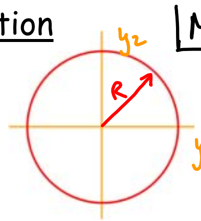
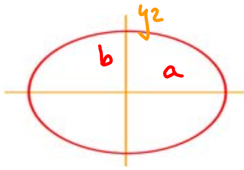
Anwendung v. symmetrischen Matrizen: Hauptachsentransformation

Einleitende Bemerkungen:

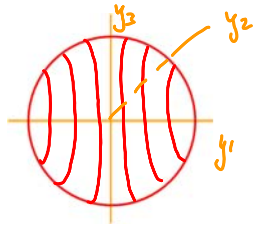
Gl. für Kreis: $$\frac{y_1^2}{R^2} + \frac{y_2^2}{R^2} = 1 \qquad (1)$$



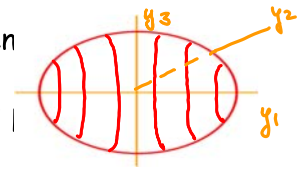
Gl. für Elllipse: (gestauchter Kreis) $$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$



Gl. für Kugel: $$\frac{y_1^2}{R^2} + \frac{y_2^2}{R^2} + \frac{y_3^2}{R^2} = 1 \qquad (3)$$



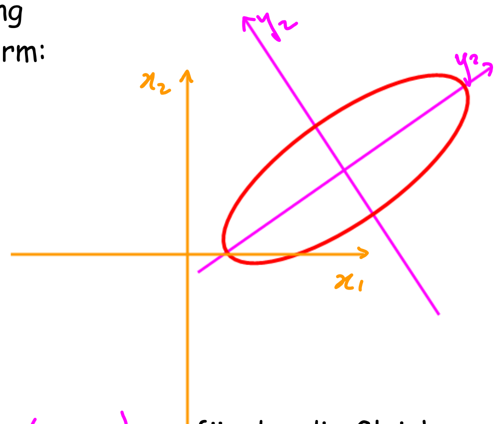
Gl. für Elllipsoid: (gestauchter Kugel) $$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$



Diese Gleichungen haben eine "einfache" Form, weil das Koordinaten
so gewählt ist, dass
- dessen Ursprung im Mittelpunkt von Kreis/Ellipse/Kugel/Ellipsoid l
- dessen Koordinatenachsen parallel zu den Symmetrieachsen von Ellipse bzw. Ellipsoide liegen

Ist das nicht der Fall, wird die Form der Gleichungen komplizierter. Z.B. werden wir sehen: die Gleichung für eine verschobene, gedrehte Ellipse hat die Form:

$$a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0 \,, \qquad (1)$$



Kompaktere Notation, mit $\vec{x} = (x_1, x_2)$:

$$\vec{x}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} + \vec{b} \cdot \vec{x} + c = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe: Bestimme dasjenige Koordinatensystem (y_1, y_2), für das die Gleichung für die Ellipse die (einfachst-mögliche) "Normalform" (67.2) annimmt, nämlich:

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

Die entsprechenden Koordinatenachsen heißen "Hauptachsen"

Die Transformation von (x_1, x_2) zu (y_1, y_2) heißt "Hauptachsentransformation",

und hat die allg. Form: $$\vec{y} = \underline{\underline{D}} \cdot \vec{x} + \vec{b} \qquad (4)$$

$\vec{b}$: Verschiebung

$\underline{\underline{D}}$: Drehung, die $\underline{\underline{A}}$ diagonalisiert

Zunächst untersuchen wir den Einfluß einer Drehung des Koordinatensystems auf Form der Gleichung (67.4). Dafür schreiben wir sie kompakt mittels Matrizen: M69

$$(67.4):\quad 1 = \frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{y_3^2}{c^2} = (y_1\ \ y_2\ \ y_3)\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}&0&0\\0&\frac{1}{b^2}&0\\0&0&\frac{1}{c^2}\end{pmatrix}}_{:=\underline{\underline{\Delta}}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \vec{y}^T\cdot\underline{\underline{\Delta}}\cdot\vec{y} \qquad (1)$$

Transformiere zu gedrehten Koordinatenachsen, $\quad \vec{x} = \underline{\underline{D}}\cdot\vec{y} \qquad (2)$

mittels orthgonaler Drehmatrix: $\underline{\underline{D}} \in M(3\times 3,\mathbb{R})$, $\quad \underline{\underline{D}}^T \overset{(35.2)}{=} \underline{\underline{D}}^{-1} \qquad (3)$

Rücktransformation: $\quad \underline{\underline{D}}^T\cdot\vec{x} \overset{(2)}{=} \overbrace{\underline{\underline{D}}^T\cdot\underline{\underline{D}}}^{(3):\ \underline{\underline{I}}}\cdot\vec{y} = \vec{y} \qquad (4)$

$(4)^T$: $\quad \vec{y}^{\,T} \overset{(4)}{=} (\underline{\underline{D}}^T\cdot\vec{x})^T = \vec{x}^T\cdot(\underline{\underline{D}}^T)^T = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{D}} \qquad (5)$

(4), (5) eingesetzt in (1): $\quad 1 \overset{(1)}{=} \vec{x}^T\underbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\underline{\Delta}}\cdot\underline{\underline{D}}^T}_{=:\ \underline{\underline{A}}}\cdot\vec{x} = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} \qquad (6)$

Fazit: falls alle Eigenwerte v. $\underline{A}$ positiv sind, beschreibt (6) ein gedrehtes Ellipsoid. (7)

Betrachte nun das umgekehrte Problem. Gegeben sei eine quadratische Gl: M70

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_i\,x_j \qquad \left[\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\tfrac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})}_{=:\ a_{ij}\ =\ a_{ji}}\,x_i\,x_j\ \right] \qquad (1)$$

symmetrisierte Form:

$$\left[\begin{array}{l}\text{z.B. } n=2:\\ c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 = c_{11}x_1^2 + \tfrac12(c_{12}+c_{21})x_1x_2 + \tfrac12(c_{12}+c_{21})x_2x_1 + c_{22}x_2^2\end{array}\right] \qquad (2)$$

Wie bringt man (1) in Hauptachsenform (a la 69.1)?

Schreibe (1) als Matrixgleichung: $\quad 1 = (x_1,\ \dots,\ x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \qquad (3)$

mit: $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})$

(per Konstruktion symmetrisch!)

und diagonalisiere: $\quad 1 \overset{(3)}{=} \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} \qquad (4)$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{D}}^T\cdot\underline{\underline{\Delta}}\cdot\underline{\underline{D}}$

$$1 = \underbrace{\vec{x}^T\cdot\underline{\underline{D}}^T}_{:=\vec{y}^{\,T}}\cdot\underline{\underline{\Delta}}\cdot\underbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\vec{x}}_{:=\vec{y}} = \vec{y}^{\,T}\cdot\underline{\underline{\Delta}}\cdot\vec{y} \qquad (5)$$

In diesem Zusammenhang heißt $\underline{\underline{D}}$ "Hauptachsentransformation" (6)

Beispiel: Finde Hauptachsenform für folgende Gleichung:

$$3x_1^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{x_1x_2 + x_2x_1} + 3x_2^2 = 0 \quad (1)$$

symmetrische Schreibweise: $x_1x_2 + x_2x_1$

$$\overset{(70.1)}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Um geeignete Drehung zur Hauptachsenform zu finden, diagonalisiere:

Bestimme Eigenwerte: $0 \overset{!}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$ (3)

$= (\lambda - 4)(\lambda - 2)$ (4)

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \lambda_1 = 4 \;, \quad \lambda_2 = 2$ (5)

Eigenvektor zu λ_1: $\vec{0} \overset{!}{=} (\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_1 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (6)

Normierung

Eigenvektor zu λ_2: $\vec{0} \overset{!}{=} (\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_2 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (7)

EV sind orthonormal: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$ ✓ (8)

gesuchte Drehmatrix: $\underline{\underline{D}} \overset{(62.2)}{=} (\vec{v}_2, \vec{v}_1) \overset{(71.6,7)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix}$ (1)

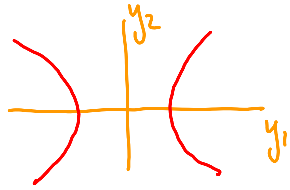
beschreibt Drehung um $\pi/4$, siehe (BB4.5)

Bemerkung 1: durch geeignete Wahl der Vorzeichen der EV, kann man stets erreichen, dass $\det \underline{\underline{D}} = 1$ (2)

[Hätten wir z.B. statt (72.1) $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gewählt, wäre $\det \underline{\underline{D}} = -1$] (3)

Bemerkung 2: Falls EW v. $\underline{\underline{A}}$ verschiedene Vorzeichen haben, ergeben sich Hyperbeln:

Normalform einer Hyperbel: $\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$



Betrachte nun zusätzlich zu Drehungen auch Verschiebungen in (69.2): **M73**

$$\vec{x} = \underline{\underline{D}}\cdot\vec{y} - \vec{d} \quad\Rightarrow\quad \vec{y} = \underline{\underline{D}}^T\cdot(\vec{x}+\vec{d}) \qquad (1)$$

(1) in (69.1):

$$1 \overset{(69.1)}{=} \vec{y}^T\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\vec{y} = (\vec{x}+\vec{d})^T \underbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\underline{\underline{D}}^T}_{=:\,\underline{\underline{A}}}\cdot(\vec{x}+\vec{d}) \qquad (2)$$

$$1 = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + \underbrace{\vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{d}} + \vec{d}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + \vec{d}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{d} \qquad (3)$$

$$(\cdots)\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} = \cdot = \cdot^T \qquad (\vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{d})^T = \vec{d}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} =$$

$$1 = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + 2\,\vec{d}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + \vec{d}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{d} \qquad (4)$$

Fazit: Verschiebung liefert zusätzliche Terme, linear in $\vec{x}$ und $\vec{x}$ -unabhängiog

Umgekehrte Fragestellung: betrachte allgemeine Form einer quadratischen Gleichung:

$$0 = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + \vec{b}\cdot\vec{x} + c\,, \qquad (5)$$

mit $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ symmetrisch $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^T$ (6)

Ziel: schreibe (5) um in die Normalform $1 = \vec{y}^T\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\vec{y}$ (7)

Trick: "<u>Quadratische Ergänzung</u>"! **M74**

Wohlbekannt für Zahlen:

$$0 = ax^2 + bx + c \qquad (1')$$

$$= \overset{13}{a}x^2 + \overset{14}{\tfrac12 xb} + \overset{23}{\tfrac12 bx} + c \qquad (2')$$

$$= \underbrace{(\overset{1}{x} + \overset{2}{\tfrac12 a^{-1}b})}_{y}\,a\,\underbrace{(\overset{3}{x} + \overset{4}{\tfrac12 a^{-1}b})}_{y} \qquad (3')$$

$$\underbrace{-\tfrac14 \overset{24}{b a^{-1} b} + c}_{:=\,-g}$$

$$0 = ay^2 - g \qquad (4')$$

$$1 = \lambda y^2\,, \qquad (5')$$

$$y = x + \tfrac12 a^{-1}b \qquad (6')$$

$$\lambda = \frac{a}{g}\,,\quad g = \frac14\frac{b^2}{a} - c \qquad (7')$$

Verallgemeinerung auf Matrizen:

$$0 = \vec{x}^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} + \vec{b}\cdot\vec{x} + c \qquad (1)$$

$$= \vec{x}^T\cdot\overset{13}{\underline{\underline{A}}}\cdot\vec{x} + \overset{14}{\tfrac12\vec{x}^T\cdot\vec{b}} + \overset{23}{\tfrac12\vec{b}^T\cdot\vec{x}} + c \qquad (2)$$

$$= (\overset{1}{\vec{x}} + \overset{2}{\tfrac12\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b}})^T\cdot\underline{\underline{A}}\cdot(\overset{3}{\vec{x}} + \overset{4}{\tfrac12\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b}}) \qquad (3)$$

$$\left(-\tfrac14\vec{b}^T\cdot\overset{24}{\underline{\underline{A}}^{-1}}\cdot\vec{b} + c\right) =:-g$$

diagonalisiere: $\underline{\underline{A}}$

$$0 = \underbrace{(\vec{x}+\tfrac12\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b})^T\cdot\underline{\underline{D}}^T}_{=:\,\vec{y}^T}\cdot\overbrace{\cdot\,\hat{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\cdot}^{\underline{\underline{A}}}\underbrace{\underline{\underline{D}}\cdot(\vec{x}+\tfrac12\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b})}_{:=\,\vec{y}} - g \qquad (4)$$

$$1 \overset{(4)/g}{=} \vec{y}^T\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\vec{y} \qquad \text{(gesuchte Normalform)} \qquad (5)$$

mit $\vec{y} = \underline{\underline{D}}\cdot(\vec{x}+\tfrac12\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b})$ (6)

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \frac1g\,\hat{\underline{\underline{\Lambda}}} = \frac1g\,\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{D}}^T\,,\qquad g = \tfrac14\vec{b}^T\cdot\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\vec{b} - c \qquad (7)$$

Verallgemeinertes Eigenwertproblem

M75

Gegeben seien zwei symmetrische Matrizen, $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{I}} \in M(n \times n, \mathbb{R})$
mit $\underline{\underline{I}}$ "positiv definit", d.h. alle EW sind positiv (> 0). (1)

Finde EW λ_i und EV $\vec{v}_i$, die "verallgemeinerte Eigenwertgleichung" erfüllen:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_i = \underline{\underline{I}} \cdot \lambda_i \vec{v}_i \qquad (2)$$

Äquivalente Formulierung: finde $\underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, $\underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (3)

so dass folgende Gleichung gilt:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \qquad (4)$$

(lasse vortan Punkte weg)

Lösungstrategie:
diagonalisiere zunächst

$$\underline{\underline{I}} := \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{M}}\ \underline{\underline{D}}^T \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{M}} = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_n) \qquad (5)$$

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T \qquad (6)$$

"Teile durch $\underline{\underline{M}}$", und bringe dadurch (4) in die übliche Form,

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}\ \tilde{\underline{\underline{S}}} = \hat{\underline{\underline{S}}}\ \underline{\underline{\Lambda}} \qquad (7)$$

die durch bereits bekannte Diagonalisierungsverfahren gelöst werden kann.

M76

Konkret: $\underline{\underline{I}}$ ist positiv definit, $\Rightarrow$ $m_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ (1)

Schreibe $\underline{\underline{I}} \overset{(75.5)}{=} \underline{\underline{D}}\ \overbrace{\underline{\underline{W}}\ \underline{\underline{W}}}^{\underline{\underline{M}}}\ \underline{\underline{D}}^T$ mit $\underline{\underline{W}} = \mathrm{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n})$ (2)

$$\underbrace{\underline{\underline{W}}^{-1}\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{W}}^{-1}}_{=:\tilde{\underline{\underline{A}}}}\ \underbrace{\underline{\underline{W}}\ \underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{S}}}_{\tilde{\underline{\underline{S}}}} \overset{(75.4)}{=} \underbrace{\underline{\underline{W}}^{-1}\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{W}}}_{\underline{\underline{I}}}\ \underbrace{\underline{\underline{W}}\ \underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{S}}}_{=:\tilde{\underline{\underline{S}}}}\ \underline{\underline{\Lambda}} \qquad (3)$$

Also erhalten wir gewünschte Form (75.7):

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}\ \tilde{\underline{\underline{S}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}}\ \underline{\underline{\Lambda}} \qquad (4)$$

mit $\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{W}}^{-1}\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{W}}^{-1} = \tilde{\underline{\underline{A}}}^T$ (5) und $\tilde{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{W}}\ \underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{S}}$ (6)

$\tilde{\underline{\underline{A}}}$ ist symmetrisch, also diagonalisierbar durch eine Drehung: $\tilde{\underline{\underline{S}}}^{-1} = \tilde{\underline{\underline{S}}}^T$ (7)

Laut (4): Diagonalisierung von $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ liefert gesuchten EW λ_j: $\underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (7)

Laut (6): die dazugehörigen verallgemeinerten EV $\vec{v}_j$ sind die Spaltenvektoren von

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \overset{(75.3)}{=} \underline{\underline{S}} \overset{(6)^{-1}}{=} \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{W}}^{-1}\ \tilde{\underline{\underline{S}}} \qquad (8)$$

Folgerung: das verallgemeinerte Eigenwertproblem ist lösbar!

M77

Aber: EV sind nicht (euklidisch) orthogonal:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{S}} \overset{(74.8)}{=} \overbrace{\tilde{\underline{\underline{S}}}^T \underline{\underline{W}}^{-1} \cancel{\underline{\underline{D}}^T}}^{(\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{W}}^{-1}\tilde{\underline{\underline{S}}})^T} \underbrace{\cancel{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{W}}^{-1}}_{(75.6)\ \underline{\underline{I}}} \tilde{\underline{\underline{S}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \tilde{\underline{\underline{S}}} \neq \underline{\underline{I}} \quad (1)$$

Die EV sind jedoch orthogonal bezüglich $\underline{\underline{I}}$, d.h.

$$\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{I}}\, \underline{\underline{S}} \overset{(1)}{=} \tilde{\underline{\underline{S}}}^T \cancel{\underline{\underline{W}}^{-1}} \underbrace{\underline{\underline{D}}^T \overbrace{\underline{\underline{D}}}^{}}_{=\underline{\underline{I}}} \overbrace{\cancel{\underline{\underline{W}}}\,\cancel{\underline{\underline{W}}}\,\underline{\underline{D}}^T}^{(76.2)\ \underline{\underline{I}}} \underbrace{}_{=\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{D}}\, \cancel{\underline{\underline{W}}^{-1}} \tilde{\underline{\underline{S}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}}^T \tilde{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{I}} \quad (2)$$

Zusammenfassung der Strategie zur Lösung eines verallgemeinerten EW-Problems:

1. Diagonalisiere $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{W}}\,\underline{\underline{W}}\,\underline{\underline{D}}^T$ (76.2).
2. Konstruiere $\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{W}}^{-1} \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{W}}^{-1}$ (76.5).
3. Diagonalisiere $\hat{\underline{\underline{A}}}\, \tilde{\underline{\underline{S}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}}\, \underline{\underline{\Lambda}}$ ← EW (76.4)
4. EV: $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{W}}^{-1} \tilde{\underline{\underline{S}}}$ (76.8)

Physikanwendung:
kleine gekoppelte
Schwingungen:

$\underline{\underline{A}}$: = Federn
$\underline{\underline{I}}$: = Massenmatrix

Wann sind zwei symmetrische Matrizen simultan diagonalisierbar?

M78

Sei $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$, mit:

Simultane Eigenvektoren: $\underline{\underline{D}} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, $\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = 1$ (1)

d.h. $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = a_j \vec{v}_j$ (2) und $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{v}_j = b_j \vec{v}_j$ (3)

$\underline{\underline{B}}$ (2) $\quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = a_j \underline{\underline{B}}\, \vec{v}_j = a_j b_j \vec{v}_j$ (4)

$\underline{\underline{A}}$ (3) : $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \vec{v}_j = b_j \underline{\underline{A}}\, \vec{v}_j = b_j a_j \vec{v}_j$ (5)

(5) − (4) : $\quad (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}})\, \vec{v}_j = \vec{0}$ (6)

Notwendige Bedingung: $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ vertauschen: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ (7)

Ist (76.6) hinreichend?

Diagonalisiere $\underline{\underline{A}}$ mit eventuell entarteten EW: $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}_j = a_j\,\vec{v}_j$ (1)

Sei $\vec{v}$ ein EV aus einem entarteten Unterraum: $\vec{v} \in E_\lambda$ $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$ (2)

Dann ist $\underline{\underline{B}}\,\vec{v}$ ebenfalls ein EV von $\underline{\underline{A}}$ aus demselben entarteten Unterraum:

$$\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\vec{v}\right) \overset{(78.7)}{=} \underline{\underline{B}}\,\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\vec{v}}_{\overset{(2)}{=}\lambda\vec{v}} = \lambda\,\underline{\underline{B}}\,\vec{v} \qquad (3)$$

Folgerung: Multiplikation mit $\underline{\underline{B}}$ lässt die entarteten Unterräume von $\underline{\underline{A}}$ invariant!

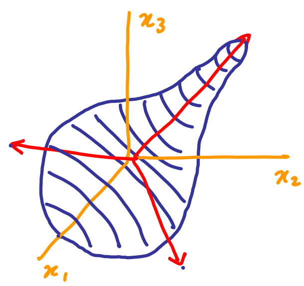
$$\underline{\underline{B}}\,E_\lambda \longrightarrow E_\lambda \qquad (4)$$

Damit kann $\underline{\underline{B}}$ separat auf jedem E_λ diagonalisiert werden.

Zusammen: $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}} \iff \underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ sind simultan diagonalisierbar (5)

Anwendung: Starrer Körper, Trägheitsmoment (demnächst in E1-Vorlesung)

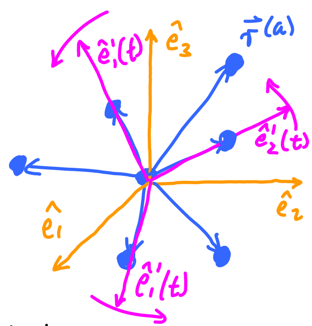
Def: "Starrer Körper" (SK) ist ein System von Massenpunkten [Index (a)], deren Abstände zueinander unter allen Umständen konstant bleiben.



$$\left|\vec{r}^{(a)} - \vec{r}^{(b)}\right| = \text{konstant} \quad \forall\, a,b \qquad (1)$$

Raumfestes Bezugsystem K: $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2,\ \hat{e}_3$ (2)

Körperfestes Bezugsystem K': $\hat{e}'_1(t),\ \hat{e}'_2(t),\ \hat{e}'_3(t)$ (3)
("im SK festgeklebt")



Reine Rotationsbewegung: $\dot{\hat{e}}'_i(t) \overset{(BB10.1)}{=} \vec{\omega}(t)\times\hat{e}'_i(t)$ (4)

Koordinaten v. Punkt (a) im SK: $\vec{r}^{(a)}(t) \overset{(BB10.2)}{=} x_i^{(a)}\cancel{(t)}\;\hat{e}'_i(t)$ (5)

zeitunabhängig, da der Körper "starr" ist!

Geschwindigkeit v. Punkt (a), aus Sicht v. K: $\dot{\vec{r}}^{(a)} \overset{(BB10.3)}{=} x_i^{(a)}\,\dot{\hat{e}}'_i \overset{(BB10.6)}{=} \vec{\omega}\times\vec{r}^{(a)}$ (6)

M81

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} \times \dot{\vec{r}}^{(a)} \quad (1)$$

$$\overset{(80.6)}{=} \sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(a)}) \quad (2)$$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \overset{(V43.1)}{=} \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$:

$$= \sum_a m^{(a)} \left[\vec{\omega}\,(\vec{r}^{(a)} \cdot \vec{r}^{(a)}) - \vec{r}^{(a)} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{(a)}) \right] \quad (3)$$

zerlegt nach Komponenten (i = 1,2,3):

$$L_i = \sum_j \underbrace{\sum_a m^{(a)} \left[(\vec{r}^{(a)})^2 \delta_{ij} - r_i^{(a)} r_j^{(a)} \right]}_{\text{"Trägheitstensor"} \;=:\; \tilde{I}_{ij}} \omega_j \quad (4)$$

(5) in Matrixnotation:

$$L_i = \tilde{I}_{ij}\, \omega_j \quad (5)$$

$$\vec{L} = \tilde{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{\omega} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Def: der "Trägheitstensor" ist eine reelle, symmetrische 3x3 Matrix, , mit Matrixelementen

$$\tilde{I}_{ij} = \sum_a m^{(a)} \left[(\vec{r}^{(a)})^2 \delta_{ij} - r_i^{(a)} r_j^{(a)} \right] \quad (7)$$

M82

Kinetische Energie der Rotation:

$$T^{rot}_{kin} = \sum_a \tfrac{1}{2} m^{(a)} (\dot{\vec{r}}^{(a)})^2 \overset{(80.6)}{=} \sum_a \tfrac{1}{2} m^{(a)} (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(a)})^2 \quad (1)$$

Lagrange-Identität:

$$= \sum_a \tfrac{1}{2} m^{(a)} \left[(\vec{\omega})^2 (\vec{r}^{(a)})^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{(a)})^2 \right] \quad (2)$$

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 \overset{(V43.9)}{=} \vec{a}^2\, \vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \underbrace{\sum_a m^{(a)} \left[(\vec{r}^{(a)})^2 \delta_{ij} - r_i^{(a)} r_j^{(a)} \right]}_{\overset{(82.8)}{=} \tilde{I}_{ij}} \omega_j \quad (3)$$

$$T^{rot}_{kin} = \tfrac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \tilde{I}_{ij} \omega_j = \tfrac{1}{2}\, \vec{\omega}^T \cdot \tilde{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{\omega} \qquad (\cdots)\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (4)$$

Rolle v. Trägheitstensor für Rotationen ist analog zur Rolle v. Masse für Translationen:

Vergleiche:	Translation:	Rotation:
Impuls:	$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$ (5)	$\vec{L} \overset{(82.5)}{=} \tilde{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{\omega}$ (5')
Kinetische Energie:	$T^{trans}_{kin} = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$ (6)	$T^{rot}_{kin} \overset{(4)}{=} \tfrac{1}{2}\, \vec{\omega}^T \cdot \tilde{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{\omega}$ (6')
	$= \tfrac{1}{2} M (\dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2 + \dot{R}_3^2)$ (7)	$\overset{(85.4)}{=} \tfrac{1}{2} \left[I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 \right]$ (7')

Da Trägheitstensor $\underline{\underline{\tilde{I}}}$ reell, symmetrisch ist, ist er diagonalisierbar [siehe (64.3)], d.h. es existiert immer eine Matrix $\underline{\underline{D}}$, mit $\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}$, so dass

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\tilde{I}}}\, \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{I}}} = \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{D}}^T \tag{1}$$

Eigenwerte des Trägheitstensors heißen "Trägheitsmomente"

$$(\cdots)\left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\ddots\right)\left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\vdots\right) = (\cdots)\left(\ddots\right)\left(\vdots\right)$$

Schreibe kinetische Energie in folgende Form:

$$T^{rot}_{kin} \overset{(82.4)}{=} \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{\tilde{I}}}\cdot\vec{\omega} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{D}}}_{\vec{\Omega}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underbrace{\underline{\underline{D}}^T\cdot\vec{\omega}}_{=:\,\vec{\Omega}} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\vec{\Omega} \tag{3}$$

Kinetische Energie wird diagonal in Ω_j !

$$T^{rot}_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} I_j\, \Omega_j^2 \tag{4}$$

Trägheitsmomente sind "Massen" für Rotationsbwg; [siehe (82.7')]

"Hauptachsentransformation":

$\underline{\underline{D}}$ ist eine Drehmatrix, die das Koordinatensystem so dreht, dass es entlang der Symmetrieachsen des Körpers liegt. (siehe Skizze, Seite M80)