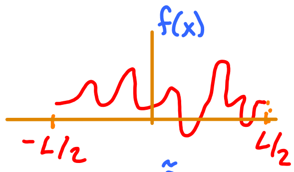
C6.3 Fourier-Transformation

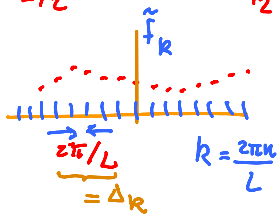
Entspricht Fourier-Reihe für $L = \infty \Longrightarrow$ 'Fourier-Integral'

Für endliches L: $f(x) \overset{(C6.2b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\,\tilde f_k$ (1)

$x \in (-L/2, L/2)$

$k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \tilde f_k = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2)

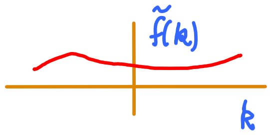




Für $L \to \infty$ stellt $\tilde f_k$ eine kontinuierliche Funktion $\tilde f(k)$ dar:

$$\tilde f_k \xrightarrow{L\to\infty} \boxed{\tilde f(k) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)} \qquad (3)$$

'Fourier-Transformation'



und Fourier-Summe wird ein Integral:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot \underbrace{2\pi \frac{1}{L}}_{=\Delta_k} \sum_k F(k) \xrightarrow{L\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k) \qquad (4)$$

$(1)_{L\to\infty}$:

$$\boxed{f(x) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\,\tilde f(k)}$$

'Fourier-Rücktransformation' (5)

Interpretation: f(x) wird zerlegt als Summe von unendlich vielen Funktionen e^{ikx} mit kontinuierlicher Variable k und Gewichtungsfaktor $\tilde f(k)$

Fourier-Transformation (zusammenfassend)

$f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$

Fourier-Rück-Transformation: $f(x) \overset{(a.5)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\,\tilde f(k)$ (1) $\xleftarrow{L\to\infty}$ $f(x) \overset{(C6.2b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\,\tilde f_k$ (1')

Fourier-Transformation: $\tilde f(k) \overset{(a.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2) $\xleftarrow{L\to\infty}$ $\tilde f_k \overset{(C6.2d.5)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2')

δ als Funktion v. x: $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ (3) $\xleftarrow{L\to\infty}$ $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mL) \overset{(C6.2g.7)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}$ (3')

δ als Funktion v. k: $2\pi\,\delta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}$ (4) $\xleftarrow{L\to\infty}$ $L\,\delta_{k,0} \overset{(C6.2c.3)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx}$ (4')

[folgt aus (3), mit $k \leftrightarrow x$]

Konsistenzcheck:

$$\tilde f(k) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} e^{ik'x}\,\tilde f(k')}^{(1)\ = f(x)} \qquad (5)$$

(1) in (2):

analog zu (C6.2d.3)

mutiges Vertauschen der Integrale:

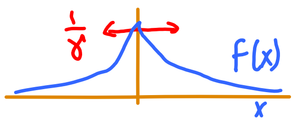
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\,\tilde f(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k'-k)x}}_{(4)\quad 2\pi\,\delta(k-k')} = \tilde f(k) \ \checkmark \qquad (6)$$

C6.3c

Beispiel:

Exponentialfunktion: $f(x) = e^{-|x|\gamma}$ (1)

$(\gamma > 0)$



$$\tilde{f}(k) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \quad (2)$$

2.ter Term:

$x \to -x$

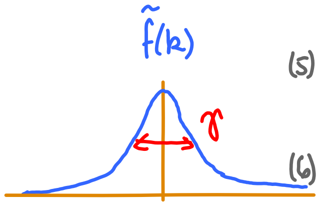
$\int_{-\infty}^{0} dx \to \int_{+\infty}^{0} (-dx) = \int_{0}^{\infty} dx$

Komplex-konjugierte vom ersten Term

$$= \int_0^{\infty} dx\, e^{-x(ik+\gamma)} + \overbrace{\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-x(-ik+\gamma)}}^{\text{Komplex-konjugierte vom ersten Term}} \quad (3)$$

$$= \frac{\cancel{e^{-(ik+\gamma)\infty}}^{=0} - 1}{-(ik+\gamma)} + \frac{-1}{-(-ik+\gamma)} \quad (4)$$

$$= \frac{(-\cancel{ik}+\gamma) + (\cancel{ik}+\gamma)}{(ik+\gamma)(-ik+\gamma)} \quad (5)$$



Fouriertransform. v. Exp-Funktion ist Lorenz-Funktion:

$$\boxed{\tilde{f}(k) = \frac{2\gamma}{k^2+\gamma^2} \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, e^{-|x|\gamma}} \quad (6)$$

'Fourier-Gegensätzlichkeit
[vergleiche (C6.2n)]

Übrigens:

$\lim_{\gamma \to 0} (6)$:

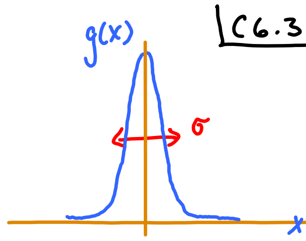
$$\boxed{2\pi\,\delta(k)} = \underbrace{\lim_{\gamma\to 0} \frac{\gamma/\pi}{k^2+\gamma^2}}_{(C6.2b.5)\ \delta(k)} \cdot (2\pi) \overset{(6)}{=} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \cdot 1} \quad (7)$$

Bestätigt (b.3) ✓

C6.3d

Beispiel: Gauß-Funktion

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}} \quad (1)$$



Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) = 1$ (2)

Fourier-Transformierte:

$$\tilde{g}(k) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx}\; g(x) \quad (3)$$

'quadratisches Ergänzen'

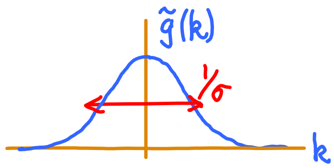
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{(x^2 + 2\sigma^2 ikx)}_{= (x+\sigma^2 ik)^2 - (\sigma^2 ik)^2}} \quad (4)$$

Substitution:

$x + \sigma^2 ik \equiv \tilde{x}$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\tilde{x}^2}}_{\overset{(2)}{=} 1 \text{ normiert!}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^4 k^2} \quad (5)$$

$$\boxed{\tilde{g}(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}} \quad (6)$$



Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion ist wieder eine Gauß-Funktion,
mit invers proportionaler Breite: je breiter $g(x)$, d.h. je größer σ, je schmaller $\tilde{g}(k)$

[diese Tatsache impliziert Heisenberg-Unschärferelation...!]

<u>Anmerkung:</u> es gibt in der Literatur viele unterschiedliche Konventionen!

C6.3e

1) Physiker benutzen unterschiedliche(!) Konventionen für Längen und Zeiten:

$$f(x,t) \overset{(b.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{+ikx}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(k,\omega) \qquad (1)$$

$$\tilde{f}(k,\omega) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-ikx}\, e^{i\omega t}\, f(x,t) \qquad (2)$$

e^{ikx} ist periodisch:

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ = 'Wellenlänge'

k = 'Wellenzahl'

$e^{-i\omega t}$ ist periodisch:

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ = 'Periode'

ω = 'Kreisfrequenz'

2) In d Raum-Dimensionen:

$$f(\vec{x},t) \overset{(1)}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}}_{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1}{2\pi}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_d}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, \underbrace{e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{e^{ik_1x^1}\, e^{ik_2x^2}\,\cdots\, e^{ik_dx^d}}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(\vec{k},\omega) \qquad (3)$$

$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$

$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$

$\vec{k}\cdot\vec{x} = k_1 x^1 + \dots + k_d x^d$

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d^dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{i\omega t}\, f(\vec{x},t) \qquad (4)$$

C6.3f

3) Schlampige Physikernotation: oft wird dasselbe Symbol benutzt für eine Funktion $f(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $f(\omega)$ [statt $\tilde{f}(\omega)$]

Man erkennt aber am Argument, t oder ω, welche von beiden gemeint ist.

4) Man kann den Faktor 2π schieben wohin man will:

Physik-Konvention:

$$f(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (1)$$

$$\tilde{f}(\omega) \overset{(e.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \qquad (2)$$

4.1) Mathematische Literatur bevorzugt oft symmetrische Schreibweise:

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \sqrt{2\pi}\, \tilde{\tilde{f}}(\omega) \qquad (3)$$

$$f(t) \overset{(1,3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\tilde{f}}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (4)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(\omega) \overset{(2,3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{+i\omega t} \qquad (5)$$

4.2) Physik benutzt oft $\omega = 2\pi f$ (6)

'Winkelfrequenz' Frequenz

$$f(t) \equiv F(t), \qquad \tilde{f}(\omega) \equiv \tilde{F}(f) \qquad (7)$$

$$F(t) \overset{(1,6,7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} df\, \tilde{F}(f)\, e^{-i2\pi f t} \qquad (8)$$

$$\tilde{F}(f) \overset{(2,6,7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, F(t)\, e^{i2\pi f t} \qquad (9)$$

Allgemeine Eigenschaften:

C6.3g

$$\tilde f(\omega) \overset{(e.2)}{=} \int dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \qquad (1)$$

1) Für eine reelle Funktion, $f(t) = \overline{f(t)}$ (2) gilt:

1a) $$\boxed{\tilde f(\omega) = \overline{\tilde f(-\omega)}} \qquad (3)$$

[konsistent mit (C6.1m.4) für Fourier-Reihen]

denn: $$\overline{\tilde f(-\omega)} \overset{(1)}{=} \int dt\, \underbrace{\overline{f(t)}}_{\overset{(2)}{=} f(t)}\, e^{+i\omega t} \overset{(1)}{=} \tilde f(\omega) \qquad \square \qquad (4)$$

1b) $$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\, \tilde f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \cos\omega t & (5) \\ \mathrm{Im}\, \tilde f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \sin\omega t & (7) \end{aligned}}$$

denn: $$\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] = \cos\omega t \qquad (6)$$

[einsetzen in (1)]

$$\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right] = \sin\omega t \qquad (8)$$

$\square$

1c) falls f(t) $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist,

$$\boxed{\begin{aligned} f(-t) &= \pm f(t) & (9) \\ \tilde f(\omega) &= \left\{\begin{matrix}\text{reell}\\ \text{imaginär}\end{matrix}\right. & (10) \end{aligned}}$$

gilt: (10)

denn $$\overline{\tilde f(\omega)} \overset{(1)}{=} \int dt\, \underbrace{\overline{f(-t)}}_{\overset{(9)}{=} \pm f(t)}\, e^{+i\omega t} \overset{(1)}{=} \pm \tilde f(\omega) \qquad (11)$$

Substitution $t \to -t$

$\square$

Weitere Fourier-Transformations-Identitäten

C6.3h

Seien f, g zwei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$

Parseval-Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{f(x)}\, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \overline{\tilde f(k)}\, \tilde g(k) \quad (1) \quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \overline{f(x)}\, g(x) \overset{(C6.2h.5)}{=} \frac{1}{L}\sum_k \overline{\tilde f_k}\, \tilde g_k \quad (1')$$

Plancherel-Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde f(k)|^2 \quad (2) \quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad \int_{-L/2}^{L/2} dx\, |f(x)|^2 \overset{(C6.2h.6)}{=} \frac{1}{L}\sum_k |\tilde f_k|^2 \quad (2')$$

Faltung:

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\, g(x') = (g * f)(x) \quad (3) \quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad (f * g)(x) \overset{(C6.2o.1)}{\equiv} \int_{-L/2}^{L/2} dx'\, f(x-x')\, g(x') = (g * f)(x) \quad (3')$$

Faltungstheorem:

$$\widetilde{(f * g)}(k) = \tilde f(k)\, \tilde g(k) \quad (4) \quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad \widetilde{(f * g)}_k \overset{(C6.2o.6)}{=} \tilde f_k\, \tilde g_k \quad (4')$$

<u>Parseval-Identität, explizit:</u> (vergleiche Seite C6.2h)

Hier zur Abwechslung in der $t \leftrightarrow \omega$ Version; [die $x \leftrightarrow k$ Version ist analog]

Seien f, g zwei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$
$t \mapsto g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \overline{f(t)}\, g(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{+i\omega t}\, \overline{\tilde{f}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, e^{-i\omega' t}\, \tilde{g}(\omega') \qquad (1)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(\omega)}\, \tilde{g}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{it(\omega-\omega')}}_{(b.3)\quad 2\pi\,\delta(\omega-\omega')} \qquad (2)$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(\omega)}\, \tilde{g}(\omega)} \qquad (3)$$

Speziell:

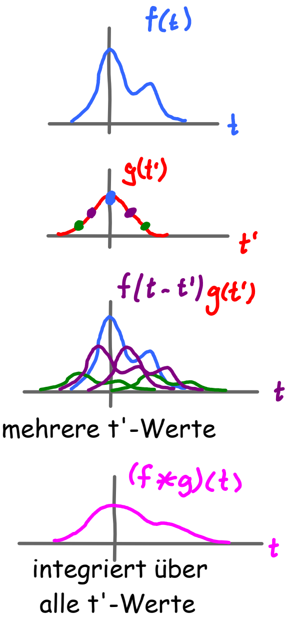
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2 \overset{(3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, |\tilde{f}(\omega)|^2} \qquad (4)$$

<u>Faltungstheorem, explizit:</u> (vergleiche Seite C6.2o)

<u>Definition: 'Faltung'</u>

$$\boxed{(f * g)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; f(t-t')\, g(t')} \qquad (1)$$

Fourier-Darstellung der Faltung: [Details sind analog zu (C6.2o.1-7)]



$$(f*g)(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\, \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, e^{-i\omega' t'}\, \tilde{g}(\omega') \qquad (2)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{g}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt'\; e^{it'(\omega-\omega')}}_{(b.3)\quad 2\pi\,\delta(\omega-\omega')} \qquad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} \underbrace{\tilde{f}(\omega)\, \tilde{g}(\omega)}_{\equiv\, \widetilde{(f*g)}(\omega)} \qquad (4)$$

$$\boxed{\widetilde{(f*g)}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\, \tilde{g}(\omega)}$$ 'Faltungstheorem' (5)

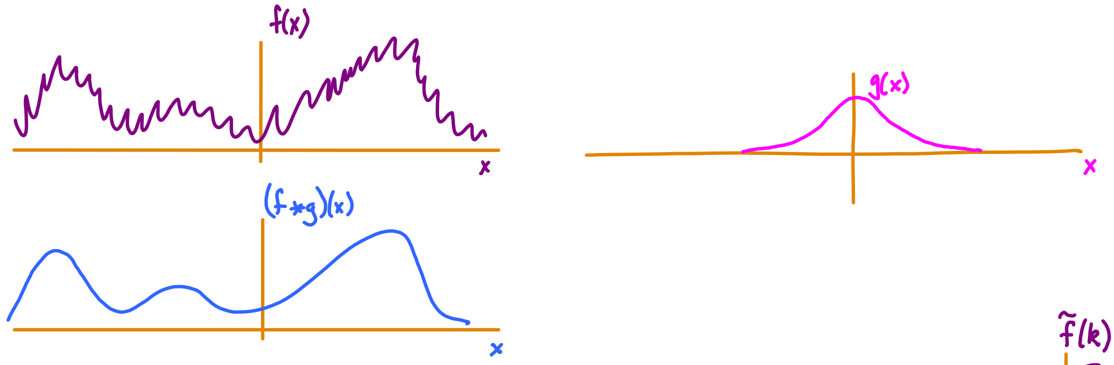
Faltung im Fourier-Raum:

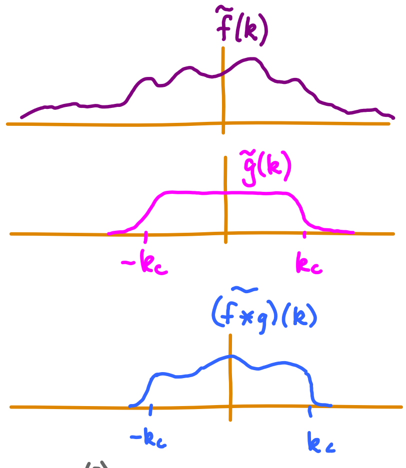
$$(\tilde{f} * \tilde{g})(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega-\omega')\, \tilde{g}(\omega') \Rightarrow \widehat{(\tilde{f} * \tilde{g})}(t) = f(t)\, g(t) \qquad (6)$$

Anwendung v. Faltungstheorem: Tiefpassfilter

C6.3k

Tiefpassfilter dämpft schnelle Fluktuationen weg, läßt langsame durch !





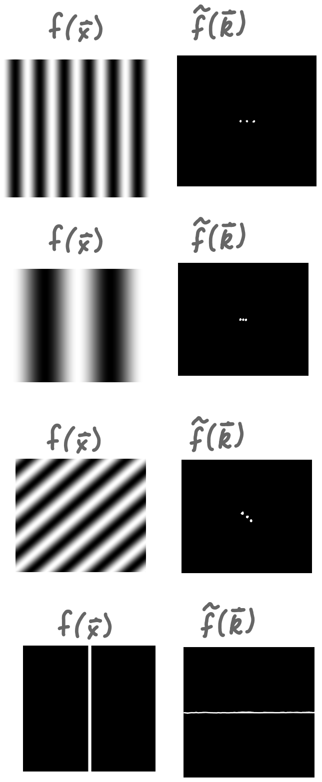
Wähle $g(x)$ so, dass $\tilde g(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |k| \lesssim k_c \\ 0 & \text{falls } |k| \gtrsim k_c \end{cases}$ (1)

Dann: $\widetilde{(f*g)}(k) \overset{(0.6)}{=} \tilde f(k)\, \tilde g(k) = \begin{cases} \tilde f(k) & \text{falls } |k| \lesssim k_c \\ 0 & \text{falls } |k| \gtrsim k_c \end{cases}$ (2)

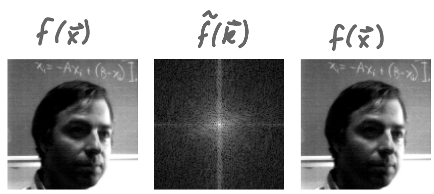
Somit: $(f*g)(x) = \int dx' f(x-x')\, g(x') \simeq \int_{-k_c}^{k_c} \frac{dk}{2\pi} \tilde f(k)\, e^{ikx}$ (3)

C6.3l

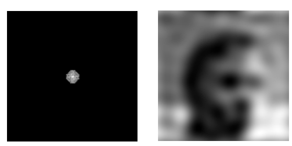
Intuition: wie wird Information in einer Fourier-Transformation gespeichert ?
cns-alumni.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html



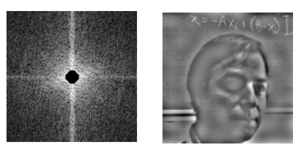
Fourier-Gegensätzlichkeit



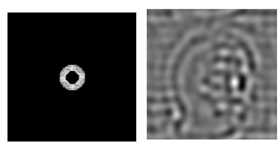
Original Fourier Rekonstruiert



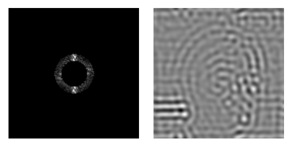
Tiefpass-Filter Rekonstruiert



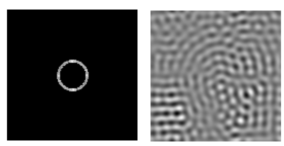
Hochpass-Filter Rekonstruiert



Band-Filter Rekonstruiert



Band-Filter Rekonstruiert



Band-Filter Rekonstruiert

Ableitungen: (Vergleiche Seite C6.2p) Physikerphasenkonvention: unterschiedliche Vorzeichen **C6.3m**

$$f(x,t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)}\,\tilde{f}(k,\omega) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)}\,\underbrace{\left[+ik\,\tilde{f}(k,\omega)\right]}_{\equiv\, \widetilde{\partial_x f}(k,\omega)} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)}\,\underbrace{\left[-i\omega\,\tilde{f}(k,\omega)\right]}_{\equiv\, \widetilde{\partial_t f}(k,\omega)} \qquad (3)$$

Merkregel in Physikerkonvention: $\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\xrightarrow{FT} ik}$, $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\xrightarrow{FT} -i\omega}$ (4)

Grund für Phasenkonvention liegt in der Beschreibung von Wellen: die Phase $e^{i(kx-\omega t)}$ ist konstant entlang einer Trajektorie, für die $kx-\omega t = 0 \Rightarrow x = \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v_p} t = v_p t$

Die Vorzeichenkonvention führt zu einer positiven 'Phasengeschwindigkeit' falls ω und k dasselbe Vorzeichen haben.

C7.5 Lösung von Differentialgleichungen mittels Fourier-Transformation

C7.5a

Unterdämpfter HO mit Antrieb: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x \overset{(C7.4r.1)}{=} f(t)$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Fourier-Ansatz für Antrieb:

$$f(t) \overset{(C6.3e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

und für Lösung:

$$x(t) \overset{(C6.3e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{x}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

(3), (2) in (1) eingesetzt:

(C6.3m.4) $d_t \xrightarrow{FT} -i\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\underbrace{\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right]}_{(-i\omega)^2 - 2\gamma i\omega + \Omega^2}\tilde{x}(\omega)\, e^{-i\omega t} \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (4)$$

$$\left[\Omega^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega\right]\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \qquad (4')$$

(4) muss für beliebige t gelten: $\Rightarrow$

$$\tilde{x}(\omega) \overset{(4')}{=} \frac{\tilde{f}(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \qquad (5)$$

$\leftarrow$ eingesetzt in (3) liefert gesuchte Lösung $x(t)$ ✓

'Dynamische Suszeptibilität' :

$$\boxed{\tilde{\chi}(\omega) \equiv \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \overset{(5)}{=} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}} \qquad (6)$$

(C7.5a.5-6): $\tilde{x}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{f}(\omega) \overset{(C6.3j.5)}{=} (\widetilde{\chi * f})(\omega)$ (1) C7.5b

Faltungstheorem, rückwärts gelesen: $x(t) \overset{(6.3j.1)}{=} (\chi * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, \chi(t-u) f(u)$ (2)

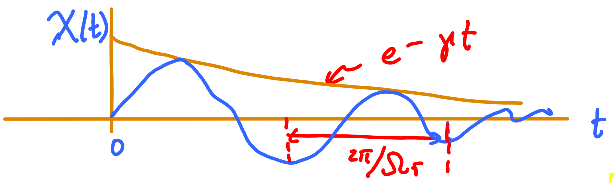
Rücktransformierte der dynamischen Susz.: $\chi(t) \overset{(C6.3e.1)}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\chi}(\omega)\, e^{-i\omega t}$ (3)

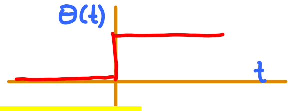
Betrachte nun unterdämpften Fall: $\gamma < \Omega$, mit $\Omega_r \overset{(C7.4j.1)}{=} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ (4)

Integral liefert (siehe Bronstein Formelsammlung, oder Kapitel C9): $\boxed{\chi(t) \overset{(3)}{=} \frac{1}{\Omega_r} e^{-\gamma t} \sin \Omega_r t\; \Theta(t)}$ (5)

Heavyside-Stufenfunktion

$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ (6)



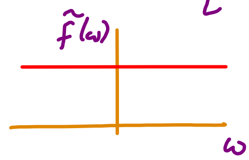


Stufenfunktion garantiert 'Kausalität': $\boxed{x(t) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{t} du\, \chi(t-u) f(u)}$ [reproduziert (C7.4t.4)] (7)

Die Lösung x(t) hängt nur ab von der Antriebskraft bei <u>früheren</u> Zeiten, $u < t$

<u>Interpretation: $\chi(t)$ ist die Antwort auf eine δ -Kraft:</u> $f(t) = \delta(t)$ C7.5c

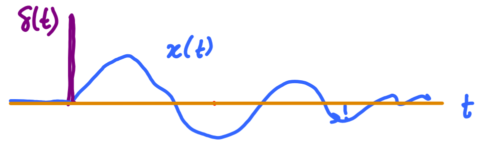
Sei $f(t) = \delta(t) \overset{(C6.3b.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} \cdot \underbrace{1}_{\tilde{f}(\omega)} \Rightarrow \tilde{f}(\omega) = 1$ (1)



Eingesetzt in (C7.5b.1): $\tilde{x}(\omega) \overset{(C7.5b.1)}{=} \tilde{\chi}(\omega) \cdot 1$ (2) $\Rightarrow$ $x(t) = \chi(t)$ (3)

Fazit: $\chi(t)$ ist die 'Antwort' auf (d.h. Lösung von (C7.5a.1) für) eine δ -Kraft:

$$\boxed{\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \chi(t) = \delta(t)} \quad (4)$$



Antwort auf δ -Puls wird auch die 'Green'sche Funktion' der DGL genannt.
Notation: $g(t)$ $(= \chi(t))$

Noch ein Beweis, dass (C7.5b.2) die allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb ist:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) x(t) \quad (5)$$

$$= \left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du\, \chi(t-u) f(u)}^{(C7.5b.2)} \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \delta(t-u) f(u) = f(t) \quad (6)$$

Gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten, mittels Green'scher Funktion:

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\equiv \hat{L}(t)} x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Kurznotation: $\boxed{\hat{L}(t)\, x(t) = f(t)}$ (2) mit $\hat{L}(t) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell d_t^\ell$ (3)

(C6.3l.4)

Fourier-transformiert: $\tilde{L}(-i\omega)\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ (4) mit $\tilde{L}(-i\omega) \equiv \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (-i\omega)^\ell$ (5)

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{g}(\omega)\, \tilde{f}(\omega)$ (6) mit $\tilde{g}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \dfrac{1}{\tilde{L}(-i\omega)}$ (7)

'Green'sche Funktion' erfüllt: $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{\overset{(C7.8c.1)}{=} \tilde{\delta}(\omega)}$ (8) $\xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}}$ $\hat{L}(t)\, g(t) \overset{(1)}{=} \delta(t)$ (9)

[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): $\boxed{x(t) \overset{(C6.3k.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, g(t-u)\, f(u)}$ (10)

d.h. Green'sche Funktion liefert allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

Check: $\hat{L}(t)\, x(t) \overset{(10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \underbrace{\hat{L}(t)\, g(t-u)}_{\overset{(9)}{=} \delta(t-u)} f(u) = f(t) \overset{\checkmark}{=} (1)$ (11)

Zusammenfassung: C6.3 Fourier-Transformation

$f: (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$

Vorzeichen ist Konvention: in Physik +, Mathe: -

Fourier-Rück-Transformation: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k)$

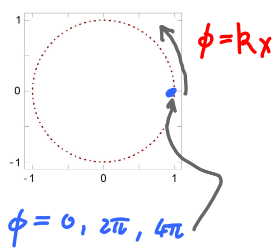
Fourier-Transformation: $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, f(x)$

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:

'Vollständigkeit': $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} = \delta(x)$

'Orthonormalität' : $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} = 2\pi\, \delta(k)$

$z = e^{i\phi}$



Wichtige Beispiele:

Exponentialfunktion $\longleftrightarrow$ Lorenzfunktion

Gauß-Funktion $\longleftrightarrow$ Gauß-Funktion

ZC6.3b

Physikerkonvention: $$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)}\, \tilde{f}(k,\omega) \qquad (1)$$

Merkregel: $$\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik \qquad \frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega \qquad (2)$$

Parseval: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{f(t)}\, g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(k)}\, \tilde{g}(k) \qquad (3)$$

Plancherel: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{f}(k)|^2 \qquad (4)$$

Faltung: $$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\, g(x') = (g * f)(x) \qquad (5)$$

Faltungstheorem: $$\widetilde{(f * g)}(k) = \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k) \qquad (6)$$

Zusammenfassung: C7.5 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green

ZC7.5a

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\equiv \hat{L}(d_t)} x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Kurznotation: $$\hat{L}(d_t)\, x(t) = f(t) \qquad (2)$$

Fourier-transformiert: $$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(\omega) \qquad (3)$$

$$\tilde{L}(-i\omega)\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \qquad (4) \qquad \text{mit} \quad \tilde{L}(-i\omega) \equiv \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (-i\omega)^\ell \qquad (5)$$

Aufgelöst: $$\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{G}(\omega)\, \tilde{f}(\omega) \qquad (6) \qquad \text{mit} \quad \tilde{G}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} \qquad (7)$$

Green'sche Funktion erfüllt: $$\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{G}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{= \tilde{\delta}(\omega)} \qquad (8) \qquad \xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}} \qquad \hat{L}(d_t)\, G(t) \overset{(1)}{=} \delta(t) \qquad (9)$$

[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, G(t-u)\, f(u) \qquad (10)$$

= allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!