C5 Funktionen: Reihenentwicklungen

C5.1a

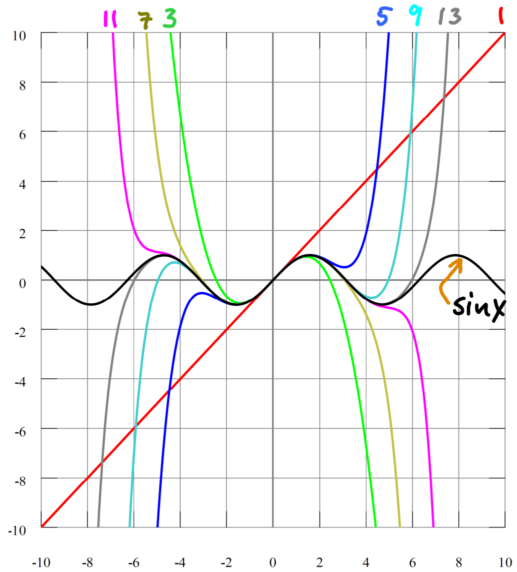
Brook Taylor
(1685-1731)

C5.1 Taylor-Reihen

(Analysis-Vorlesung: Konvergenz von Reihen und Folgen)

Grundlegende Frage: Wann / unter welchen Voraussetzungen lässt sich eine gegebene Funktion durch eine Potenzreihe darstellen oder annähern?
Und wozu ist das nützlich?

Höchste Potenz von x in Reihe:



Beispiel 1: Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{konvergent falls } |x| < 1 \qquad (1)$$

[Beweis: weiter unten]

Beispiel 2: Sinus-Funktion

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (2)$$

konvergent für alle $x \in \mathbb{C}$

C5.1b

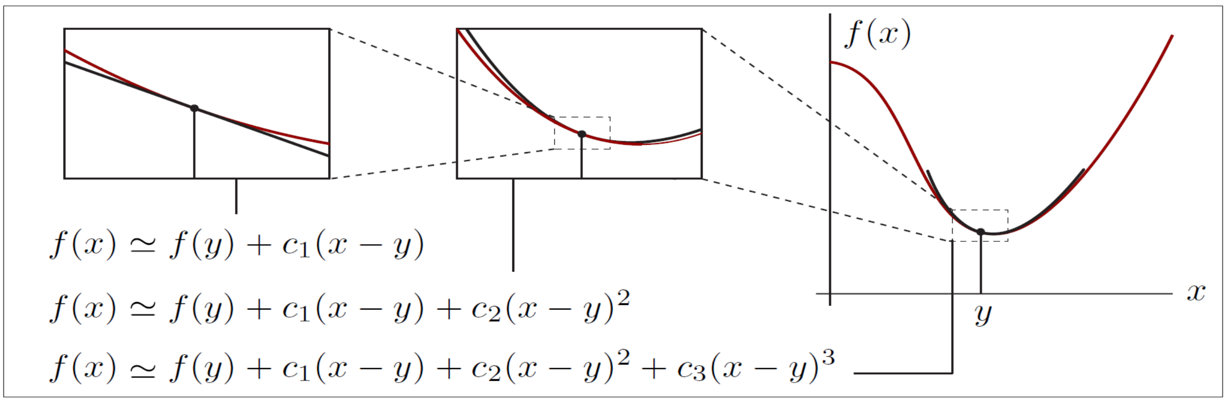
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \qquad (1)$$

sei eine allgemeine ('gutmütige') Funktion. Frage: kann man sie in der Nähe des Punktes $x = y$ darstellen mittels einer Potenzreihe in $\delta = x - y$?

$$f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n \qquad (2)$$

Potenzen von (x-y)

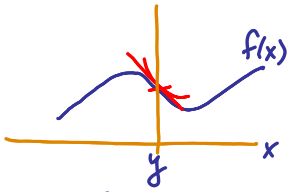
x-unabhängige Koeffizienten



C5.1c

Für δ genügend klein gilt: $f(y+\delta) = f(y) + \delta f'(y)$, $|\delta| \ll 1$ (1)

$x \equiv y + \delta$: $f(x) = f(y) + (x-y) f'(y)$, $|x-y| \ll 1$ (2)



In (b.2) ist jedoch die Absicht / Hoffnung, einen Ausdruck für f(x) zu bekommen, der nicht nur für $|x-y| \ll 1$ gilt!

Bestimmung der Koeffizienten c_n :

Grundidee: wähle die c_n so, dass sich $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n$ möglichst eng an $f(x)$ 'anschmiegt', d.h. dass alle Ableitungen beider Funktionen bei $x = y$ gleich sind.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-y)^m \qquad (3)$$

$$f(x)\Big|_{x\to y} = c_0 + c_1 (x\cancel{-y})^1 + c_2 (x\cancel{-y})^2 + c_3 (x\cancel{-y})^3 + \dots \qquad (4)$$

$$f'(x)\Big|_{x\to y} = \cancel{c_0} + 1\cdot c_1 \underbrace{(x-y)^{1-1}}_{=1} + 2\cdot c_2 (x\cancel{-y})^{2-1} + 3 c_3 (x\cancel{-y})^{3-1} + \dots \qquad (5)$$

$$f''(x)\Big|_{x\to y} = \cancel{1\cdot c_1 \cdot 1} + 1\cdot 2\cdot c_2 \underbrace{(x-y)^{1-1}}_{=1} + 2\cdot 3\cdot c_3 (x\cancel{-y})^{2-1} + \dots \qquad (6)$$

C5.1d

Kompaktnotation:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-y)^m \qquad f(x)\Big|_{x\to y} = c_0 \qquad (1)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\cdot c_m (x-y)^{m-1} \qquad \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x\to y} = 1\cdot c_1 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)m\cdot c_m (x-y)^{m-1-1} \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x\to y} = 1\cdot 2\cdot c_2 \qquad (3)$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (m-n+1)\dots(m-1)m\cdot c_m (x-y)^{m-n} \qquad \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x\to y} = 1\cdot 2\cdots(n-1)n\cdot c_n \qquad (4)$$

[n Fakultät: $n! \equiv n(n-1)(n-2)\dots 1$, $0! \equiv 1$] (5)

per Definition

$$n!\, c_n \overset{(4)}{=} \frac{d^n f(x)}{dx}\Big|_{x\to y} \equiv \frac{d^n f(y)}{dy} \equiv f^{(n)}(y) \qquad (6)$$

'Taylor-Reihe' v. f(x)
um den Punkt y,
in Potenzen von (x-y):

$$f(x) \overset{(b.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n \overset{(6)}{=} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y)\, (x-y)^n} \qquad (7)$$

Beispiel: Exponentialfunktion $\quad f(x) = \exp(x) \equiv e^x \quad (1)$ C5.1e

Definierende Eigenschaften: $\quad \frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (1) \quad , \qquad e^0 = 1 \quad (2)$

$$f'(x) = e^x \quad (3) \quad ,$$

$$f''(x) = e^x \quad (4) \quad ,$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (5) \quad ,$$

(d.7): $$\underset{(1)\downarrow}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underset{\downarrow(5)}{f^{(n)}(y)} (x-y)^n \quad (6)$$

(5) in (d.7): $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^y (x-y)^n \quad (7)$$

für y = 0: $$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$ [diese Reihe ist konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$!] (8)

(8) kann als alternative <u>Definition</u> der Exp-Funktion aufgefasst werden.

(8) impliziert (1): $$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=0,1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n!}}_{=\frac{1}{(n-1)!}} x^{n-1} \overset{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \overset{(6)}{=} e^x \overset{\checkmark}{\Rightarrow} (1) \quad (9)$$

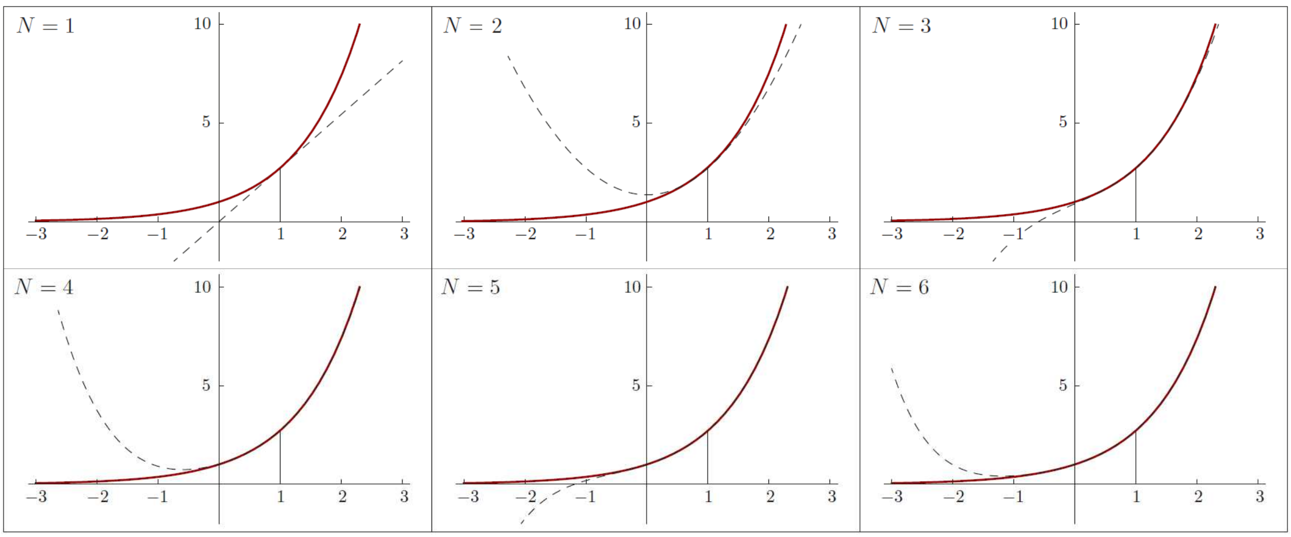
Exponentialfunktion, genähert durch die ersten N+1 Terme der Taylor-Reihe: C5.1f

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um y = 1:

$$e^x = e^{x-1+1} = e^{x-1} \cdot e^1$$

$$= e^1 \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (x-1)^n = e^1 \left[1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots \right] \quad (1)$$

falls $N \neq \infty$ ist dies eine Näherung



Nochmal Beispiel 1 v. Seite C5.1a: (jetzt explizit)

Sei: $$f(x) \equiv \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \qquad (1)$$

Für Taylor-Reihe von f(x) um den Punkt y = 0 benötigen wir laut (d.6): $y=0$

$$f'(x) = \underbrace{-(-1)}_{=1}(1-x)^{-1-1} = 1\cdot(1-x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1 \qquad (2)$$

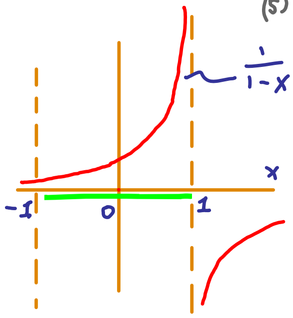
$$f''(x) = \underbrace{-(-2)\,1\cdot}_{=2!}(1-x)^{-2-1} = 2!\,(1-x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2! \qquad (3)$$

$$f'''(x) = \underbrace{-(-3)\,2!}_{=3!}\,(1-x)^{-3-1} = 3!\,(1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 3! \qquad (4)$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! \qquad (5)$$

Nutze (d.7), mit $y = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} \overset{(d.7)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{(5)\ =n!}}{\cancel{n!}} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \qquad (6)\ (= g.1)$$



Diese Entwicklung heißt 'geometrische Reihe'

(6) gilt nur für $|x| < 1$ Man sagt, der 'Konvergenzradius' dieser Reihe ist 1.

Falls Taylor-Reihe konvergiert, ist gliedweises Differenzieren / Integrieren innerhalb des Konvergenzradius erlaubt.

Beispiel 3:

$$\ln(1+x) = \int_0^x dx' \frac{d}{dx'} \ln(1+x')$$

$$= \int_0^x dx' \frac{1}{1+x'}$$

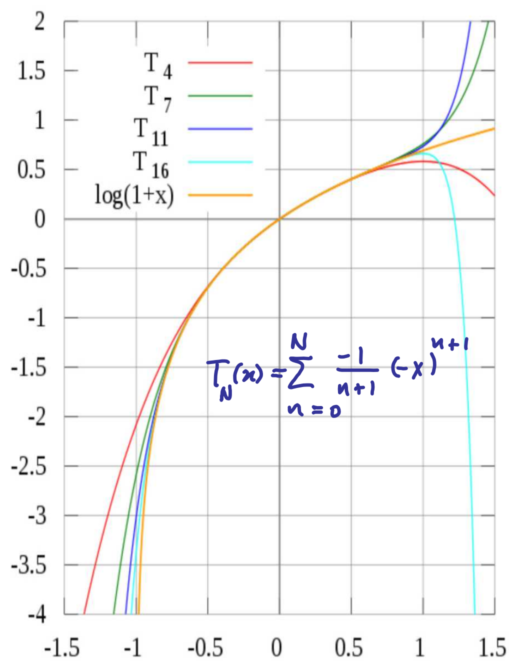
Nutze Taylor-Entwicklung (g.1):

gilt nur für $|x| < 1$

$$\overset{(g.1)}{=} \int_0^x dx' \sum_{n=0}^{\infty} (-x')^n$$

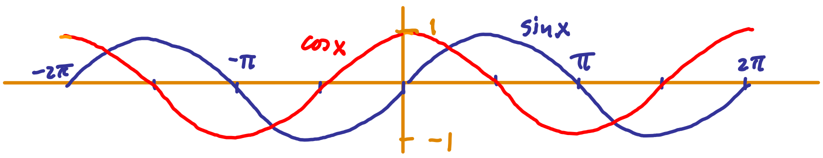
$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1}}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$



Beachte: da Taylor-Reihe für $|x| > 1$ nicht konvergiert, liefern höhere Taylor-Terme $T_N(x)$ dort eine zunehmend schlechtere Näherung!

Sinus und Cosinus:



Bekannte Eigenschaften:

Wert bei Null: $\sin(0) = 0 \quad (1) \qquad \cos(0) = 1 \quad (2)$

Ableitung: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad (3) \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad (4)$

Eigenschaften (1)-(4) bestimmen die Reihenentwicklungen v. sin und cos eindeutig:

sin(x):

$$f(x) \equiv \sin x, \qquad f(0) \overset{(1)}{=} 0 \qquad (5)$$

$$f^{(1)}(x) \overset{(3)}{=} \cos x, \qquad f^{(1)}(0) \overset{(2)}{=} 1 \qquad (6)$$

$$f^{(2)}(x) \overset{(4)}{=} -\sin x, \qquad f^{(2)}(0) \overset{(1)}{=} 0 \qquad (7)$$

$$f^{(3)}(x) \overset{(3)}{=} -\cos x, \qquad f^{(3)}(0) \overset{(2)}{=} -1 \qquad (8)$$

$$f^{(4)}(x) \overset{(4)}{=} \sin x, \qquad f^{(4)}(0) \overset{(1)}{=} 0 \qquad (9)$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \forall\; n = 2m \\ (-1)^m & \forall\; n = 2m+1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \overset{(d.7)}{=} \sin x \underset{n=2m+1}{\overset{(10)}{=}} \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \qquad (11)$$

Wert bei Null: $\sin(0) = 0 \quad (1) \qquad \cos(0) = 1 \quad (2)$

Ableitung: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad (3) \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad (4)$

cos(x):

$$g(x) \equiv \cos x, \qquad g(0) \overset{(2)}{=} 1 \qquad (5)$$

$$g^{(1)}(x) \overset{(4)}{=} -\sin x, \qquad g^{(1)}(0) \overset{(1)}{=} 0 \qquad (6)$$

$$g^{(2)}(x) \overset{(3)}{=} -\cos x, \qquad g^{(2)}(0) \overset{(2)}{=} -1 \qquad (7)$$

$$g^{(3)}(x) \overset{(4)}{=} \sin x, \qquad g^{(3)}(0) \overset{(1)}{=} 0 \qquad (8)$$

$$g^{(4)}(x) \overset{(3)}{=} \cos x, \qquad g^{(4)}(0) = 1 \qquad (9)$$

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & \forall\; n = 2m \\ 0 & \forall\; n = 2m+1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \overset{(d.7)}{=} \cos x \underset{n=2m}{\overset{(10)}{=}} \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \qquad (11)$$

(i.11) und (j.11) können als alternative Definitionen der Trig-Funktionen aufgefasst werden.

Diese Reihen sind konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

C9.2 Komplexe Taylor-Reihen

Wird in der Definition einer Funktion, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, (1)

die Variable $x \in \mathbb{R}$ ersetzt durch die komplexe Variable $z = x + iy \in \mathbb{C}$, erhält man

die 'analytische Fortsetzung' der Funktion in die komplexe Ebene, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$. (2)

Beispiel: die Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat die analytische Fortsetzung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. (3)

Analytische Fortsetzungen der Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$\boxed{e^z \overset{(1e.8)}{\equiv} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} \quad (4) \qquad \boxed{\sin(z) \overset{(1i.11)}{\equiv} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}} \quad (5) \qquad \boxed{\cos(z) \overset{(1j.11)}{\equiv} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}} \quad (6)$$

Diese Reihen sind konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

(4) mit $z \to iz$:

$$e^{iz} \overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{i^{2m}}^{=(-1)^m}}{(2m)!} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{i^{2m+1}}^{=i(-1)^m}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \quad (7)$$

n = gerade = 2m

n = ungerade = 2m+1

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^{iz} \overset{(6,5)}{=} \cos z + i \sin z} \quad \text{Euler-de Moivre-Identität} \quad (8)$$

Euler-de Moivre mit reellem Argument

$e^{i\phi} \overset{(2a.8)}{=} \cos\phi + i \sin\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$ (1)

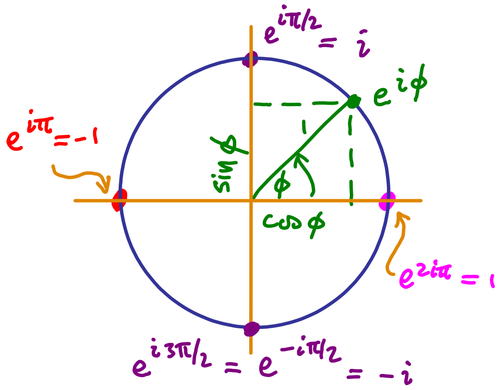
Wir wissen aus geometrischer Definition der Trig-Funktionen:

$$|e^{i\phi}| \overset{(1)}{=} (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^{1/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\phi} \text{ liegt auf Einheitskreis.} \quad (1')$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2\pi) = 1 \\ \sin(2\pi) = 0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exp(i2\pi) = 1 \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\pi) = -1 \\ \sin(\pi) = 0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exp(i\pi) = -1 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\pm\pi/2) = 0 \\ \sin(\pm\pi/2) = \pm 1 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exp(\pm i\pi/2) = \pm i \quad (4)$$



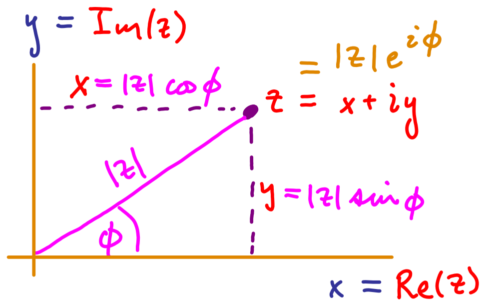
$$\boxed{e^{i\pi} + 1 \overset{(3)}{=} 0} \quad (5)$$

Euler-Formel

vereint die 5 wichtigsten Zahlen,
$0, 1, \pi, e, i$
in einer Gleichung!!

Polardarstellung v. komplexen Zahlen:

$$\boxed{z \overset{(L1I.5)}{=} |z|(\cos\phi + i \sin\phi) = |z| e^{i\phi}}$$



Exponential-Darstellungen von sin, cos, sinh, cosh [zum Selbststudium - wichtig!]

CS.2c

$$e^{iz} \overset{(a.8)}{=} \cos z + i \sin z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} \overset{(a.8)}{=} \cos(-z) + i \sin(-z) \qquad (2)$$

$$= + \cos z - i \sin z \qquad (2')$$

$\frac{1}{2}[(1)+(2)]$:
$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \qquad (3)$$

$\frac{1}{2i}[(1)-(2)]$:
$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2}} \qquad (4)$$

$$\cos(iz) \overset{(3)}{=} \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z \qquad (5)$$

$$\sin(iz) \overset{(4)}{=} \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{i2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{i2} = \frac{-1}{i}\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i \sinh z \qquad (6)$$

$$\cosh z = \cos(iz) \overset{(l.2)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^m i^{2m}}^{=1}}{(2m)!} z^{2m} = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}} = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 + \dots \qquad (7)$$

$$\sinh z = \frac{1}{i}\sin(iz) \overset{(l.1)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^m i^{2m}}^{=1} \cdot \cancel{i}}{(2m+1)!\,\cancel{i}} z^{2m+1} = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}} = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \dots \qquad (8)$$

Manchmal existiert Taylor-Entwicklung nicht (optional, zur Kenntnisnahme)

CS.2d

[AB-Buch, S. 265]

Definition: Ableitung v. Funktion einer komplexen Variable:

$$f'(z) = \lim_{\delta_z \to 0} \frac{1}{\delta_z}\left[f(z+\delta_z) - f(z)\right] \qquad (1)$$

Falls $f'(z)$ an einem Punkt z_0 nicht existiert, existiert auch keine Taylor-Entwicklung der Funktion um diesen Punkt.

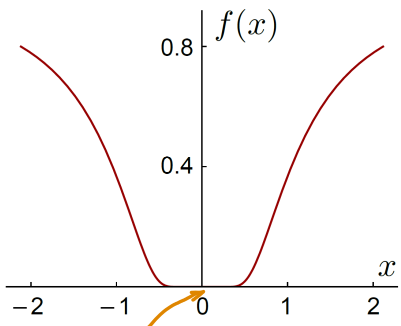
Beispiel: betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = e^{-1/x^2} \qquad (1)$$

$$f(0) = e^{-\infty} = 0 \qquad (2)$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) \qquad (3)$$

$$f'(0) = e^{-\infty}\left(\frac{2}{0}\right) = 0 \qquad (4)$$



hier ist die Funktion 'unendlich flach', d.h., alle Ableitungen verschwinden: $f^{(n)}(0) = 0$

Analog: alle Ableitungen sind $\propto e^{-\frac{1}{x^2}}$, also

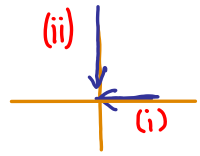
$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (5)$$

Folgt daraus, dass
$$f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \overbrace{f^{(n)}(0)}^{=0} = 0 \quad ?!! \qquad (6)$$

Antwort: nein, denn $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,, \quad z \mapsto e^{-1/z^2} \,,$ (1)

betrachtet als Funktion einer <u>komplexen</u> Variable, $z = x+iy$, ist <u>nicht</u> differenzierbar bei z = 0:

$$f'(z)\Big|_{z=0} = \lim_{\delta_z \to 0} \frac{1}{\delta_z}\Big[f(\delta_z) - \underbrace{f(0)}_{=0}\Big] = \lim_{\delta_z \to 0} \frac{1}{\delta_z} e^{-\frac{1}{(\delta_z)^2}} \qquad (2)$$



Das Ergebnis hängt davon ab, in welcher Richtung δ_z nach Null strebt:

(i) Falls $\delta_z = \delta \in \mathbb{R}$: $\quad (2) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{\delta^2}} \propto e^{-\infty} = 0$ (3)

(ii) Falls $\delta_z = i\delta \,, \; \delta \in \mathbb{R}$: $\quad (2) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{i\delta} e^{-\frac{1}{(i\delta)^2}} \propto e^{+\infty} = \infty$ (4)

Man sagt: 'der Grenzwert existiert nicht', und somit die Ableitung $f'(z)\big|_{z=0}$ auch nicht.

Deshalb gibt es für f(z) keine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt z = 0.
Man sagt: 'Die Taylorreihe dieser Funktion hat Konvergenzradius gleich 0'.

Allgemein: systematische Diskussion der Konvergenz von Taylor-Reihen erfordert Funktionentheorie komplexer Funktionen (siehe C9, und fortgeschrittene Mathe-Vorlesungen). Für R-Vorlesung und typische Physik-Anwendungen brauchen wir jedoch nur Taylor-Entwicklung von gutmütigen Funktionen...

C5.3 Taylor-Entwicklung endlicher Ordnung

Taylor-Reihe, genähert durch endliche Anzahl Terme:

$$f(x) \overset{\text{(C5.1d.7)}}{\simeq} \sum_{n=0}^{\cancel{\infty}\, N} \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \equiv f_N(x) \qquad (1)$$

Fehlerabschätzung: Folgendes kann gezeigt werden:

falls auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ alle Ableitungen von f beschränkt (endlich groß) sind,

[d.h. falls positive, reelle Konstanten α und C existieren, so dass

$$|f^{(n)}(x)| < \alpha\, C^n \qquad \forall\; x \in I \subset \mathbb{R} \,, \; n \in \mathbb{N} \;\Big] \qquad (2)$$

dann ist der 'Fehler' auf I kleiner als:

$$|f(x) - f_N(x)| < \alpha \frac{C^{N+1}}{(N+1)!}|x-y|^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \,. \qquad (3)$$

Für gegebenes $x \in I$ wird Fehler somit beliebig klein für $N \to \infty$, d.h. Reihe konvergiert.

Übliche Notation, um Größe des Fehlers anzudeuten:

$$f(x) \overset{(1,3)}{\simeq} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha\, C^{N+1}}{(N+1)!}|x-y|^{N+1}\right) \qquad (4)$$

man sagt, der Fehler ist 'von Ordnung' (...)

L7.4 Funktionen von Matrizen

L7.4a

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$, dann ist auch $A^2 \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$, usw., also auch A^m (1)

Man sagt: die komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = z^m,$ (2)

hat eine 'Erweiterung' zu einer Funktion von nxn-Matrizen:

$$f: \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) \to \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \quad A \mapsto f(A) \equiv A^m \tag{3}$$

Verallgemeinerung: eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m \tag{4}$$

hat eine Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) \to \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \quad A \mapsto \boxed{f(A) \overset{(4)}{\equiv} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} A^m} \tag{5}$$

Beispiel: Exponentialfunktion: $$e^A \overset{(C5.1e.8)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \tag{6}$$

L7.4b

Beispiel: $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^1 \tag{3}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{4}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{für n = gerade} \\ A & \text{für n = ungerade} \end{cases} \tag{5}$$

Also:

$$e^{aA} \overset{(L7.4a.6)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}(\cancel{a}A)^m \overset{(C5.2a.7)}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{(2n)!}}_{\overset{(C5.2c.7)}{=}\cosh(a)} \underbrace{A^{2n}}_{\overset{(5)}{=}\mathbb{1}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\overset{(C5.2c.8)}{=}\sinh(a)} \underbrace{A^{2n+1}}_{\overset{(5)}{=}A} \tag{6}$$

$(a \in \mathbb{C})$

$$= \mathbb{1}\cosh(a) + A\sinh(a) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Falls eine Matrix diagonalisierbar ist: **L7.4c**

$$A = T\,D\,T^{-1} \quad \text{mit} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$A^m = \overbrace{(T\,D\,\underbrace{T^{-1})(T}_{=\mathbb{1}}\,D\,\underbrace{T^{-1})(T}_{\mathbb{1}}\,D\,T^{-1})\dots(T\,D\,T^{-1})}^{\text{n mal}} \tag{2}$$

$$= T\,D^m\,T^{-1} \qquad = \quad T\begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} T^{-1} \tag{3}$$

$$f(A) \overset{\text{(L7.4a.5)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\, A^m \overset{(3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\, T\,D\,T^{-1} \overset{\text{(L7.4a.5)}}{=} \boxed{T\,f(D)\,T^{-1}} \tag{4}$$

explizit:

$$\overset{(3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\; T \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} T^{-1} = \boxed{T \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} T^{-1}} \tag{5}$$

Beispiel:

$$e^A = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} T^{-1} \tag{6}$$

Zusammenfassung: C5.1-3,5 Taylor-Reihen

ZC5.1-3

'Taylor-Reihe' v. f(x) um x=y:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^n f^{(n)}(y)$$

Wichtige Beispiele:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (2) \qquad \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}(-z)^{n+1}, \qquad \text{für} \quad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad (4) \qquad \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Euler-de Moivre: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (7) Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (8)

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = x + iy = |z|\, e^{i\phi} \quad (9) \qquad \begin{cases} |z|^2 = x^2 + y^2, & (10) \\ \tan\phi = y/x & (11) \end{cases}$$

Zusammenfassung: L7.4 Funktionen von Matrizen

Sei f(z) eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m$$

Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f : \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) \to \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \qquad A \longmapsto f(A) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} A^m$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, $A = T\,D\,T^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$f(A) = T\,f(D)\,T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$