L7 Diagonalisierung einer Matrix: Eigenwerte und Eigenvektoren

L7a

Viele Anwendungen in der Physik: z.B. Bestimmung der
- Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers durch Diagonalisierung des Trägheitstensors
- Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren durch Diag. der Hamilton-Funktion
- Eigenzustände und Eigenenergien eines Quantensystems durch Diag. des Hamilton-Operators

Gegeben $A = \{A^i{}_j\} \in mat(\mathbb{C}, n, n)$

analoge Diskussion in auch möglich für $mat(\mathbb{R}, n, n)$

$$A: \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

Gesucht: Diagonalform:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Finde T und λ_j ! (2)

Definition: Eigenvektor, Eigenwert

Ein (nicht-Null) Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \; (\vec{v} \neq \vec{0})$ heißt 'Eigenvektor' (EV) von A, falls

$$\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}} \qquad \text{(also } A \cdot \vec{v} \parallel \vec{v}\text{)} \qquad \text{Normierung: egal!} \qquad (3)$$

λ heißt der 'Eigenwert' (EW) von A zugehörig zum 'Eigenvektor' $\vec{v}$ (4)

Eine Gleichung der Form (3) heißt 'Eigenwertgleichung'.

L7b

Oft wird Zusammenhang zwischen λ und $\vec{v}$ mit einem Index angedeutet,
z.B. wird der Eigenvektor v. λ_j durch $\vec{v}_j$ gekennzeichnet.

Beispiel 1: Nullmatrix

$$0 = (0^i{}_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \quad (2)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Nullmatrix, mit EW 0 (3)

Beispiel 2: Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = (\delta^i{}_j) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbb{1} \cdot \vec{v} = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \quad (5)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Einheitsmatrix, mit EW $\lambda = 1$ (6)

Beispiel 3: Diagonalmatrix

L7c

$$D = (\lambda_j \delta^i_j) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in mat(\mathbb{C},n,n), \qquad (1)$$

(nur Diagonalmatrixelemente sind ungleich 0)

Betrachte Standardbasis von $\mathbb{C}^n$:

Spaltenvektor: $$\vec{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in mat(\mathbb{C},n,1) \qquad (2)$$

j-te Stelle

Dann:

$$D \cdot \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \vec{e}_j \qquad (3)$$

j-te Stelle

Also: $\boxed{D \cdot \vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j}$ [hier ist <u>nicht</u> Einstein-Summation gemeint!] (4)

$\Rightarrow$ Diagonalmatrizen haben kanonische Basisvektoren $\vec{e}_j$ als EV (5)
und Diagonalmatrixelemente λ_j als dazugehörige EW. (6)

Diagonalisieren einer Matrix $A \in mat(\mathbb{C},n,n)$

L7d

<u>Definition</u>: A ist 'diagonalisierbar', falls ein Satz von <u>n linear unabhängigen</u> EV existiert.

Angenommen, ein Satz von n linear unabhängigen EV (also eine Basis für $\mathbb{C}^n$) ist bereits bekannt,

mit EW $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, (1) $\qquad \vec{v}_j = \begin{bmatrix} v^1{}_j \\ \vdots \\ v^i{}_j \\ \vdots \\ v^n{}_j \end{bmatrix}$ (2)

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (3)

Merkregel:
i: Komponenten - Index <u>o</u>ben
j: Name des Vektors - Index unten

also: $$A \cdot \vec{v}_j \overset{(a.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j \qquad (4)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)$$

in Komponenten:

$(4)^i$: $$A^i{}_k v^k{}_j = \lambda_j v^i{}_j = v^i{}_k \underbrace{\delta^k{}_j \lambda_j}_{\equiv D^k{}_j} \qquad (5)$$

$$D^k{}_j \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k{}_j \qquad (6)$$

Dann gilt: $$A \cdot T \overset{(5)}{=} T \cdot D \qquad (7)$$ $\qquad (7)^i{}_j = (5)$

mit $$T \equiv \{v^i{}_j\} = \begin{bmatrix} v^1{}_1 & \vdots & v^1{}_j & \vdots & v^1{}_n \\ v^2{}_1 & \vdots & v^2{}_j & \vdots & v^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v^n{}_1 & \vdots & v^n{}_j & \vdots & v^n{}_n \end{bmatrix} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n) \qquad (8)$$

eine Matrix, deren Spaltenvektoren durch die EV gegeben sind! (9)

Die Inverse T^{-1} v. T existiert, da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ per Annahme eine Basis bilden

$$T^{-1} \cdot (d.7): \qquad T^{-1} \cdot A \cdot T = \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= \mathbb{1}} \cdot D = D \overset{(d.6)}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$T \cdot (1) \cdot T^{-1}: \qquad A = T \cdot D \cdot T^{-1} \qquad (2)$$

Man sagt: ' A ist ähnlich zu D ' ('Äquivalenzrelation') falls derartiges T existiert.

A ist 'diagonalisierbar', falls A ähnlich einer Diagonalmatrix ist, (3)

d.h. mit dieser durch eine Basistransformation verknüpft ist.

(Bedingungen für Diagonalisierbarkeit: siehe Vorlesung Lineare Algebra)

<u>Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte</u>

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ mit EV $(\vec{0} \neq) \ \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ und EW $\lambda \in \mathbb{C}$ (4)

Also: $$A \cdot \vec{v} \overset{(a.3)}{=} \lambda \vec{v} = \lambda \mathbb{1} \cdot \vec{v} \qquad (5)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \qquad (A - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \qquad (6)$$

$\overset{(e.6)}{\Longrightarrow}$ Dann ist die Matrix $$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n - \lambda \end{bmatrix}$$ <u>nicht</u> invertierbar. (1)

Denn: wäre $A - \lambda \mathbb{1}$ invertierbar, dann würde aus (e.6) folgen:

$$(A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \cdot (e.6) \qquad \underbrace{(A - \lambda \mathbb{1})^{-1} (A - \lambda \mathbb{1})}_{= \mathbb{1}} \cdot \vec{v} = (A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \cdot \vec{0} \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{im Widerspruch zu (e.4)} \qquad (3)$$

Laut (L6p.1) ist eine Matrix genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante Null ist:

$$\overset{(1),(L6n.5)}{\Longrightarrow} \qquad \boxed{\det (A - \lambda \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0} \qquad (4)$$

(4) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung an alle EW λ von A ,
somit nützlich für deren Bestimmung!

L7g

Def: 'charakteristisches Polynom' der Matrix A :

$$\boxed{P_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda \mathbb{1})} = \begin{vmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n - \lambda \end{vmatrix} \tag{1}$$

$P_A(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades [höchste Potenz v. λ ist λ^n, kommend von (2)
$(A^1{}_1 - \lambda)(A^2{}_2 - \lambda) \cdots (A^n{}_n - \lambda)$ beim Berechnen v. (1)]

[siehe Gl. (4) unten]

Laut (f.4) liefern die n Nullstellen von $P_A(\lambda)$ die n Eigenwerte von A :

$$\boxed{P_A(\lambda) = 0 \quad \overset{(f.4)}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda \text{ ist ein EW von } A} \tag{3}$$

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u> (Doktorarbeit v. Gauss (1799)! Siehe Lin. Alg. Vorlesung)
Ein Polynom n-ten Grades hat genau n (möglicherweise komplexe) Nullstellen. (4)

Es ist möglich, dass mehrere Nullstellen gleich sind. Diese werden 'entartete Nullstellen' genannt.

Rezept zur Bestimmung von EW: Berechne $P_A(\lambda)$, finde dessen Nullstellen! (5)

Fortsetzung Beispiel 4: Bestimmung der EV: L7i

Eigenwertgleichung: $$(A - \lambda_j \mathbb{1})\vec{v}_j \overset{(f.4)}{=} \vec{0} \qquad \forall\, j = 1,2 \qquad (1)$$

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (1) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

j=1: EV zu $\lambda_1 \overset{(h.4)}{=} 3$:

$$\vec{0} \overset{!}{\underset{(1)}{=}} (A - 3\mathbb{1})\vec{v}_1 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-3 & -3 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v}_1 \qquad (2)$$

(Zeilenvektoren sind linear abhängig)

Lösung von (2):
z.B. mittels Gauß

$$\boxed{\vec{v}_1 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \qquad (3)$$

$(A-\lambda_1\mathbb{1})|\vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{1}|\vec{v}_1$: $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} [1]+3[2]: \\ [2]: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ersetze Null-Reihe durch (z.B.) $(\vec{v}_1)^1 = c_1$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} [1]: \\ [2]-[1]: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -c_1 \end{array}\right]$

Reihen dieser Matrix sind nicht linear unabhängig! Daher: Null-Reihe !

Check: erfüllt
(3) die EW-Gl. (1) ?

$$A\cdot\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{(h.4)}{\underset{(3)}{=}} \lambda_1\vec{v}_1 \;\checkmark \qquad (4)$$

j=2: EV zu $\lambda_2 \overset{(h.4)}{=} 1$:

$$\vec{0} \overset{!}{=} (A - 1\mathbb{1})\vec{v}_2 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-1 & -3 \\ 1 & 4-1 \end{bmatrix}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\vec{v}_2 \qquad (5)$$

(Zeilenvektoren sind linear abhängig)

Lösung von (4): z.B.

$$\boxed{\vec{v}_2 = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \qquad (6)$$

Check: erfüllt

$$A\cdot\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\cdot c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{(h.4)}{\underset{(6)}{=}} \lambda_2\vec{v}_2 \;\checkmark \qquad (7)$$

Zusammenfassend: L7j

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{hat EV} \quad \vec{v}_1 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{hat EV} \quad \vec{v}_2 = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Konstruiere nun die Matrizen T und T^{-1}, die A diagonalisieren !

Wähle $c_1 = c_2 = 1$.

EV als Spalten:
$$T \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Inverse von T
$$T^{-1} \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Allgemein gilt für das Inverse einer 2x2-Matrix (siehe L5.4g.2):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (5)$$

[alternativ: nutze Gauß-Verfahren!]

Check: $$T^{-1}\cdot T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} \;\checkmark \qquad (6)$$

Check (e.2): $$T\cdot D\cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A \;\checkmark \qquad (8)$$

<u>Beispiel 5: 3x3 Matrix</u>

Finde EW und EV der Matrix $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda \mathbb{1}\right] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \qquad (2)$$

Entwicklung nach Spalte 1 liefert sofort:

Nullstellen sind offensichtlich: $$\boxed{\lambda_1 = 1 \,, \quad \lambda_2 = 3 \,, \quad \lambda_3 = 2} \qquad (3)$$

Eigenwertgleichung: $$(A - \lambda_j \mathbb{1})\,\vec{v}_j \overset{(e.6)}{=} \vec{0} \qquad \forall\, j = 1,2,3 \qquad (4)$$

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (4) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

<u>j=1: EV zu $\lambda_1 = 1$:</u>

$$\vec{0} \overset{!}{=} (A - \lambda_1 \mathbb{1})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \qquad (5)$$

Lösung: $$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(oder Vielfache davon)} \qquad (6)$$

<u>j=2: EV zu $\lambda_2 = 3$</u> :

$$\vec{0} \overset{!}{=} (A - \lambda_2 \mathbb{1})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 \qquad (1)$$

Lösung: $$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(oder Vielfache davon)} \qquad (2)$$

<u>j=3: EV zu $\lambda_3 = 2$</u> :

$$\vec{0} \overset{!}{=} (A - \lambda_3 \mathbb{1})\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 \qquad (3)$$

Lösung (z.B. mittels Gauß): $$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(oder Vielfache davon)} \qquad (4)$$

$$\underbrace{(A - \lambda_3 \mathbb{1})}\,|\,\vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{1}\,|\,\vec{v}_3 : \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Reihen dieser Matrix sind nicht linear unabhängig! Daher: Null-Reihe!

ersetze Null-Reihe durch (z.B.) $(\vec{v}_3)^3 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad (5)$$

EV als Spalten:

$$T \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

via (L6n.2), oder oder durch Ausprobieren, oder Gauss-Verfahren,

$$T \,|\, \mathbb{1} \overset{\text{ч}}{\Rightarrow} \mathbb{1} \,|\, T^{-1} \qquad (7)$$

Check: $$T^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Check (e.2):

$$T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \checkmark \qquad (8)$$

Entarteter Unterraum

L7m

Def: falls das charakteristische Polynom eine m -fache Nullstelle bei λ_1 (mit $m \le n$) hat,

$$P_A(\lambda) \propto (\lambda - \lambda_1)^m \times \dots \qquad (1)$$

dann kommt derselbe Eigenwert λ_1 m mal vor und wird 'm-fach entartet' genannt.

Falls m linear unabhängige EV mit demselben EW λ_1 existieren,

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \quad , \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_j \quad \forall\, j = 1, \dots, m \qquad (2)$$

bilden sie eine Basis für einen m-dimensionalen 'Eigenraum': $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ (3)

Jeder Vektor $\vec{u} = \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k \in E_{\lambda_1}$ in diesem Eigenraum ist ebenfalls ein EV mit EW λ_1: (4)

Check: $$A \cdot \vec{u} \overset{(4)}{=} A \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{A \cdot \vec{v}_k}_{\overset{(2)}{=}\lambda_1 \vec{v}_k} u^k = \lambda_1 \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k}_{\overset{(4)}{=}\vec{u}} = \lambda \vec{u} \checkmark \qquad (5)$$

$\square$

Eine Orthonormalbasis für E_{λ_1} kann mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, ausgehend von den Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$, konstruiert werden.
Alle Elemente dieser Basis sind selbst EV, mit EW λ_1. (6)

Bemerkung: Diagonalisieren nicht immer möglich:

L7n

Beispiel 6: $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Charakt. Polynom: $$P_A(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \overset{!}{\underset{(g.2)}{=}} 0 \qquad (2)$$

Nullstellen sind komplex: $\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ (3)

Diagonalisieren im Reellen nicht möglich (wohl aber im Komplexen).

Beispiel 7: $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Charakt. Polynom: $$P_A(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \overset{!}{\underset{(g.2)}{=}} 0 \qquad (5)$$

Doppelte Nullstelle: $\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 0$ (6)

Nur ein Eigenvektor (statt zwei): $\vec{0} = (A - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (7)

A ist nicht diagonalisierbar, da das zwei linear unabhängige EV erfordern würde!

Kriterien dafür, dass A diagonalisierbar ist: siehe Lin. Algebra Vorlesung

Zur Kenntnisnahme: falls A nicht diagonalisierbar ist, was kommt dem am nächsten?

Die 'Jordan-Normalform':
Die einzigen nicht-Diagonalelemente liegen direkt über der Diagonale, und sind gleich 1. Die Diagonalelemente direkt links und direkt unter einer solchen 1 sind gleich.

z.B.:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Beispiel hierzu: siehe Altland-Delft-Buch, L7.3

Invariante Eigenschaften einer Matrix

T sei eine beliebige Basistransformationen, und $A' = T A T^{-1}$ (1) Dann gilt:

1. Determinante ist invariant:

$$\boxed{\det(A')} \overset{(1)}{=} \det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = \cancel{\det(T)} \det(A) \underbrace{\det(T^{-1})}_{(L6n.7)\ = 1/\cancel{\det(T)}} = \boxed{\det(A)} \qquad (2)$$

2. Spur ist invariant:

$$Sp(A') = Sp(T \cdot A \cdot T^{-1}) \overset{(L5.6e.4)}{=} Sp(\underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=1} \cdot A) = Sp(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j \qquad (3)$$

A sei diagonalisierbar, $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (4) Dann gilt:

3. Determinante = Produkt der Eigenwerte: $\boxed{\det(A)} \overset{(2)}{=} \det(D) \underset{\text{Leibniz}}{\overset{(L6f.1)}{=}} \boxed{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}$ (5)

4. Spur = Summe der Eigenwerte: $\boxed{Sp(A)} = Sp(D) = \boxed{\sum_j \lambda_j}$ (6)

3. und 4. gelten auch dann, wenn Matrix nicht diagonalisierbar ist:
(also kein T existiert, für welches $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ gilt)

4 (allgemein): Determinante = Produkt der Eigenwerte:

Charakteristisches Polynom: $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda) \qquad (1)$$

Bei $\lambda = 0$: $$P_A(0) = \boxed{\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j} \qquad (2)$$

3 (allgemein): Spur = Summe der Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & & A^n{}_n - \lambda \end{vmatrix} = \underline{(A^1{}_1 - \lambda)(A^2{}_2 - \lambda) \dots (A^n{}_n - \lambda)} + \underline{\text{Terme in } \lambda^{m \le n-2}} \qquad (3)$$

$$= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \underline{\sum_{j=1}^{n} A^j{}_j} + \text{Terme in } \lambda^{m \le n-2} \qquad (4)$$

Andrerseits: $$P_A(\lambda) \overset{(1)}{=} (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \underline{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} + \text{Terme in } \lambda^{m \le n-2} \qquad (5)$$

Vergleiche lineare Terme in (5), (6): $$\boxed{Sp(A) = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j} \qquad (6)$$

Zusammenfassung: L7 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwertgleichung: $$A \cdot \vec{v} = \lambda \, \vec{v} \qquad (1)$$
Eigenwert
Eigenvektor

Bedingung an EW: $$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) := P_A(\lambda) \qquad (2)$$ charakteristisches Polynom

Für $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist $P_A(\lambda)$ ein Polynom v. Grad n, mit n Nullstellen. (3)
diese entsprechen den n Eigenwerten v. A

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen EV $\vec{v}_j$ durch Lösen des linearen Gleichungsystems: $$(A - \lambda_j \mathbb{1}) \vec{v}_j = \vec{0} \qquad (4)$$

Falls n linear unabhängige EV existieren, wird A diagonalisiert durch, $$T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad (5)$$

wobei T die EV als Spaltenvektoren hat: $$T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \qquad (6)$$

Determinante = Produkt der Eigenwerte: $$\det(A) = \prod_j \lambda_j \qquad (7)$$

Spur = Summe der Eigenwerte: $$Sp(A) = \sum_j \lambda_j$$