näherung:

$\approx \delta^1 \delta^2 \left[(n_1 n_2 u^3)(y^1, y^2, y^3 + \delta^3) - (n_1 n_2 u^3)(y^1, y^2, y^3) \right] \approx \delta^1 \delta^2 \delta^3 \partial_{y^3} (n_1 n_2 u^3)(\vec{y})$ (5)

Analog für die anderen beiden Flächenpaare (Indizes zyklisch vertauschen). Folglich:

$\delta\Phi_{\text{Quader}} = \int_{\text{Quader}} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \delta^1 \delta^2 \delta^3 \left[\partial_{y^1} (n_2 n_3 u^1) + \partial_{y^2} (n_3 n_1 u^2) + \partial_{y^3} (n_1 n_2 u^3) \right]$ (6)

Quadervolumen: $\delta V = \delta^1 \delta^2 \delta^3 n_1 n_2 n_3$ (7)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \stackrel{(9.6)}{=} \frac{\delta\Phi_{\text{Quader}}}{\delta V} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left[\partial_{y^1} (n_2 n_3 u^1) + \partial_{y^2} (n_3 n_1 u^2) + \partial_{y^3} (n_1 n_2 u^3) \right]$ (8)

(8) = allgemeine Formel für Divergenz in krummlinig orthogonalen Koordinaten!

Zylinderkoordinaten:

$n_\rho = 1, n_\phi = \rho, n_z = 1$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{n_\rho n_\phi n_z} \left[\partial_\rho (n_\phi n_z u^\rho) + \partial_\phi (n_z n_\rho u^\phi) + \partial_z (n_\rho n_\phi u^z) \right]$ (1)
 V3.5q

$= \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho (\rho \cdot 1 \cdot u^\rho) + \partial_\phi (1 \cdot 1 \cdot u^\phi) + \partial_z (1 \cdot \rho \cdot u^z) \right]$ (2)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho u^\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi u^\phi + \partial_z u^z$ (3)

Kugelkoordinaten:

$n_r = 1, n_\theta = r, n_\phi = r \sin\theta$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{n_r n_\theta n_\phi} \left[\partial_r (n_\theta n_\phi u^r) + \partial_\theta (n_\phi n_r u^\theta) + \partial_\phi (n_r n_\theta u^\phi) \right]$ (4)

$= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\partial_r (r^2 \sin\theta u^r) + \partial_\theta (r \sin\theta u^\theta) + \partial_\phi (r u^\phi) \right]$ (5)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u^r) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta u^\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi u^\phi$ (6)

Beispiel 1: Sei $\vec{u} = \vec{r} = r \vec{e}_r$, also $u^r = r, u^\theta = 0, u^\phi = 0$ (7)

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \cdot r) \stackrel{\checkmark}{=} 3 \stackrel{\text{kartesisch}}{=} (\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z)$ (8)

Beispiel 2: Sei $\vec{u} = \hat{e}_\phi$, also $u^r = 0, u^\theta = 0, u^\phi = 1$ (9)

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 + 0 + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi (1) = 0 \checkmark$ (10)

$t(x, y, z) =:$ Skalares Feld
 $\vec{s}(x, y, z) =:$ Vektorfeld

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}; \quad d\tau = dx dy dz$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}; \quad d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\phi$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

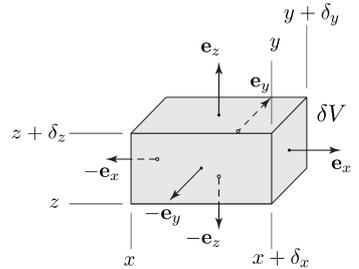
V3.5 ↑

Zusammenfassung: V3.5 Divergenz, Satz v. Gauß

Divergenz (kartesisch): $\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^d \partial_i u^i$

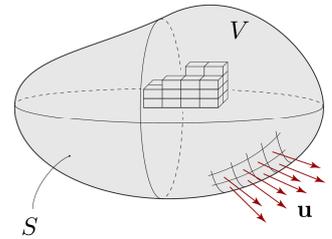
Geometrische Definition der Divergenz:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta S} d\vec{S} \cdot \vec{u} =$ 'Ausfluss pro Volumenelement'



Satz v. Gauß: Volumenintegral der Divergenz = Flussintegral über Fläche

$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{u}$
 (Volumen) (Aussenfläche von V)



Symbolisch: $\int_V \partial_i u^i = \int_{\partial V} dS_i u^i$
 suggestive Notation (Rand des Volumens = Oberfläche)

Divergenz in krummlinigen Koordinaten (d=3): $\vec{\nabla}_j = \partial_{y^j} \vec{r}(y) = \vec{e}_j n_j$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left[\partial_{y^1} (n_2 n_3 u^1) + \partial_{y^2} (n_3 n_1 u^2) + \partial_{y^3} (n_1 n_2 u^3) \right]$

