

L9.1 Konzeptionelle Grundlage der Fourier-Entwicklung

L 9.1 a
Z 9.1 a

Kernaussage: Fourier-Entwicklung ist Basiswechsel im Funktionenraum

Zur Erinnerung: Eigenschaften einer Basis in \mathbb{C}^n :

	Invariante Größe	In Komponenten ausgedrückt
Element:	(1) $\vec{v} = \sum_j \vec{e}_j v_j$ (1)	(2) $v^i = (\vec{v})^i = \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle \stackrel{(5,2')}{=} \delta_{ij} v_j$ (1')
Standardbasis: $j=1, \dots, n$	(2) $\vec{e}_j \stackrel{(6,7)}{=} \sum_\alpha \vec{w}_\alpha \langle \vec{w}_\alpha, \vec{e}_j \rangle$ (17) (2)	(3) $(\vec{e}_j)^i = \delta^i_j$ (2')
Skalarprodukt:	(4) $\langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = \delta_{jj}$ (3) (5) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	(6) $\sum_i \bar{u}^i v^i$ (3')
Allgemeine Basis: $\alpha=1, \dots, n$	(8) \vec{w}_α (4)	(9) $\vec{w}_\alpha^i \stackrel{(11)}{=} \langle \vec{e}_i, \vec{w}_\alpha \rangle$ (4')
Orthonormalität:	(10) $\langle \vec{w}_\alpha, \vec{w}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ (5)	(11) $\sum_i \bar{w}_\alpha^i w_\beta^i \stackrel{(3')}{=} \delta_{\alpha\beta}$ (5')
Entwicklung:	(12) $\vec{v} = \sum_\alpha \vec{w}_\alpha v^\alpha$ (6) (7) $\stackrel{(7)}{=} \sum_\alpha \vec{w}_\alpha \langle \vec{w}_\alpha, \vec{v} \rangle$ (16)	(13) $v^i \stackrel{(6)}{=} \sum_\alpha \underbrace{w_\alpha^i}_{T^i_\alpha} v^\alpha$ Basis-Wechsel (6')
Koeffizienten:	(14) $v^\alpha \stackrel{(6,5)}{=} \langle \vec{w}_\alpha, \vec{v} \rangle$ (7)	(15) $v^\alpha \stackrel{(7,2')}{=} \sum_i \bar{w}_\alpha^i v^i$ Basis-Wechsel (7')
Vollständigkeit:	(18) $\delta_{jj} \stackrel{(3)}{=} \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle$ (2) $\stackrel{(2)}{=} \sum_\alpha \langle \vec{e}_j, \vec{w}_\alpha \rangle \langle \vec{w}_\alpha, \vec{e}_j \rangle$ (9)	(8) $\delta_{jj} \stackrel{(9)(4)}{=} \sum_\alpha \underbrace{w_\alpha^j \bar{w}_\alpha^j}_{(6')}$ (19) $\stackrel{(6')}{=} \sum_\alpha T^j_\alpha \bar{T}^j_\alpha = (T T^\dagger)^j_j$ (8')

Analoge Strukturen existieren im Funktionenraum:

$$L^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2 < \infty \right\}$$

$x \mapsto f(x)$

$\vec{v} \leftrightarrow f$	$v^i \leftrightarrow f(x)$	L 9.1 b Z 9.1 b
$\vec{e}_j \leftrightarrow \delta_y$	$e^i_j \leftrightarrow \delta_y(x)$	
$\vec{w}_\alpha \leftrightarrow \psi_k$	$w_\alpha^i \leftrightarrow \psi_k(x) \equiv \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}}$	

	Invariante Größe	In Komponenten ausgedrückt
Element:	(1) f (1)	$f(x) \stackrel{(7)}{=} \langle \delta_x, f \rangle \stackrel{(6)}{=} \int dx' \delta(x-x') f(x')$ (1')
Standardbasis:	(4) $\delta_y \stackrel{(6,7)}{=} \sum_k \psi_k \langle \psi_k, \delta_y \rangle$ (9) (2)	(5) $\delta_y(x) = \delta(y-x)$ (2')
Skalarprodukt:	(2) $\langle f, g \rangle$ (3) (9) $\langle \delta_{y'}, \delta_y \rangle = \delta(y'-y)$ (8)	(3) $\int dx \bar{f}(x) g(x)$ (3') (8) $\int dx \delta(y'-x) \delta(y-x) \stackrel{(11')}{=} \delta(y'-y)$
Allgemeine Basis: $k = \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$	(10) ψ_k (4)	(11) $\psi_k(x) \stackrel{(11')}{=} \langle \delta_x, \psi_k \rangle \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ (4')
Orthonormalität:	(13) $\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$ (5)	(12) $\int dx \psi_k(x) \psi_{k'}(x) \stackrel{(4')}{=} \int dx \frac{e^{i(k'-k)x}}{L} = \delta_{kk'}$ (5')
Entwicklung:	(15) $f = \sum_k \psi_k \tilde{f}_k$ (6) (7) $\stackrel{(7)}{=} \sum_k \psi_k \langle \psi_k, f \rangle$ (13)	(14) $f(x) \stackrel{(14)}{=} \sum_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \tilde{f}_k$, $L = \frac{1}{\sqrt{L}} \tilde{f}_k$ Basis-Wechsel (6')
Koeffizienten:	(17) $\tilde{f}_k \stackrel{(6,5)}{=} \langle \psi_k, f \rangle$ (7)	(16) $\tilde{f}_k \stackrel{(16)}{=} \int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} f(x)$ Basis-Wechsel (7')
Vollständigkeit:	(20) $\delta(y'-y) \stackrel{(3)}{=} \langle \delta_{y'}, \delta_y \rangle$ (2) $\stackrel{(2)}{=} \sum_k \langle \delta_{y'}, \psi_k \rangle \langle \psi_k, \delta_y \rangle$ (9)	(8) $\delta(y'-y) \stackrel{(9)(4')}{=} \sum_k \underbrace{\psi_k(y') \bar{\psi}_k(y)}_{(22)}$ (22) $\frac{1}{L} e^{ik(y'-y)}$ (8')

Herleitung von 'Vollständigkeit' (a.8) & (b.8):

L 9.1c

Zunächst: Entwickle alte Basisvektoren in neuer Basis:

$$\vec{e}_j \stackrel{(a.6), (a.7)}{=} \sum_{\alpha} \bar{w}_{\alpha} \langle \bar{w}_{\alpha}, \vec{e}_j \rangle \quad (1)$$

mit Entwicklungskoeffizienten:

$$\langle \bar{w}_{\alpha}, \vec{e}_j \rangle \stackrel{(L5.4b.3)}{=} \overline{\langle \vec{e}_j, \bar{w}_{\alpha} \rangle} \stackrel{(a.4')}{=} \overline{w_{j\alpha}} \quad (2)$$

Aus Orthonormalität der alten Basis folgt:

$$\delta_{jj} = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle \quad (3)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \sum_{\alpha} \langle \vec{e}_j, \bar{w}_{\alpha} \rangle \langle \bar{w}_{\alpha}, \vec{e}_j \rangle \quad (4)$$

$$\stackrel{(a.4')}{=} \sum_{\alpha} w_{j\alpha} \overline{w_{j\alpha}} \quad (5)$$

$$\stackrel{\checkmark}{=} \stackrel{(a.8)}{=} \delta_{jj}$$

$$\delta_y \stackrel{(b.6, b.7)}{=} \sum_k \psi_k \langle \psi_k, \delta_y \rangle \quad (1')$$

$$\langle \psi_k, \delta_y \rangle = \overline{\langle \delta_y, \psi_k \rangle} \stackrel{(b.4')}{=} \overline{\psi_k(y)} \quad (2')$$

$$\delta(y'-y) = \overbrace{\int dx \delta(y-x) \delta(y'-x)} \quad (3')$$

$$\stackrel{(1')}{=} \sum_k \langle \delta_{y'}, \psi_k \rangle \langle \psi_k, \delta_y \rangle \quad (4')$$

$$\stackrel{(2')}{=} \sum_k \psi_k(y') \overline{\psi_k(y)} \quad (5')$$

$$\stackrel{(b.4')}{=} \sum_k \frac{e^{ik(y'-y)}}{L} \stackrel{\checkmark}{=} \stackrel{(b.8)}{=} \delta(y'-y) \quad (6')$$

C6.2 (Fortsetzung) Fourier-Reihen für periodische Funktionen

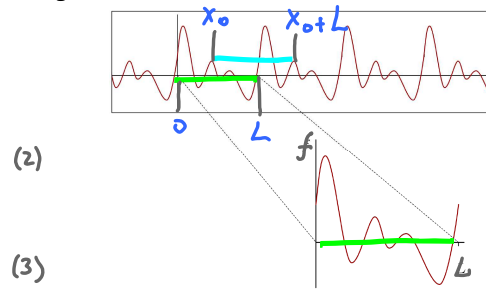
C6.2j

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ periodisch, mit Periode L : $f(x+L) = f(x)$ (1)
(und stückweise stetig differenzierbar)

Auch für diesen Fall gilt die Fourier-Reihen-Darstellung (b.3), mit $k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$:

$$f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$$

$$\tilde{f}_k \stackrel{(d.2)}{=} \int_0^L e^{-ikx} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+L} e^{-ikx} f(x) dx$$



Integral kann über eine beliebige Periode genommen werden, wegen (1) und (5)

Beweis v. (3): identisch zur Herleitung auf Seite C6.2d

Begründung:

Fourier-Moden sind periodisch:

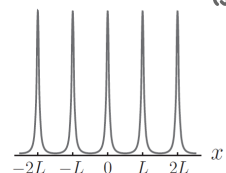
$$e^{ik(x+L)} = e^{ikx} \overbrace{e^{i(2\pi n/L) \cdot L}}^{e^{i2\pi n} = 1} = e^{ikx} \quad (4)$$

Folglich ist auch (2) periodisch:

$$f(x+L) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{L} \sum_k \overbrace{e^{ik(x+L)}}^{(4) = e^{ikx}} \tilde{f}_k = f(x) \quad (5)$$

Periodische delta-Funktion:

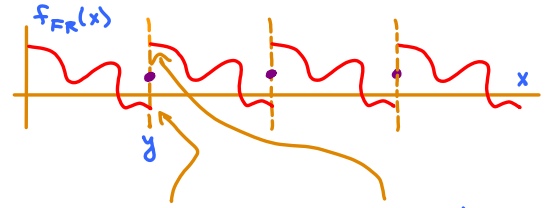
$$\frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \stackrel{(9.7)}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x+mL)$$



Anmerkung: Falls $f(x)$ nicht ganz glatt ist, sondern nur stückweise stetig differenzierbar ist (d.h. Sprünge hat), gilt (Satz v. Dirichlet):

C6.2k

Die Fourier-Reihe (j.2), $f_{FR}(x)$, konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(x)$. (1)



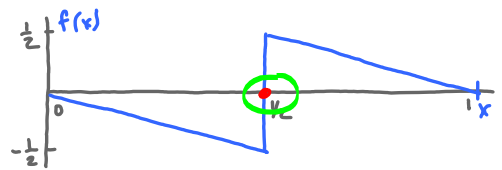
An den Unstetigkeitsstellen ist der Wert der Fourier-Reihe gleich dem Mittelwert der einseitigen Grenzwerte:

$$f_{FR}(y) = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(y-\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(y+\varepsilon) \right\} \quad (1)$$

Grund für (1): [vergleiche (C6.2d.3)]:

$$f_{FR}(y) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{iky} \tilde{f}_k = \int_I dx \underbrace{\frac{1}{L} \sum_k e^{iky} e^{-ikx}}_{\substack{(g.8) \\ \delta(y-x)}} e^{ik(y-x)} f(x) \stackrel{(C6.1g.8)}{=} \int_I dx \delta(y-x) f(x) = f(y) \quad (2)$$

Beispiel von Seite C6.2f:



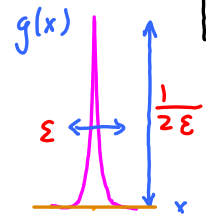
$$f(x) \stackrel{(C6.2f.1)}{=} \begin{cases} -x & \forall x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & \forall x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad f_{FR}(x) \stackrel{(C6.2g.4)}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \frac{(-1)^m}{m} \sin(2\pi m x), \quad f_{FR}(\frac{1}{2}) = 0$$

Beispiel: periodische Folge v. scharfen Peaks:

C6.2l

Betrachte normierten 'Exponentialpuls':

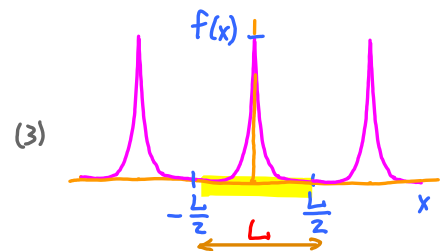
$$g(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon} \quad (1)$$



Gewicht: $\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} = -e^{-x/\varepsilon} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (2)$

Periodische Kette solcher Peaks:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - nL)$$



Berechne Fourier-Koeffizienten von $f(x)$, für $\varepsilon \ll L$:

$$\tilde{f}_k \stackrel{(j.3)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ikx} \underbrace{f(x)}_{\approx g(x)} \quad (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{weil } \varepsilon \ll L \text{ (scharfe Peaks, gut getrennt)} \\ \text{gilt im Intervall } x \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \text{ dass } f(x) \approx g(x) \end{array} \right.$$

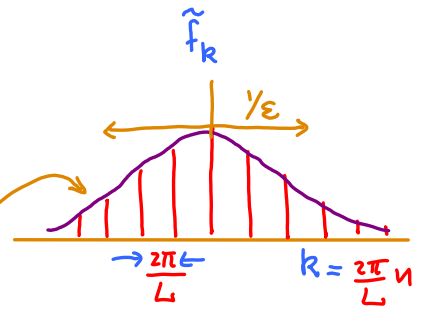
$$\stackrel{(1)}{=} \int_0^{L/2} dx e^{-ikx} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} + \int_{-L/2}^0 dx e^{-ikx} \frac{1}{2\varepsilon} e^{+x/\varepsilon} \quad (5)$$

$$= \int_0^{L/2} dx \left[e^{-ikx} + e^{ikx} \right] \frac{1}{2\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} \quad \leftarrow [x \rightarrow -x]$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e^{-(ik + i/2\varepsilon)x} \Big|_0^{L/2}}{- (ik + i/2\varepsilon)} + \text{komplex konjugiert} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e^{-(ik + i/2\varepsilon)L/2} - 1}{- (ik + i/2\varepsilon)} + \text{komplex konjugiert} \quad (2)$$

$\sim e^{-L/2\varepsilon} \approx 0$ wenn $\varepsilon \ll L$

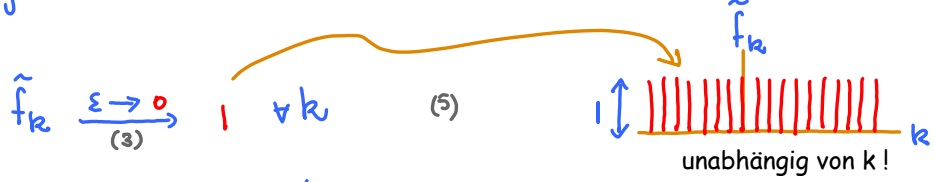


$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\varepsilon k + 1} + \frac{1}{-i\varepsilon k + 1} \right] = \frac{1}{\varepsilon^2 k^2 + 1} \quad (3)$$

'Diskretes Frequenzspektrum' ('Frequenzkamm') mit Lorentzkurve als Einhüllenden

Konsistenzcheck:

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$: $g(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x)$ (4)



(5) reproduziert die Fourier-Komponenten vom periodischen delta-Puls:

$$f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{R}} e^{ikx} \tilde{f}_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL) \quad (6)$$

(5) $\tilde{f}_k = 1$ (h.7) entspricht (1.3) für $\varepsilon \rightarrow 0$

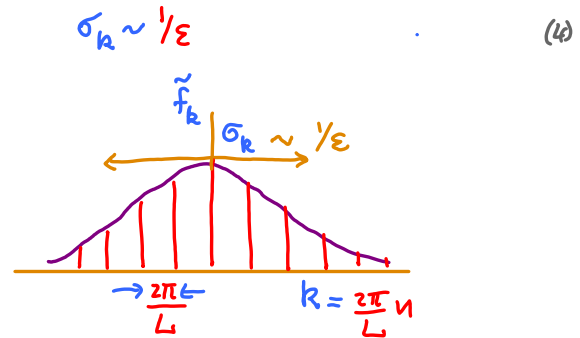
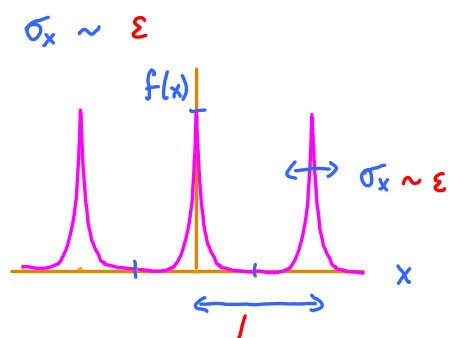
Bemerkung: für $\varepsilon \neq 0$, vergleiche Schärfe der Pulse in

x-Darstellung:

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x - mL|/\varepsilon} \quad (1)$$

k-Darstellung:

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\varepsilon^2 k^2 + 1} \quad (2)$$

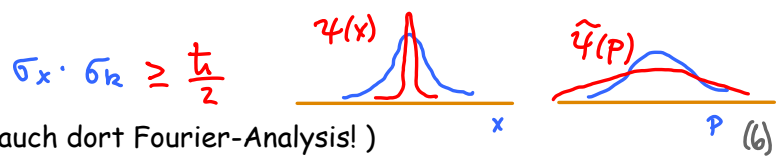


Faustregel:

$\sigma_x \cdot \sigma_k \sim 1$ (5)
'Fourier-Gegensätzlichkeit' ('Fourier reciprocity')

Räumlich scharfe Pulse (σ_x klein) haben ein breites 'Spektrum an Wellenlängen' (σ_k groß)

Heisenbergs Unschärferelation in der Quantenmechanik ist ganz analog:



(und zu Grunde liegende Mathematik ist auch dort Fourier-Analyse!)

Faltung: Seien $f(x) = f(x+L)$ und $g(x) = g(x+L)$ periodische Funktionen. C6.20

Def: 'Faltung von f und g': $(f * g)(x) \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} f(x-x')g(x') dx'$ (1)
Integral über beliebige Periode

Die Faltung ist wieder periodisch: $(f * g)(x) = (f * g)(x+L)$ (2)

Beweis: via Fourier-Darstellung der Faltung: [Details sind analog zu Seite k, Parseval]

$$(f * g)(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \left[\frac{1}{L} \sum_k \tilde{f}_k e^{ik(x-x')} \right] \left[\frac{1}{L} \sum_{k'} \tilde{g}_{k'} e^{ik'x'} \right] \quad (3)$$

(kühnes Vertauschen von Integral und Summe) $= \frac{1}{L} \sum_k \frac{1}{L} \sum_{k'} \tilde{f}_k \tilde{g}_{k'} e^{ikx} \int_{x_0}^{x_0+L} dx' e^{i(k'-k)x'}$ (4)
(C.3) $L \delta_{kk'}$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{L} \sum_k \underbrace{\tilde{f}_k \tilde{g}_k}_{\equiv (\tilde{f * g})_k} e^{ikx} = \text{offensichtlich wieder periodisch!} \quad (5)$$

Faltungstheorem: Fourierkoeffizient der Faltung ist Produkt der Fourierkoeffizienten:
 (nützlich zur Abkürzung von Rechnungen) $(\tilde{f * g})_k \stackrel{(5)}{=} \tilde{f}_k \tilde{g}_k \quad (6) \quad [= \tilde{g}_k \tilde{f}_k \stackrel{(6)}{=} (\tilde{g * f})_k] \quad (7)$

Faltung ist kommutativ: $(f * g)(x) \stackrel{(7)}{=} (g * f)(x)$

Fourier-Reihe einer Ableitung: C6.2p

$$f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k \quad (1) \quad \tilde{f}_k \stackrel{(d.2)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f(x) \quad (2)$$

$\frac{d}{dx}(1): f'(x) = \frac{1}{L} \sum_k \frac{d}{dx} e^{ikx} \tilde{f}_k = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \underbrace{(ik \tilde{f}_k)}_{\equiv \tilde{f}'_k} \quad (3)$
(4) Fourier-Komponente von f'(x)

Ist (3) konsistent mit (2)? Check:

$$\tilde{f}'_k \stackrel{(2)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f'(x) \stackrel{(8)}{=} \underbrace{e^{-ikx} f(x)}_{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}} \Big|_0^L - \int_0^L dx (-ik) e^{-ikx} f(x) \quad (4)$$

= 0 wegen Periodizität

$$= ik \underbrace{\int_0^L dx e^{-ikx} f(x)}_{\stackrel{(2)}{\tilde{f}_k}} = ik \tilde{f}_k \quad (5)$$

Fazit: Ableiten in x-Darstellung \iff Multiplikation mit ik in k-Darstellung

Cosinus- und Sinus-Reihen (optional)

C6.2g

Umschreiben d. Fourier-Reihe liefert:

$$f(x) \stackrel{(j.2)}{=} \frac{1}{L} \sum_k \overbrace{(\cos kx + i \sin kx)}^{e^{ikx}} \tilde{f}_k, \quad k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{L} \tilde{f}_0}_{\equiv \frac{1}{2} a_0} + \sum_{k>0} \underbrace{\frac{1}{L} (\tilde{f}_k + \tilde{f}_{-k})}_{\equiv a_k} \cos kx + \sum_{k>0} \underbrace{\frac{1}{L} (\tilde{f}_k - \tilde{f}_{-k}) i}_{\equiv b_k} \sin kx \quad (2)$$

oft nutzt man hier auch die Notation a_n und b_n

$$= \boxed{\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k>0} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]} , \quad k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3)$$

wobei

$$a_k \equiv \frac{1}{L} (\tilde{f}_k + \tilde{f}_{-k}) \stackrel{(j.3)}{=} \frac{1}{L} \int_I dx (e^{-ikx} + e^{+ikx}) f(x) = \boxed{2 \frac{1}{L} \int_I dx \cos kx f(x)} \quad (4)$$

$$b_k \equiv \frac{1}{L} (\tilde{f}_k - \tilde{f}_{-k}) i \stackrel{(j.3)}{=} \frac{1}{L} \int_I dx i (e^{-ikx} - e^{+ikx}) f(x) = \boxed{2 \frac{1}{L} \int_I dx \sin kx f(x)} \quad (5)$$

Cos, Sin-Reihen sind nützlich, falls $f(x)$ symmetrisch oder antisymmetrisch ist:

C6.2f

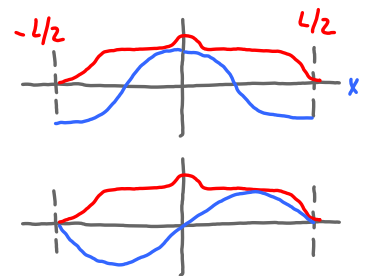
Dann wird Berechnung der Fourier-Komponenten erheblich vereinfacht, wenn das Integrationsintervall symmetrisch um $x=0$ gewählt wird:

$$I = (-L/2, L/2)$$

Falls f symmetrisch, mit $f(x) = +f(-x)$:

$$a_k \stackrel{(q.4)}{=} \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos kx f(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx \cos kx f(x) \quad (2)$$

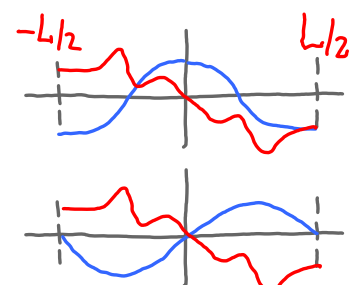
$$b_k \stackrel{(q.5)}{=} \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sin kx f(x) \stackrel{(1)}{=} 0 \quad (3)$$



Falls f antisymmetrisch, mit $f(x) = -f(-x)$:

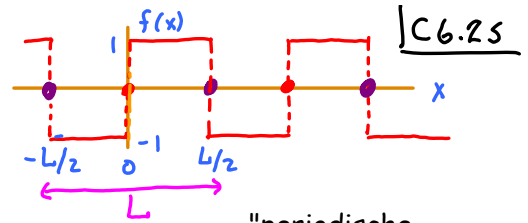
$$a_k \stackrel{(q.4)}{=} \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos kx f(x) \stackrel{(4)}{=} 0 \quad (5)$$

$$b_k \stackrel{(q.5)}{=} \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sin kx f(x) \stackrel{(4)}{=} \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx \sin kx f(x) \quad (6)$$



Beispiel: Periodische Rechtecksfunktion

$$f(x) = \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$



"Vorzeichenfunktion" für $-L/2 < x < L/2$, und $f(x) = f(x+L)$ für beliebige x "periodische Fortsetzung" (2)

Fourier-Koeffizienten: Reine Sinus-Reihe, da $f(x) = -f(-x) \Rightarrow a_k = 0$ (3)

$$b_k = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx \sin(kx) \cdot 1 = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx \sin(kx) = -\frac{1}{L} \frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{L/2} \quad (4)$$

$$Lk = \frac{2\pi n}{L} \Rightarrow b_k = \frac{4}{2\pi n} \left[1 - \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n} \right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5)$$

periodisches $[sgn(x)]_{FR} \stackrel{(q.3)}{=} \sum_{k>0} b_k \sin(kx) \stackrel{n=2m+1}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)2\pi/L \cdot x]}{2m+1} \quad (6)$

Für $x = L/2$ liefert (6): $[sgn(L/2)]_{FR} \stackrel{(6)}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi]}{2m+1} = 0 \quad \checkmark$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mittelwert} \\ \text{siehe (k.1)} \end{array} \right. \frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0 \quad (7)$

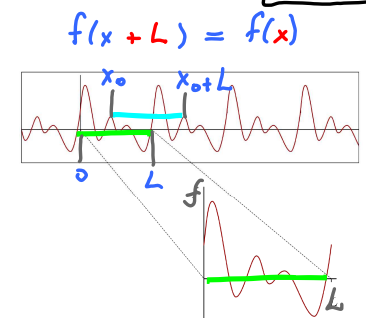
Zusammenfassung C6.2 Fourier-Reihen für periodische Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ periodisch, mit Periode L :

$$f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k, \quad k \in \frac{2\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{f}_k \stackrel{(c.5)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f(x) = \int_{x_0}^{x_0+L} dx e^{-ikx} f(x)$$

beliebige Periode



Faltung: $(f * g)(x) \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} dx' f(x-x')g(x')$, $(f * g)_k = \tilde{f}_k \tilde{g}_k$

Ableitung in Fourier-Darstellung: $\tilde{f}'_k \stackrel{(2)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f'(x) = ik \tilde{f}_k$

Zeit-Darstellung:

Für $f: (t_0, t_0+T) \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$: $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, $n \in \mathbb{Z}$

Fourier-Reihen-Ansatz: $f(t) = \frac{1}{T} \sum_n e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n$, $\tilde{f}_n = \int_{t_0}^{t_0+T} dt e^{+i\omega_n t} f(t)$

Ableitung: $\tilde{f}'_n = \int_{t_0}^{t_0+T} dt e^{+i\omega_n t} f'(t) = -i\omega_n \tilde{f}_n \quad (1)$