L8.1 Unitäre und orthogonale Abbildungen

(Abbildungen, die komplexes bzw. reelles Skalarprodukt invariant lassen)

Zur Erinnerung:
L3.1 Reelles inneres Produkt
in $\mathbb{R}$ -Vektorraum [siehe L3.1c]:
'reeller Vektorraum'

$$\langle\, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) \longmapsto \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \qquad (2)$$

(i) Symmetrie:
$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle \qquad (3)$$

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation:
$a \in \mathbb{R}$

$$\langle a\hat{u}, \hat{w} \rangle = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle \qquad (4)$$

$$\langle \hat{u}, a\hat{w} \rangle = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle \qquad (4')$$

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition:
$$\langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \qquad (5)$$

(iv) Positiv definit:
$$\hat{v} \neq \hat{0} \iff \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle > 0 \qquad (6)$$
'wenn, und nur wenn'

Reelles Skalarprodukt
in Standardraum: $V = \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = \hat{e}_j v^j$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} \equiv \sum_j u^i \delta_{ij} v^j \qquad (7)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_j (u^j)^2 \geq 0 \qquad (8)$$

L3.4 Komplexes Skalarprodukt, in Standardraum $\mathbb{C}^n$:

$$\vec{u} = (u^1, \dots, u^n)^T, \qquad u^j \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Wie garantiert man Positivität? $\sum_{j=1}^n u^j u^j \geq 0$ gilt nicht! (2)

Z.B: $\vec{u} = (1, 2i)^T$: $1 \cdot 1 + (2i)(2i) = 1 - 4 = -3 < 0$ (3)

Definition:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{C}} \equiv \sum_j^n \overline{u^j} v^j \qquad (4)$$
komplexe Konjugation, $i \to -i$
garantiert Positivität, siehe (5)

wird üblicherweise weggelassen

Positivität:
$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n \overline{u^j} u^j = \sum_{j=1}^n |u^j|^2 \geq 0 \qquad (5)$$

Beispiel in $\mathbb{C}^2$:

$\vec{u} = (1, 2i)^T$ $\qquad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{u^1} u^1 + \overline{u^2} u^2 = 1 \cdot 1 + (-2i)(2i) = 5$ (6)

$\vec{v} = (3i, 1/2)^T$ $\qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^1} v^1 + \overline{u^2} v^2 = 1 \cdot 3i + (-2i) \cdot 1/2 = 2i$ (7)

Verallgemeinerung für komplexe Vektorräume: komplexes inneres Produkt (L3.4)

L8.1c
L3.4c

Komplexes inneres Produkt
in $\mathbb{C}$ -Vektorraum:
'komplexer Vektorraum' [Anwendung: QM!]

$$\langle \, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (1)$$
$$(\hat u, \hat v) \longmapsto \langle \hat u, \hat v \rangle \qquad (2)$$

(i) Symmetrie (bis auf kompl. Konj.): $\langle \hat u, \hat v \rangle = \overline{\langle \hat v, \hat u \rangle}$ $(i \to -i)$ (3)

komplexe Konjugation,

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\hat u, \hat v \rangle = \bar a \langle \hat u, \hat v \rangle$ (4)

$a \in \mathbb{C}$ $\quad \langle \hat u, a\hat v \rangle = a \langle \hat u, \hat v \rangle$ (4')

keine Konjugation

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \hat u + \hat v, \hat w \rangle = \langle \hat u, \hat w \rangle + \langle \hat v, \hat w \rangle$ (5)

(iv) Positiv definit: $\hat v \neq \hat 0 \iff \langle \hat v, \hat v \rangle > 0$ (6)

'wenn, und nur wenn'

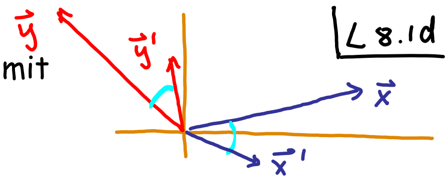
Anmerkung: $\langle \hat v, \hat v \rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle \hat v, \hat v \rangle} \implies \langle \hat v, \hat v \rangle \in \mathbb{R}$ (7)

Komplexes Skalarprodukt
in Standardraum: $V = \mathbb{C}^n$, $\vec v = \vec e_j v^j$: $\langle \vec u, \vec v \rangle_{\mathbb{C}^n} \equiv \sum_{ij} \bar u^i \delta_{ij} v^j$ (8)

$$\langle \vec u, \vec u \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_j \bar u^j u^j = \sum_j |u^j|^2 \geq 0 \qquad (9)$$

L8.1 Unitäre/orthogonale Abbildungen

L8.1d



per Def: lassen das Skalarprodukt invariant!
(für diese sind auch Längen und Relativwinkel invariant)

Sei V ein komplexer/reeller Vektorraum v. mit Dimension n
und $\hat A : V \to V$, $\hat v \longmapsto \hat A \hat v$ eine lineare Abbildung. (1)

Falls sie das Skalarprodukt invariant lässt, $\langle \hat A \hat v, \hat A \hat w \rangle = \langle \hat v, \hat w \rangle$ (2)
für alle $\hat v, \hat w \in V$, heisst die Abbildung unitär (für komplexen Vektorraum)
orthogonal (für reellen Vektorraum)

Für unitäre/orthogonale Abbildungen gilt:

- Norm ist invariant: $\|\hat v\|^2 = \langle \hat v, \hat v \rangle \overset{(2)}{=} \langle \hat A \hat v, \hat A \hat v \rangle = \|\hat A \hat v\|^2$ (3)
- der Kern (Null-Raum) ist leer: falls $\hat v \neq \hat 0$ dann gilt $0 \neq \|\hat v\|^2 = \|\hat A \hat v\|^2 \Rightarrow \hat A \hat v \neq \hat 0$ (4)
- sie sind immer invertierbar [folgt aus (4), und (L5.4k.4)]

Unitäre/orthogonale Abbildungen finden in der Physik vielfältige Anwendungen:

- Theorie der Rotationen in klassischer Mechanik & Quantenmechanik
- Spezielle Relativitätstheorie (invariantes Intervall: $ct^2 - \vec x^2$)
- Zeitentwicklung in der Quantenmechanik
- Symmetrien in der Hochenergiephysik und Festkörperphysik

Unitäre/orthogonale Abbildungen bilden eine Gruppe

L8.1e

Gruppenaxiome (L1c) sind erfüllt:

(i) Abgeschlossenheit: Seien $\hat{A}, \hat{B}$ unitär/orthog., dann gilt dasselbe für $\hat{A}\hat{B}$:

$$\langle \hat{A}\hat{B}\hat{v}, \hat{A}\hat{B}\hat{w}\rangle = \langle \hat{A}(\hat{B}\hat{v}), \hat{A}(\hat{B}\hat{w})\rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{B}\hat{v}, \hat{B}\hat{w}\rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{v}, \hat{w}\rangle \checkmark \quad (1)$$

(ii) Assoziativität: gilt für Komposition von linearen Abbildungen

(iii) Einheitsabbildung ist trivialerweise unitär/orthogonal: $\langle \mathbb{1}\hat{v}, \mathbb{1}\hat{w}\rangle = \langle \hat{v}, \hat{w}\rangle$ (2)

(iv): Inverse: Sei $\hat{A}$ unitär/orthog., dann gilt dasselbe für $\hat{A}^{-1}$, denn:

Gegeben $\hat{v}, \hat{w} \in V$, dann

$$\langle \hat{A}^{-1}\hat{v}, \hat{A}^{-1}\hat{w}\rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \underbrace{\hat{A}(\hat{A}^{-1}}_{=\mathbb{1}}\hat{v}), \underbrace{\hat{A}(\hat{A}^{-1}}_{=\mathbb{1}}\hat{w})\rangle = \langle \hat{v}, \hat{w}\rangle \quad (4)$$

Auf einem n-dimensionalem komplexen/reellen Vektorraum bilden die unitären/orthogonalen Abbildungen eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren Abbildungen, genannt die '<u>unitäre Gruppe U(n)</u>' / '<u>orthogonale Gruppe O(n)</u>'.

Zur Erinnerung: Adjungierte Matrix

L8.1f

Eine Abbildung $\hat{U}$ habe, bezüglich einer <u>Orthonormal</u>basis von V, die Matrixdarstellung

$$\vec{v} \mapsto U\cdot\vec{v}, \quad \vec{v} = \{v^i\} \in \mathbb{C}^n, \quad (U.\vec{v})^k = U^k{}_j v^j \quad (1)$$

$$U = \{U^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \quad U^\dagger = \{U^{\dagger}{}_j{}^i\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \quad \boxed{U^{\dagger}{}_j{}^i \overset{(L5.2f)}{\equiv} \overline{U^i{}_j}} \quad (2)$$

'adjungierte Matrix'

Zur Erinnerung: da Metrik in Orthonormalbasis trivial ist, $g_{ij} = \delta_{ij}$, (3)

ist Index-Stellung (oben/unten) egal, UND hoch/runterziehen von Indizes hat keinen Effekt:

$$(U^\dagger)^j{}_i \equiv \delta^{jm}(U^\dagger)_m{}^l\delta_{li} = (U^\dagger)_j{}^i \overset{(2)}{=} \overline{U^i{}_j} \quad (4)$$

also: adjungieren heisst einfach: Reihen/Spaltenindizes vertauschen & komplex konjugieren.

z.B.: $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ (5)

Index-nur-unten-Notation wäre: $U^\dagger_{ik} \equiv \overline{U_{ki}}$ (6)

Unitäre Matrizen

L8.1g

U sei eine unitäre Abbildung: $\hat{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n , \quad \hat{v} \mapsto \hat{U}\hat{v}$ (1)

mit Matrixdarstellung bzgl. Orthonormalbasis: $\vec{v} \mapsto U\vec{v}$ (2)

Welche Konsequenz hat die Unitaritätseigenschaft für die Matrixdarstellung?Abbildung?

Forderung: $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{U}\hat{v}, \hat{U}\hat{w} \rangle$ (Invarianz des Skalarprodukts) (3)

$$\bar{v}^m \, \delta_{mj} \, w^j \overset{(c.8)}{=} \overline{(U \cdot \vec{v})^l} \, \delta_{lk} \, (U \cdot \vec{w})^k \overset{(1)}{=} \overline{U^l{}_m} \, \bar{v}^m \, \delta_{lk} \, U^k{}_j \, w^j \quad (4)$$

$$\delta_{mj} = \overline{U^l{}_m} \, \delta_{lk} \, U^k{}_j \overset{(2)}{=} (U^\dagger)_m{}^l \, \delta_{lk} \, U^k{}_j \quad (5)$$

Indizes hoch-runterziehen (trivialer Schritt, da Metrik trivial ist):

$$\delta^i{}_j = \delta^{im} \, \delta_{mj} \overset{(5)}{=} \underbrace{\delta^{im} (U^\dagger)_m{}^l \delta_{lk}}_{(f.4) \equiv (U^\dagger)^i{}_k} U^k{}_j = (U^\dagger)^i{}_k U^k{}_j \quad (6)$$

Kompaktnotation: $\boxed{\mathbb{1} \overset{(6)}{=} U^\dagger \cdot U \iff U^{-1} = U^\dagger}$ Definierende Eigenschaft einer 'unitären Matrix' (7)

Falls Metrik nicht trivial ist, lautet (5): $g_{mj} = (U^\dagger)_m{}^l \, g_{lk} \, U^k{}_j$ (8)

Orthogonale Abbildungen

L8.1h

Analog zu unitär, aber für reelle Matrizen, ohne komplexe Konjugation

Für die Darstellungsmatrix eine orthogonalen Abbildung O gilt:

$$O = \{O^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n) , \quad O^T = \{O^T{}_j{}^i\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n) , \quad O^T{}^j{}_i \equiv O^T{}_j{}^i \overset{(L5i.1)}{\equiv} O^i{}_j \quad (1)$$

'transponierte Matrix' — oben/unten tauschen

Skalarprodukt ist invariant: $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{O}\hat{v}, \hat{O}\hat{w} \rangle$ (2)

Bedingung an O: $\delta_{mj} \overset{(g.5)}{=} O^l{}_m \, \delta_{lk} \, O^k{}_j = (O^T)_m{}^l \, \delta_{lk} \, O^k{}_j$ (3)

Kovariante form: $\delta^i{}_j \overset{(g.6)}{=} (O^T)^i{}_k \, O^k{}_j$ (4)

Kompaktnotation: $\boxed{\mathbb{1} \overset{(g.7)}{=} O^T \cdot O \iff O^{-1} = O^T}$ (5)

Definierende Eigenschaft einer 'orthogonalen Matrix'

Falls Metrik nicht trivial ist, lautet (3): $g_{mj} = (O^T)_m{}^l \, g_{lk} \, O^k{}_j$ (8)

L8.1i

Beispiele: $c \equiv \cos\theta, \quad s \equiv \sin\theta \quad , \quad c^2 + s^2 = 1$ (1)

$A = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix}$ ist unitär: $A^\dagger = \begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix}$ (2)

$$A \cdot A^\dagger = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + is(-is) & -cis + isc \\ isc + c(-is) & is(-is) + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ ist orthogonal: $A^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ (4)

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + (-s)^2 & cs - sc \\ sc + c(-s) & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

L8.1j

Spaltenvektoren einer unitären Matrix bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^n$ (1)

Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$ (2)

(Analog für Zeilenvektoren.)

Beweis für unitäre Matrix (für orthog. Matrix ist Beweis analog):

Sei $\mathcal{U} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ unitär, mit Spaltenvektoren $\mathcal{U} \equiv (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, $\quad \vec{u}_j = \begin{pmatrix} u^1{}_j \\ \vdots \\ u^n{}_j \end{pmatrix}$ (3)

dann gilt: $\delta_{mj} \overset{(f.s)}{=} \overline{u^l}_m \, \delta_{lk} \, u^k{}_j = (\overline{\vec{u}_m})^l \, \delta_{lk} \, (\vec{u}_j)^k = \langle \vec{u}_m, \vec{u}_j \rangle \Longrightarrow (1)$ (4)

Umgekehrt gilt: für eine Orthonormalbasis $\{\vec{u}_j\}$, mit $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, (5)

ist die Matrix gebildet aus Basisvektoren, $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, unitär: $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1}$ (6)

Explizit:

$$\mathcal{U} \equiv (\vec{u}_1, \dots, \underset{\text{Basisvektor } j}{\vec{u}_j}, \dots, \vec{u}_n) = \begin{bmatrix} u^1{}_1 & u^1{}_j & u^1{}_n \\ u^k{}_1 & u^k{}_j & u^k{}_n \\ u^n{}_1 & u^n{}_j & u^n{}_n \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$\mathcal{U}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{u^1}_1 \cdots \overline{u^k}_1 \cdots \overline{u^n}_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boxed{\overline{u^1}_i \cdots \overline{u^k}_i \cdots \overline{u^n}_i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{u^1}_n \cdots \overline{u^k}_n \cdots \overline{u^n}_n \end{bmatrix} \quad (7b)$$

Basisvektor i

dann gilt:

$$(\mathcal{U}^\dagger \cdot \mathcal{U})_{ij} \overset{(7b)\cdot(7a)}{=} \begin{bmatrix} \overline{u^1}_1 \cdots \overline{u^k}_1 \cdots \overline{u^n}_1 \\ \boxed{\overline{u^1}_i \cdots \overline{u^k}_i \cdots \overline{u^n}_i} \\ \overline{u^1}_n \cdots \overline{u^k}_n \cdots \overline{u^n}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1{}_1 & u^1{}_j & u^1{}_n \\ u^k{}_1 & u^k{}_j & u^k{}_n \\ u^n{}_1 & u^n{}_j & u^n{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \left(\sum_k \overline{u^k}_i u^k{}_j\right) & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \overset{(5)}{=} (\delta_{ij}) = (\mathbb{1})_{ij} \quad (8)$$

$\Longrightarrow (6)$

Unitäre/orthogonale Matrizen bilden Gruppen unter Matrixmultiplikation

'Unitäre Gruppe': $\mathcal{U}(n) = \{ \mathcal{U} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) ; \ \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1} \}$ (1)

'Orthogonale Gruppe': $\mathcal{O}(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n) ; \ O^T O = \mathbb{1} \}$ (2)

Gruppenaxiome (L1c) sind erfüllt: [folgt bereits aus L8e]
In Matrixnotation, für unitäre Matrizen: (orthog. analog):

(i) Abgeschlossenheit:

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2$, denn:

$$\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = (\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2)^\dagger \cdot (\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2) \overset{(L5p'.1)}{=} \mathcal{U}_2^\dagger \cdot (\mathcal{U}_1^\dagger \cdot \mathcal{U}_1) \cdot \mathcal{U}_2 \overset{(1)}{=} \mathcal{U}_2^\dagger \cdot \mathbb{1} \cdot \mathcal{U}_2 \overset{(1)}{=} \mathbb{1} \quad (3)$$

(ii) Assoziativität: gilt für Matrixmultiplikation [siehe (L5o.1)]

(iii) Neutrales Element: $\mathbb{1}$ ist unitär, denn $\mathbb{1}^\dagger = \mathbb{1}, \quad \mathbb{1}^\dagger \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$ (4)

(iv) Inverse: Sei $\mathcal{U} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\mathcal{U}^{-1}$, denn:

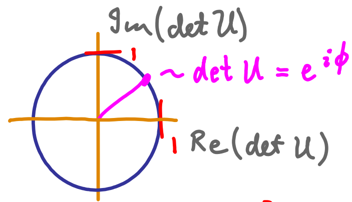
$$(\mathcal{U}^{-1})^{-1} = \mathcal{U} = (\mathcal{U}^\dagger)^\dagger \overset{(i.1)}{=} (\mathcal{U}^{-1})^\dagger . \quad (5)$$

Determinanten von unitären und orthogonalen Matrizen

Allgemein: $\det A^T \overset{(L6j.2)}{=} \det A$ (1)

$$\det A^\dagger = \det \bar{A}^T \overset{(1)}{=} \det \bar{A} = \overline{\det A} \quad (2)$$

Für unitäre Matrizen: $|\det \mathcal{U}| = 1$ (3)



Beweis: $1 \overset{(L6h.5)}{=} \det(\mathbb{1}) \overset{(1)}{=} \det(\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}) \overset{(L6p.6)}{=} (\underbrace{\det \mathcal{U}^\dagger}_{(2)\ \overline{\det \mathcal{U}}})(\det \mathcal{U}) = |\det \mathcal{U}|^2$ (4)

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & is \\ is & c \end{vmatrix} = c^2 - (is)^2 = 1$ (6)

$\Rightarrow \boxed{|\det \mathcal{U}| = 1}$ (5)

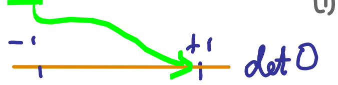
Für orthogonale Matrizen: $\det O = \pm 1$ (7)

Beweis: analog zu (3), aber mit $\det O \in \mathbb{R}$ (8)

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & -s \\ s & c \end{vmatrix} = c^2 - s(-s) = 1$ (9)

Orthogonale Matrizen mit $\det(O) = +1$ bilden eine Untergruppe von O(n):

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ O \in mat(\mathbb{R},n,n) : O^T O = \mathbb{1} ,\ \det O = 1 \}$ (1)



SO(n) ist 'Untergruppe' von O(n), also geschlossen:

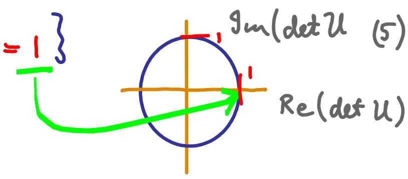
denn falls $\begin{cases} \det O_1 = 1 \\ \det O_2 = 1 \end{cases}$ gilt auch: $\det(O_1 O_2) = \underbrace{(\det O_1)}_{+1} \underbrace{(\det O_2)}_{+1} = 1$ (2)

SO(3)-Matrizen beschreiben '<u>Drehungen</u>' im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Alle anderen Matrizen in O(3), d.h. alle mit $\det O = -1$, beinhalten auch <u>Spiegelungen.</u> (3)

Beispiel: Spiegelung in $\mathbb{R}^3$: $S = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$, $\det S = (-1)^3 = -1$ (4)

Unitäre Matrizen mit $\det(U) = +1$ bilden eine Untergruppe von U(n):

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ U \in M(n \times n, \mathbb{C}) : U^\dagger U = \mathbb{1} ,\ \det U = 1 \}$ (5)



Anwendung SU(2): QM-Theorie des Drehimpuls

L8.2 Hermitesche und symmetrische Abbildungen

Sei V ein komplexer/reeller Vektorraum v. mit Dimension n

und $\hat{A} : V \to V, \quad \hat{v} \mapsto \hat{A}\hat{v}$ eine lineare Abbildung. (1)

Falls sie die Eigenschaft $\langle \hat{A}\hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{A}\hat{w} \rangle$ hat, (2)

heisst die Abbildung hermitesch (für komplexen Vektorraum)
symmetrisch (für reellen Vektorraum)

Eigenschaft (2) führt <u>nicht</u> zu einer Gruppe:

Seien $\hat{A}, \hat{B}$ hermitesch/symmetrisch, gilt das dann auch für $\hat{A}\hat{B}$?

$\langle \hat{A}\hat{B}\hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{B}\hat{v}, \hat{A}\hat{w} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{B}\hat{A}\hat{w} \rangle \overset{\text{im Allgemeinen}}{\neq} \langle \hat{v}, \hat{A}\hat{B}\hat{w} \rangle$ (3)

= gilt nur, falls $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ (4)

Reelle symmetrische/hermitesche Abbildungen finden in der Physik vielfältige Anwendungen:

- kleine Schwingungen um Gleichgewichtslage: EV liefern 'Normalmoden', EW deren charakteristische Frequenzen.
- Quantenmechanik: Observablen werden durch 'hermitesche Operatoren', salopp gesagt, 'hermitesche Matrizen', beschrieben. Eigenwerte des Hamilton-Operators (Energie-Operators) liefern die 'Eigenenergien' eines Quantensystems.

Hermitesche/symmetrische Matrizen

Metrik: $g_{ij} = \delta_{ij}$

L8.2b

Eine hermitesche/symmetr. Abbildung $\hat{A}$ habe, bezüglich einer Orthonormalbasis von V,

die Matrixdarstellung: $\vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \{v^i\} \in \mathbb{C}^n, \quad (A \cdot \vec{v})^k = A^k{}_j v^j$ (1)

Forderung: $$\langle \vec{v}, A\vec{w} \rangle = \langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle \qquad (2)$$

$$\overline{v^m} \delta_{mk} (A\vec{w})^k = \overline{(A\vec{v})^l} \delta_{lj} w^j \qquad (3)$$

$$\overline{v^m} \delta_{mk} A^k{}_j w^j = \overline{A^l{}_m} \overline{v^m} \delta_{lj} w^j \qquad (4)$$

$$\delta_{mk} A^k{}_j = \overline{A^l{}_m} \delta_{lj} = (A^\dagger)_m{}^l \delta_{lj} \qquad (5)$$

Indizes hoch-runterziehen:

$$A^i{}_j = \delta^{im} \delta_{mk} A^k{}_j \overset{(5)}{=} \delta^{im} (A^\dagger)_m{}^l \delta_{lj} \overset{\text{(L8.1f.4)}}{=} (A^\dagger)^i{}_j \qquad (6)$$

Für hermitesche Abbildung: $\boxed{A = A^\dagger}$ Matrix ist 'hermitesch' (7)

Für symmetrische Abbildung: $\boxed{A = A^T}$ Matrix ist 'symmetrisch' (8)

L8.2c

Def: $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls
(L8.2b.7)

$$A \overset{!}{=} A^\dagger \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad A^i{}_j \overset{!}{=} (A^\dagger)^i{}_j \overset{\text{(L5.2f.3)}}{=} \overline{A^j{}_i} \qquad (2)$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & +2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Def: $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ oder $\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls
(L8.2b.8)

$$A \overset{!}{=} A^T \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad A^i{}_j \overset{!}{=} (A^T)^i{}_j \overset{\text{(L5.2e.3)}}{=} A^j{}_i \qquad (5)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Diagonalisierung v. hermiteschen und symmetrischen Matrizen

Eigenschaften von hermiteschen (also auch von symmetrischen reellen) Matrizen:
- immer diagonalisierbar;
- alle Eigenwerte sind reell;
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation ist unitär (bzw. orthogonal)

Satz 1: Für hermitesche Matrizen sind alle EW reell. | L8.2d

Beweis: zunächst, $\langle \vec v_i, A\vec v_i\rangle \overset{(a.2)}{=} \langle A\vec v_i, \vec v_i\rangle \overset{(c.3)}{=} \overline{\langle \vec v_i, A\vec v_i\rangle} \Longrightarrow$ reell (1)

EW-Gleichung: $A\vec v_i = \vec v_i \lambda_i$ [hier keine ES !] (2)

$\langle \vec v_i, (2)\rangle$ $\underbrace{\langle \vec v_i, A\vec v_i\rangle}_{(1)\ \text{reell}} \overset{(1)}{=} \langle \vec v_i, \vec v_i\lambda_i\rangle \underset{(L8.2c.4')}{=} \underbrace{\langle \vec v_i,\vec v_i\rangle}_{\text{reell}}\lambda_i$ (L8.2c.7) $\Longrightarrow$ $\boxed{\lambda_i = \bar\lambda_i \quad \text{auch reell !!}}$ (3) □

Satz 2: Für hermitesche Matrizen sind die EV zu verschiedenen EW orthogonal. (4)

Beweis: Sei $A\vec v_i = \lambda_i \vec v_i$, (5) $A\vec v_j = \lambda_j\vec v_j$, (6) mit $\lambda_i\neq\lambda_j$ (7)

$\langle\vec v_j,(5)\rangle$: $\langle \vec v_j, A\vec v_i\rangle \overset{(5)}{=} \langle \vec v_j, \lambda_i\vec v_i\rangle \overset{(L8.2c.4)}{=} \langle \vec v_j,\vec v_i\rangle\lambda_i$ (8)

(a.2)

$= \langle A\vec v_j, \vec v_i\rangle \overset{(6)}{=} \langle \lambda_j \vec v_j, \vec v_i\rangle = \bar\lambda_j\langle\vec v_j,\vec v_i\rangle \overset{(3)}{=} \lambda_j\langle \vec v_j,\vec v_i\rangle$ (9)

(8) − (9) = 0: $\langle\vec v_j,\vec v_i\rangle(\lambda_i-\lambda_j) = 0$ (10) $\overset{(7)}{\Longrightarrow}$ (L8.2c.4) $\boxed{\langle \vec v_j,\vec v_i\rangle = 0}$ (11)

Sätze 1 & 2 gelten insbesondere auch für symmetrische, reelle Matrizen; (12)
für diese folgt aus (2) & (3) auch, dass EV rein reell sind, $\vec v_i\in\mathbb R^n$ (13)

Satz 3: Alle hermiteschen Matrizen sind diagonalisierbar (1) (gilt insbesondere auch für alle reelle, symmetrischen Matrizen) | L8.2e

Sei $A:\mathbb C^n\to\mathbb C^n$ hermitisch, und $A\cdot\vec v_1 = \lambda_1\vec v_1$ (2) eine Lösung des EW-Problems.
Sei $V_1^\perp = \{\vec x\in\mathbb C^n \mid \langle \vec x,\vec v_1\rangle = 0\}$ (3) der Unterraum orthogonal zu $\vec v_1$, mit $\dim(V_1^\perp)=n-1$

Es gilt: $\boxed{\text{Falls } \vec x\in V_1^\perp, \text{ dann } A\cdot\vec x\in V_1^\perp}$ (4) denn: $\langle A\cdot\vec x,\vec v_1\rangle \overset{(a.2)}{=} \langle\vec x, A\vec v_1\rangle \overset{(2)}{=} \underbrace{\langle\vec x,\vec v_1\rangle}_{(3)\ =0}\lambda_1 = 0$ (5)

Also bildet A den Unterraum $V_1^\perp$ auf sich selbst ab: $A: V_1^\perp\to V_1^\perp$ (6)

Wähle eine neue Basis für $\mathbb C^n$: $\{\vec v_1, \underbrace{\vec f_2,\dots,\vec f_n}_{\text{Basis für } V_1^\perp}\}$, mit $\langle\vec v_1,\vec f_j\rangle \overset{(3)}{=} 0$, $j=2,\dots,n$ (7)

Für die Darstellung von A in der neuen Basis, $A' = TAT^{-1}$ gilt:

$A'\cdot\vec v_1 \overset{(d.2)}{=} \vec v_1\cdot\lambda_1 + \sum_{i=2}^n \vec f_i\cdot 0$ (8a)

$A'\cdot\vec f_j \overset{(4)}{=} \vec v_1\cdot \underset{\vec v_1\notin V_1^\perp}{0} + \sum_{i=2}^n \vec f_i B^i{}_j$ (8b)

$$\Longrightarrow A' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B^2{}_2 & \cdots & B^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B^n{}_2 & \cdots & B^n{}_n \end{bmatrix} \\ \vec v_1, \ \vec f_2, \ \dots \ \vec f_n \end{array} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (9)$$

(L5.5a.4): Spalten sind Bildvektoren von $\vec v_1, \vec f_2, \dots \vec f_n$

B: hermitesch, $(n-1)\times(n-1)$

Iteriere: sei $B\cdot\vec v_2=\lambda_2\vec v_2$ (10)
eine Lösung des EW-Problems für B: $\xrightarrow[\text{Argumentation}]{\text{analoge}}$ $A'' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & \vdots & C & \end{bmatrix}$ (11) $\Longrightarrow$ $A''' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$

So erhält man eine Basis von n orthogonalen EV, in der transformierte Form von A diagonal ist: (12)

Fazit: für hermitesche Matrizen $A \in \mathbb{C}(n,n)$ können die n EV, $\vec{v}_j,\ j=1,\dots,n$ so gewählt werden, dass sie (nach Normierung) eine <u>Orthonormalbasis</u> für $\mathbb{C}^n$ bilden: L8.2f

$$\boxed{\delta_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle} \qquad (1)$$

Sei nun T die Matrix mit EV als <u>Spalten</u>vektoren:

$$T \equiv (\vec{v}_1, \dots, \underset{\text{Eigenvektor } j}{\vec{v}_j}, \dots, \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} v^1{}_1 & v^1{}_j & v^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^k{}_1 & v^k{}_j & v^k{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^n{}_1 & v^n{}_j & v^n{}_n \end{pmatrix} \equiv \{v^k{}_j\} \qquad (2)$$

Dann ist T unitär, laut (L8j.3), also $T^\dagger \cdot T = \mathbb{1}$ (3) $\Longrightarrow$ $\boxed{T^{-1} = T^\dagger}$ (4)

Aber, es gilt auch: $T^{-1} \cdot A \cdot T \overset{(L7.e.1)}{=} D$ (5)

Folglich wird A durch <u>unitäre</u> Transf. diagonalisiert: $\boxed{T^\dagger \cdot A \cdot T \overset{(4,5)}{=} D}$ (6a) $\Longleftrightarrow$ $A = T \cdot D \cdot T^\dagger$ (6b)

Visualisierung:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{pmatrix} \cdot A \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \overset{(g.6)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

adjungierte EV als Zeilenvektoren — EV als Spaltenvektoren — EW als Diagonalelemente

---

Analog: für reelle symmetrische Matrix sind EV rein reell, somit: $T^\dagger = T^T$ (8)

wird also durch <u>orthogonale</u> Transf. (<u>Drehungen</u>) diagonalisiert: $\boxed{T^T \cdot A \cdot T = D \quad \text{mit} \quad T^T \cdot T = \mathbb{1}}$ (9)

Transponierte EV — EV als Spalten-

<u>Beispiel</u>: L8.2g

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ch. Polynom: $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$ (2)

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$ (3)

EV 1: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, (4) Check: $A \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + i\cdot i \\ -i\cdot 1 + 1\cdot i \end{pmatrix} = 0$ (5)

EV 2: $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, (6) Check: $A \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + i\cdot(-i) \\ -i\cdot 1 + 1\cdot(-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 2\vec{v}_2$ (7)

Ähnlichkeitstranformation: $T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, (8)

Check (6b): $T \cdot D \cdot T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$ (9)

$$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} A \qquad (10)$$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Matrizen

ZL 8a

Reelles Skalarprodukt (L3.1): $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u^i \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{R}$

Komplexes Skalarprodukt (L3.4): $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^i} \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{C}$

Komplexe Matrix:

$A = \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

$(A)^i{}_j = A^i{}_j$

Adjungierte Matrix:

$A^\dagger \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$,

$(A^\dagger)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^\dagger)_i{}^j \equiv \overline{(A)^j{}_i}$

in Ortnormalbasis

Transponierte Matrix:

$A^T \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$

$(A^T)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^T)_i{}^j \equiv (A)^j{}_i$

in Ortnormalbasis

$\mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \ni U$ ist 'unitär' falls $U^\dagger \cdot U = \mathbb{1} \overset{\text{(äquivalent)}}{\Leftrightarrow} U^{-1} = U^\dagger$

Komplexes Skalarprodukt invariant: $\langle U \cdot \vec{v}, U \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \ni O$ ist 'orthogonal' falls $O^T \cdot O = \mathbb{1} \overset{(1)\ \text{(äquivalent)}}{\Leftrightarrow} O^{-1} = O^T$

Reelles Skalarprodukt invariant: $\langle O \cdot \vec{v}, O \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine orthonormierte Basis. $U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \qquad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Gruppen

ZL 8b

'Unitäre Gruppe': $U(n) = \{ U \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) ; \ U U^\dagger = \mathbb{1} \}$

'Orthogonale Gruppe': $O(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) ; \ O^T O = \mathbb{1} \}$

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ U \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) : U^\dagger U = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) : O^T O = \mathbb{1}, \ \det O = 1 \}$

Zusammenfassung: L8.2 Hermitesche/symmetrische Matrizen

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

Für hermitesche Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{z}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{z}, \vec{x} \rangle$

Zusammenfassung: L8.2 Diagonalisierung v. hermiteschen und symm. Matrizen

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls $A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j = (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

in Orthonormalbasis

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j = (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

(oder $\mathbb{R}$)

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \overline{\lambda}$
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \rangle = 0$

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{array} \right\}$ Matrizen ist $T \left\{ \begin{array}{ll} \text{unitär:} & T^{-1} = T^\dagger \\ \text{orthogonal:} & T^{-1} = T^T \end{array} \right.$

$$T^\dagger \cdot A \cdot T = D \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{bmatrix} \cdot A \cdot (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \underset{(g.6)}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

adjungierte EV als Zeilenvektoren

EV als

EW als Diagonalelemente