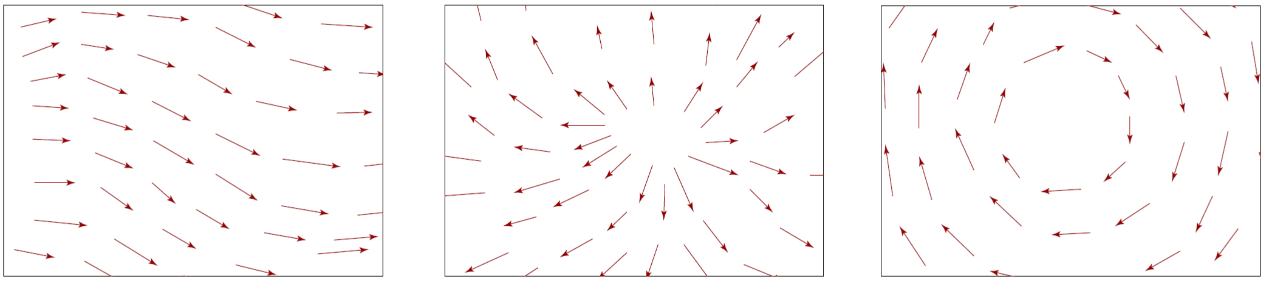
V3.4 Gradientenfelder

V3.4a

Vektorfeld: $\vec{u} : M \subset \mathbb{R}^d \to L \subset \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u^n(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Vektorfelder haben oft Struktur:



I: quellfrei, wirbelfrei

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$

II: Quellfeld

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \neq 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$

III: Wirbelfeld

$\vec{\nabla} \times \vec{u} \neq 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

Ziel (langfristig): wie lassen sich diese Eigenschaften mathematisch charakterisieren?

Gradientenfeld

[wir benutzen kartesische Koordinaten, $\vec{x}$]

V3.4b

Gegeben sei ein Skalarfeld:
$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) \tag{1}$$

Der Gradient dieses Skalarfelds wird ein 'Gradientenfeld' genannt:
$$\vec{\nabla}\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} \equiv \begin{bmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d \varphi(\vec{x}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Umgekehrt: gegeben sei ein Vektorfeld:
$$\vec{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) \tag{3}$$

Frage: ist $\vec{u}$ ein Gradientenfeld?

d.h., existiert ein Skalarfeld φ , der Form (1), mit
$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} \quad ? \tag{4}$$

Beispiel: ist $(d=2)$
$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2 x^2 \end{bmatrix} \quad \text{ein Gradientenfeld?} \tag{5}$$

Ja, denn es lässt sich schreiben als:
$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial^1 (x^1 x^2)^2 \\ \partial^2 (x^1 x^2)^2 \end{bmatrix} = \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} \quad \text{mit} \quad \varphi(\vec{x}) = (x^1 x^2)^2 \tag{6}$$

Wichtige Anwendung: konservative Kraftfelder (Arbeit ist wegunabhängig) sind Gradientenfelder. Deswegen ist es wichtig, Kriterien zu finden die klären, wann $\vec{u}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld ist. **V3.4c**

Sei $\vec{u}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld (hinreichend glatt), dann gilt: $u^i \overset{(V3.2e,4)}{=} \partial^i \varphi \underset{\text{kartesisch}}{=} \partial_i \varphi$ (1)

Somit: $\partial_i u^j - \partial_j u^i = \partial_i \partial_j \varphi - \partial_j \partial_i \varphi = 0$ (2)

Satz v. Schwarz, (C3c.6)

Beispiel: $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2 x^2 \end{bmatrix}$ (3)

$$\partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 = \partial_1\left(2(x^1)^2 x^2\right) - \partial_2\left(2x^1(x^2)^2\right) = 4x^1x^2 - 4x^1x^2 = 0 \quad (4)$$

(2) ist ein notwendige, aber nicht ausreichende, Bedingung für ein Gradientenfeld.

Wir werden zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

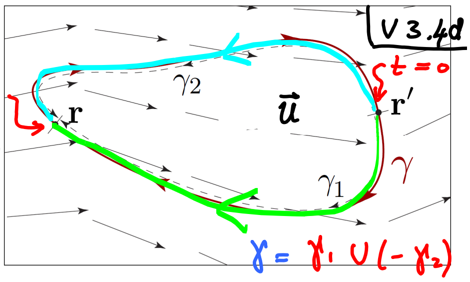
$\left(\int_{\gamma_{\vec{x}'\to\vec{x}}} d\vec{r}\cdot\vec{u}\right.$ ist wegunabhängig $\left.\forall\, \vec{x}', \vec{x} \in M\right) \Longleftrightarrow \left(\oint d\vec{r}\cdot\vec{u} = 0\right.$ Linienintegral entlang beliegigem geschlossenem Weg verschwindet$\left.\right)$ (5)

(6a) $\Updownarrow$ $\Updownarrow$ (6b)

$(\vec{u}$ ist ein Gradientenfeld$)$ (6)

V3.4d

<u>Begründung für (c.5):</u>



Betrachte zwei Wege von $\vec{r}'$ nach $\vec{r}$:

$\gamma_1 = \{\vec{r}_1(t) \mid t \in (0,1)\}$, $\quad \gamma_2 = \{\vec{r}_2(t) \mid t \in (0,1)\}$, (1)

Zweiter Weg, rückwärts: $-\gamma_2 = \{\vec{r}_2(t) \mid t \in (1,0)\}$ (2)

Linienintegral: $\int_{\gamma_2} d\vec{r}\cdot\vec{u} \overset{(1)}{=} \int_0^1 dt\, \frac{d\vec{r}_2}{dt}\cdot\vec{u}(\vec{r}_2(t)) = -\int_1^0 dt\, \frac{d\vec{r}_2}{dt}\cdot\vec{u}(\vec{r}_2(t)) \overset{(2)}{=} -\int_{-\gamma_2} d\vec{r}\cdot\vec{u}$ (3)

Folglich: $\int_{\gamma_1} d\vec{r}\cdot\vec{u} - \int_{\gamma_2} d\vec{r}\cdot\vec{u} \overset{(3)}{=} \int_{\gamma_1} d\vec{r}\cdot\vec{u} \overset{+}{-(-)} \int_{-\gamma_2} d\vec{r}\cdot\vec{u} = \oint_{\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)} d\vec{r}\cdot\vec{u}$ (4)

geschlossener Weg

(4) gilt immer.
Falls (4)=0, folgern wir: $\boxed{\oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{u} = 0 \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \int_{\gamma_1} d\vec{r}\cdot\vec{u} = \int_{\gamma_2} d\vec{r}\cdot\vec{u}}$ (5)

Physikalische Bedeutung von (c.5): ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ wird 'konservativ' genannt,
falls Arbeit entlang <u>jedem</u> geschlossenem Weg = 0: $\oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0 \quad \forall \gamma$ (6)

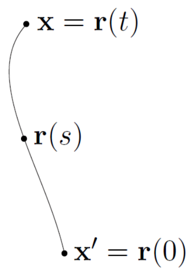
[Die Energie, die bei den entgegen der Kraft gerichteten Wegstrecken verloren geht, wird kompensiert durch die Energie, die bei den entlang der Kraft gerichteten Wegstrecken gewonnen wird.]

Laut (c.5): für konservatives Kraftfeld ist Arbeit <u>wegunabhängig.</u> (7)

Laut (c.6): ein konservatives Kraftfeld ist ein Gradientenfeld. $\vec{F}(\vec{x}) = \underset{\text{Physik-Konvention}}{-}\vec{\nabla}\varphi$ (8)

V3.4e

Begründung für (c.6a) $\Leftarrow$:



Annahme: $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}}$ ist ein Gradientenfeld. (1)

Parametrisierung eines Weges $\gamma_{\vec{x}'\to\vec{x}}$ $\quad \vec{r} : (0,t) \to \mathbb{R}^d$, $\quad s \mapsto \vec{r}(s)$, (2)

$\vec{x}' = \vec{r}(0)$, $\quad \vec{x} = \vec{r}(t)$ (3)

$$\int_{\gamma_{\vec{x}'\to\vec{x}}} d\vec{r}\cdot\vec{u} \overset{\text{(Vim.6)}}{=} \int_0^t ds\, \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \overbrace{\vec{u}(\vec{r}(s))}^{\overset{(1)}{=}\ \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}(s))} \qquad (4)$$

$$\overset{\text{(V3.2e.4)}}{=} \int_0^t ds \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi(\vec{r}(s))}{\partial x^j} \frac{dx^j(s)}{ds} \qquad (5)$$

$$\overset{\text{(C3g.4)}}{\underset{\text{(C3i.2)}}{=}} \int_0^t ds\, \frac{d\varphi(\vec{r}(s))}{ds} \qquad (6)$$

$$= \varphi(\vec{r}(t)) - \varphi(\vec{r}(0)) \overset{(3)}{=} \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}') \qquad (7)$$

(V3.2e.4): $\vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \partial^1\varphi \\ \vdots \\ \partial^d\varphi \end{pmatrix}$

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \cdot \frac{dg^j(x)}{dx} \overset{\text{(C3g.4)}}{=} \frac{df(\vec{g}(x))}{dx}$$

$f \rightsquigarrow \varphi$, $\quad \vec{g} \rightsquigarrow \vec{r}$, $\quad x \rightsquigarrow s$

Gesamtänderung von φ von $\vec{x}'$ nach $\vec{x}$, hängt nur von Endpunkten ab, also unabhängig vom Weg dazwischen!! ($\Leftarrow$ ✓)

Interpretation:

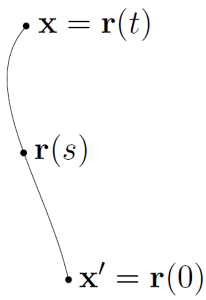
$$\overset{(4)}{=} \int d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\varphi \qquad (8)$$

= Summe der φ -Änderungen entlang aller Wegelemente

V3.4f

Begründung für (c.6a) $\Longrightarrow$:

Annahme: $\int_{\gamma_{\vec{x}'\to\vec{x}}} d\vec{r}\cdot\vec{u}$ ist wegunabhängig. (1)



Wähle Weg durch Punkt $\vec{x}$, parametrisiert als $\quad \vec{r} : (0,t) \to \mathbb{R}^d$, $\quad s \mapsto \vec{r}(s)$ (2)

und definiere:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \int_{\gamma_{\vec{x}'\to\vec{x}}} d\vec{r}\cdot\vec{u} \qquad (3)$$

für gegebenes $\vec{x}'$ ist (3), laut Annahme (1), eine Funktion nur v. $\vec{x}$, nicht vom Weg!

$$\varphi(\vec{r}(t)) = \int_0^t ds\, \vec{u}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \qquad (4)$$

Ableiten nach t:

links: $\frac{d}{dt}\varphi(\vec{r}(t)) \overset{\text{(C3g.4)}}{=} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\varphi(\vec{r}(t))}{\partial x^j} \frac{dx^j(t)}{dt}$ (5)

$= \vec{\nabla}\varphi_{\vec{r}=\vec{r}(t)} \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ (6)

rechts: $\frac{d}{dt} \int_0^t ds\, \vec{u}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ (7)

$= \vec{u}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ (8)

(6)=(8): $\quad \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{u}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ (9)

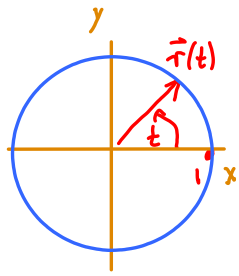
Dies gilt für beliebige Werte der Endgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$

somit: $\boxed{\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}}}$ (10) ($\Longrightarrow$ ✓)

Beispiel 1: $\vec{u}: \mathbb{R}^2 = M \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (1)

V3.4g

Ist dies ein Gradientenfeld? Oder, äquivalente Frage laut (c.6b):
Ist Linienintegral entlang geschlossenen Weg = 0?



Parametrisierung eines Kreises: $t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (3) \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_0^{2\pi} dt \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{u}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (5)$$

$u^1(t) \overset{(1)}{=} y(t)$, $\quad u^2(t) \overset{(1)}{=} x(t)$

$$= \int_0^{2\pi} dt \; [-\sin^2 t + \cos^2 t] = 0 \; ✓ \quad (6)$$

Geschlossenes Linienintegral $=0 \overset{(c.6b)}{\Longrightarrow} \vec{u}$ könnte ein Gradientenfeld sein!

Konsistenzcheck (c.2): $\partial_x u^2 - \partial_y u^1 = \partial_x(x) - \partial_y(y) = 1 - 1 = 0$ ✓ (2)

Aber: (c.2) ist eine notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung!

Notwendige und hinreichende Bedingung für Gradientenfeld (ohne Beweis):

V3.4h

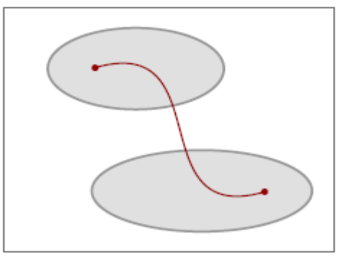
Ein Vektorfeld $\vec{u}: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist ein Gradientenfeld, falls

$$\partial_i u^j - \partial_j u^i = 0 \qquad \forall \; i, j = 1, \dots, d \qquad (1)$$

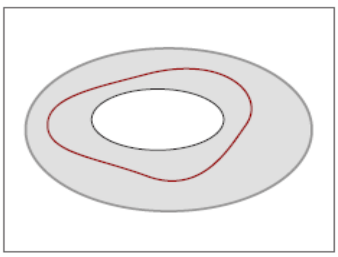
und falls der Definitionsbereich, M, 'einfach zusammenhängend' ist.

Def.: 'Zusammenhängendes Gebiet:' jede zwei Punkte können verbunden werden durch einen Weg, der das Gebiet nicht verlässt $\quad \vec{x}, \vec{x}' \in M$, $\; \gamma_{\vec{x} \to \vec{x}'} \subset M$ (2)

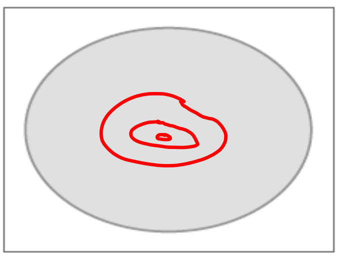
Def.: 'Einfach zusammenhängendes Gebiet:' jeder geschlossene Weg $\subset M$ kann zu einem Punkt zusammengezogen werden. (3)



nicht zusammenhängend



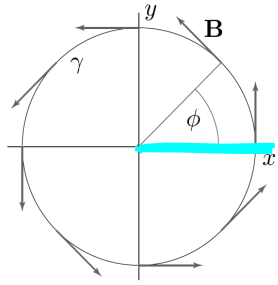
zusammenhängend



einfach zusammenhängend

Beispiel 2: $\vec{B}: M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix}$ V3.4i

$$\partial_x B^2 - \partial_y B^1 = \frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(1 - \frac{x \cdot 2x}{x^2+y^2}\right) - \left(- \quad - \frac{-y \cdot 2y}{x^2+y^2}\right)\right] = 0 \qquad (1)$$



Aber: M ist nicht einfach zusammenhängend. (2)

$\overset{(h.1)}{\Longrightarrow}$ $\vec{B}$ ist kein Gradientenfeld (3)

$\overset{(c.6b)}{\Longrightarrow}$ Linienintegral entlang geschlossenem Weg kann ungleich null sein. (5)

Z.B. Kreis um Ursprung: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad \dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)^T, \quad t = [0, 2\pi]$ (6)

geschlossenes Interval

$$\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{B}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \frac{1}{[\cos^2 t + \sin^2 t]} = \int_0^{2\pi} dt \cdot 1 = 2\pi \neq 0 \qquad (7)$$

vergleiche (5)

Auf einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich, $\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \setminus (\underbrace{\mathbb{R}_0^+}_{x \geq 0} \times \underbrace{\{0\}}_{y=0})$ nicht-negative reelle Achse (8)

ist $\vec{B}$ ein Gradientenfeld: es gilt $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi$ Polarkoordinatenwinkel, $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (0, 2\pi)$ (9)

selber nachrechnen! offenes Interval

Es gilt wieder: $\int_{\tilde{\gamma}} d\vec{r} \cdot \vec{B} \overset{(7)}{=} 2\pi$ (10) das ist kein Widerspruch zu (c.6b), denn nun ist der Weg nicht geschlossen: $\tilde{\gamma} = \gamma \setminus (1,0)$, $t \in (0, 2\pi)$ (11)

Nabla-Operator

V3.2h = V3.4j

Erinnerung (Seite V3.2h): Gradient in kartesischen Koordinaten

$$\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{'grad f'}} : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad (1) \quad \text{mit } \partial^i = \partial_i \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \overset{(e.3)}{\equiv} \begin{pmatrix} (\vec{\nabla} f)^1 \\ (\vec{\nabla} f)^2 \\ \vdots \\ (\vec{\nabla} f)^d \end{pmatrix} \overset{(e.4)}{=} \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i \partial^i\right)}_{\equiv \vec{\nabla}} f \equiv \vec{\nabla} f \qquad (2)$$

Definition: '<u>Nabla-Operator</u>':
(in kartesischen Koordinaten;
Definition üblich für d = 2 und 3)

(nützliche Eselsbrücke, zum Merken von Gradient, Divergenz und Rotation)

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i \partial^i = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \vdots \\ \partial^d \end{pmatrix}} \qquad (3)$$

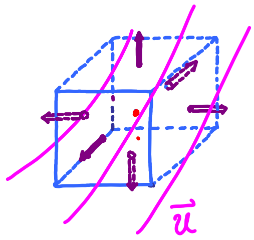
$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Differentialoperator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen. (4)

beinhaltet Ableitungen

liefert einen Vektor, wenn er auf eine skalere Funktion einwirkt

V3.5 Divergenz

Geometrische Interpretation: Ausfluss pro Volumenelement (siehe Januar) | V3.5a



Vektorfeld, d=n:

$$\vec u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d , \quad \vec x \longmapsto \vec u(\vec x) = \begin{bmatrix} u^1(\vec x) \\ \vdots \\ u^d(\vec x) \end{bmatrix} \overset{ES}{=} \vec e_j \, u^j(\vec x) \qquad (1)$$

Definition: 'Divergenz von $\vec u$ in 'kartesischen Koordinaten
(in kartesischen Koordinaten)

$$\mathrm{div}(\vec u) \equiv \vec\nabla \cdot \vec u \; : \; \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^1 \qquad (2)$$

$$\vec x \longmapsto \boxed{\vec\nabla \cdot \vec u(\vec x) \overset{ES}{\equiv} \partial_i u^i(\vec x) = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \dots \partial_d u^d} \qquad (3)$$

Notationscheck:

$$\vec\nabla \cdot \vec u = \overbrace{(\vec e_i \partial^i)}^{(V3.4j.3)} \cdot \overbrace{(\vec e_j u^j)}^{(1)} = \partial^i \delta_{ij} \, u^j = \partial_i u^i \qquad (4)$$

$$\vec e_i \cdot \vec e_j = \delta_{ij}$$

Beispiel:

$$\vec\nabla \cdot \vec x = \partial_1 x^1 + \partial_2 x^2 + \partial_3 x^3 = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (5)$$

Rechenregeln:

$$\vec\nabla \cdot (\vec u + \vec w) = \vec\nabla \cdot \vec u + \vec\nabla \cdot \vec w \qquad (6)$$

$$\vec\nabla \cdot (\varphi \vec u) = (\vec\nabla \varphi) \cdot \vec u + \varphi (\vec\nabla \cdot \vec u) \qquad (7)$$

Beweis v. (6):

$$= \partial_i (\varphi u^i) \overset{\text{Produktregel}}{=} (\partial_i \varphi) u^i + \varphi (\partial_i u^i) \qquad (8)$$

✓

Laplace-Operator (Divergenz v. Gradient):

V3.5b

$$\partial^i = \partial_i$$

$$\vec\nabla \cdot (\vec\nabla \varphi) \overset{(a.3)}{=} \partial_i (\partial^i \varphi) = \sum_i \partial_i^2 \varphi \equiv \vec\nabla^2 \varphi \qquad (1)$$

Definition 'Laplace- Operator' in kartesischen Koordinaten:

$$\boxed{\Delta \equiv \vec\nabla \cdot \vec\nabla = \vec\nabla^2 = \partial_i \partial^i = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2} \qquad (2)$$

(Skalar-Differential operator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen)

Beispiel:

$$\vec\nabla^2 r = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (3)$$

$$\partial_i (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{\cancel{2} x^i}{\cancel{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad (4)$$

gilt für i = 1, 2, 3

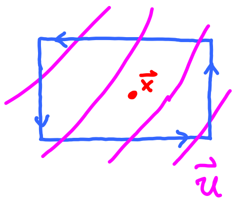
$$\partial_i^2 = - \frac{\cancel{2} (x^i)^2}{\cancel{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{r^3} \left[-(x^i)^2 + r^2 \right] \qquad (6)$$

$$\vec\nabla^2 r \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{3} \left(\quad \right) \overset{(6)}{=} \frac{1}{r^3} \left[-r^2 + 3r^2 \right] = \frac{2}{r} \qquad (7)$$

V3.6a

V3.6 Rotation Geometrische Interpretation: Zirkulation pro Flächenelement



Vektorfeld, d=n=3:

$$\vec{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ u^3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \vec{e}_j u^j(\vec{x}) = \vec{e}^j u_j(\vec{x}) \qquad (1)$$

Definition: 'Rotation von $\vec{u}$' in kartesischen Koordinaten $(u^i = u_i)$

(nur in d=3 Dimensionen definiert)

alternative Notation

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{u} \;:\; M \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{u}(\vec{x}) \equiv \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j u_k} = \begin{bmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Notationscheck:

$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = \underbrace{\overbrace{(\vec{e}^j\partial_j)}^{(V3.4j.3)} \times \overbrace{(\vec{e}^k u_k)}^{(1)}}_{\varepsilon^{jki}\,\vec{e}_i} = \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j u_k \;\checkmark \qquad (3)$$

Beispiel: Sei

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} y^3 \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial_y 0 - \partial_z(-x) \\ \partial_z y^3 - \partial_x 0 \\ \partial_x(-x) - \partial_y y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-3y^2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{\nabla}\times\vec{u} + \vec{\nabla}\times\vec{w} \qquad (5)$$

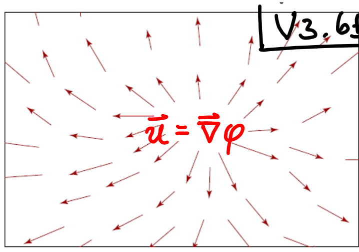
$$\vec{\nabla}\times(\varphi\,\vec{u}) = (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{u} + \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{u}) \qquad (6)$$

Beweis v. (6):

$$= \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j(\varphi u_k) \overset{\text{Produktregel}}{=} \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\left[(\partial_j\varphi)u_k + \varphi(\partial_j u_k)\right] = \qquad (7)$$

V3.6b

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei':



Für ein beliebiges (zweifach differenzierbares) Vektorfeld gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}} \qquad (1)$$

Beweis:
(Beispielaufgabe)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) \overset{(6a.2)}{=} \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j(\partial_k\varphi) \qquad \partial^j = \partial_j \qquad (2)$$

ε_{ijk} ist antisymmetrisch:

$$= -\vec{e}_i\,\varepsilon^{ikj}\,\partial_j\partial_k\varphi \qquad (3)$$

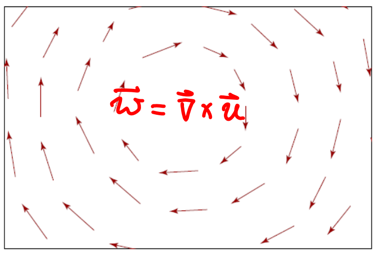
Summationsindizes umbenennen: $k \leftrightarrow j$

$$= -\vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_k\partial_j\varphi \qquad (4)$$

$\partial_k\partial_j\varphi = \partial_j\partial_k\varphi$

$$= -\vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j\partial_k\varphi \overset{(6a.2)}{=} -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) \qquad (5)$$

$(5) = -(5) \Rightarrow (5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0} \;\checkmark \qquad (6)$



Wirbelfelder sind 'quellfrei':

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = 0} \qquad (7)$$

Beweis analog (Hausaufgaben)

Zusammenfassung V3.3: Gradientenfeld

ZV3b

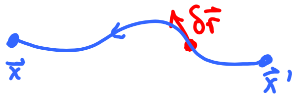
Gradientenfeld: $\vec{\nabla}\varphi : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \longmapsto \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}}$ (1)

$$\left(\int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \text{ ist wegunabhängig } \forall\, \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \Longleftrightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \text{ für geschlossenen Weg}$$

$$\Updownarrow \qquad \qquad \Updownarrow \qquad (1)$$

$$\left(\vec{u} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \Longleftrightarrow \left(\partial_j u^i - \partial_i u^j = 0 \,, \text{ und M ist einfach zusammenhängend} \right)$$

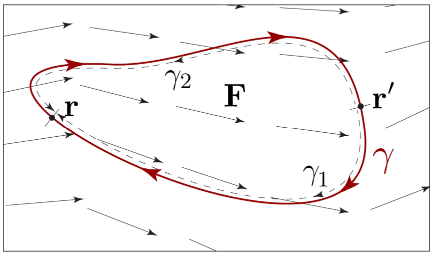
Konkret: $\int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')$ (2)



Konservatives Kraftfeld ist ein Gradientenfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_{\vec{r}}$ (5)

$$W[\gamma] = \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \qquad (6)$$

$$\Longleftrightarrow \quad W[\gamma_1] = W[\gamma_2] \qquad (7)$$



Arbeit von x' nach x ist unabhängig vom Weg!

geschlossener Weg: $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

Zusammenfassung V3.2,4-6: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV3c

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_1\varphi = \dfrac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} \equiv \lim_{\delta \to 0} \dfrac{1}{\delta}\left[\varphi(x^1 + \delta, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)\right]$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \partial_j f(\vec{x})\, u^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{u}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} = \vec{e}_i\, \partial^i \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^3 \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (4)

Nabla-Operator: (Vektor-Diff.-Operator) $\vec{\nabla} = \vec{e}_i\, \partial^i = \vec{e}_1 \partial^1 + \vec{e}_2 \partial^2 + \vec{e}_3 \partial^3$ (5)

Laplace-Operator: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial^i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u^i = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \partial_3 u^3$ (7)

Rotation: (alle Indizes unten) $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i\, \varepsilon^{ijk} \partial_j u_k = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$ (8)

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$ (9)

Wirbelfelder sind 'quelfrei': $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (10)