

V2 Krummlinige Koordinatensysteme

Übersicht / Vorschau:

Motivation: Symmetrien des Systems ausnutzen, um Beschreibung zu vereinfachen!

Beispiel Stromdurchflossener Leiter: Stärke des Magnetfelds hängt nur vom Abstand ρ zum Leiter ab:
Also nutze Abstand als einen der Koordinaten!

Zylindersymmetrie: Polarkoordinaten

$$x^1 = \rho \cos \phi, \quad x^2 = \rho \sin \phi, \quad x^3 = z$$

Beispiel Planetenbewegung: Stärke der Kraft zwischen Sonne und Planet hängt nur vom Abstand ab.

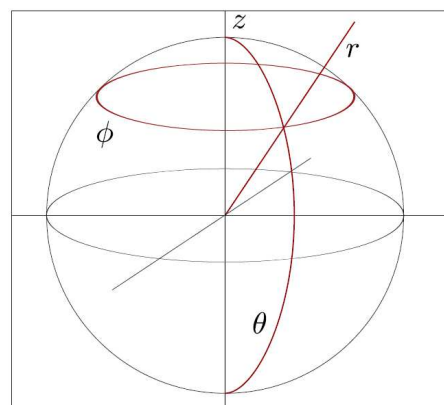
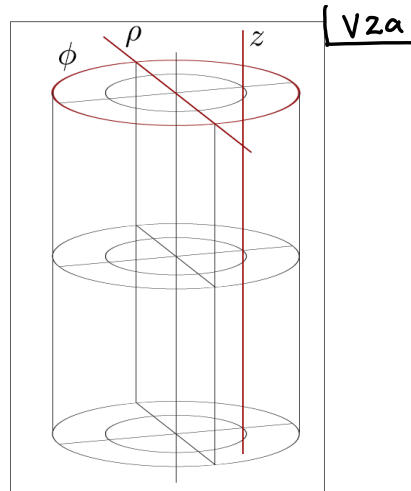
Also nutze Abstand als einen der Koordinaten

Kugelsymmetrie Kugelkoordinaten

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

Das hat allerdings seinen Preis:

lokales Dreibein v. Basisvektoren wird koordinatenabhängig!



V2.1 Polarkoordinaten

Kartesische Koord:

$$x^1 = x = \rho \cos \phi \quad (1)$$

$$x^2 = y = \rho \sin \phi \quad (2)$$

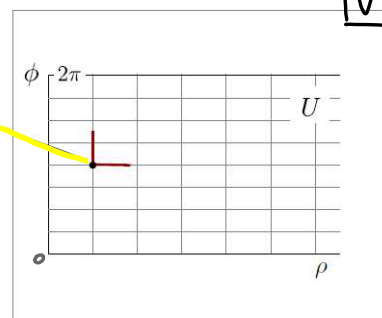
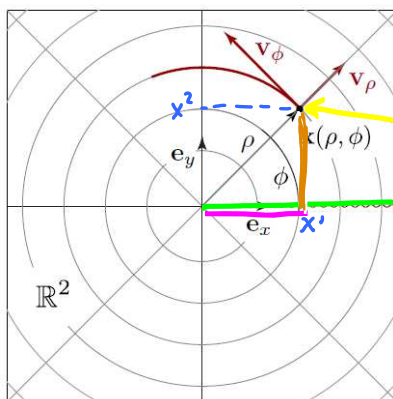
Polarkoordinaten:

$$y^1 = \rho \quad (3)$$

$$y^2 = \phi \quad (4)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+ = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho > 0\}, \quad (7)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \in (0, 2\pi) \quad (8)$$



$$(\rho, \phi) \in U = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \quad (5)$$

$$\vec{x}(\rho, \phi) \in U_c = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}) \quad (6)$$

Ursprung und positive reelle Achse sind ausgeschlossen

Wir definieren krummlinige Koordinaten auf offenen Intervallen, damit Abbildung differenzierbar ist.

Am Rand der offenen Intervalle definieren wir: $\vec{x}(\rho, \phi=0) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \vec{x}(\rho, \phi)$ (AD-Buch, INFO auf S.416) (9)

Koordinatentransformation, drücke kartesisch (englisch: cartesian) durch polar aus:

$$\vec{x} : U \rightarrow U_c, \quad \vec{y} \mapsto \vec{x}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \phi) \\ y(\rho, \phi) \end{pmatrix} \stackrel{(1,2)}{=} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix} \equiv \vec{x}(\vec{y}) \quad (10)$$

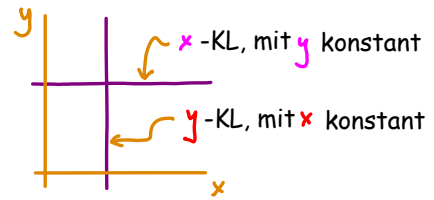
Rücktransformation, drückt polar durch kartesisch aus:

$$\vec{y} : U_c \rightarrow U, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \rho(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix} \stackrel{(3,4)}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan y/x \end{pmatrix} \equiv \vec{y}(\vec{x}) \quad (11)$$

V2.2 Koordinatenbasis und lokale Basis

V2c

Def.: entlang einer 'Koordinatenlinie' (KL) sind alle Koordinaten konstant, bis auf eine; diese parametrisiert die Koordinatenlinie.



Kartesisch:

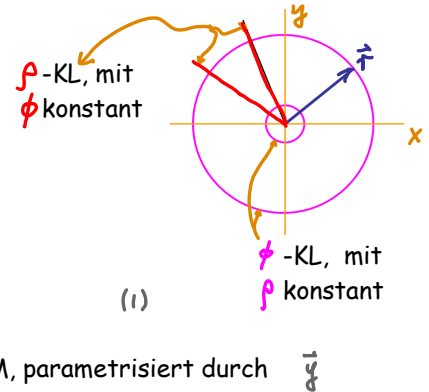
x-KL: parametrisiert durch x , mit y konstant

y-KL: parametrisiert durch y , mit x konstant

Polarkoordinaten:

ρ -KL: parametrisiert durch ρ , mit ϕ konstant

ϕ -KL: parametrisiert durch ϕ , mit ρ konstant



Für allgemeines Koordinatensystem in d Raumdimensionen:

$$\vec{r} : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d, \quad \vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \mapsto \vec{r}(\vec{y}) \quad (1)$$

\vec{y} - y-Koordinatenvektor Punkt in M , parametrisiert durch \vec{y}

Für $j = 1, \dots, d$: 'j-Koordinatenlinie': variere y^j , halte alle andere Koordinaten konstant:

$$\vec{r}_j : I_j \rightarrow M, \quad y^j \mapsto \vec{r}_j(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \dots, y^j, \dots, y^d) \quad (2)$$

Koordinatenbasis

V2d

Kurvengeschwindigkeit entlang KL-Linie: $\vec{v}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j} \vec{r}_j(y^j) = \frac{\partial}{\partial y^j} \vec{r}(y^1, \dots, y^d)$ (1)
 im Allgemeinen ortsabhängig

$\vec{v}_{j,\vec{r}}$ beschreibt die Änderung des Ortsvektors mit einer der Koordinaten, y^j .

Die Richtung dieser Änderung in \vec{r} ist für jedes y^j verschieden (denn Koord.-Transf. ist bijektiv)

Also sind die Vektoren $\{\vec{v}_{j,\vec{r}}\}$ linear unabhängig (siehe AD-Buch, S. 417, Fußnote 9).

Sie bilden eine Basis, die 'Koordinatenbasis', für U_c .

Kartesisch:

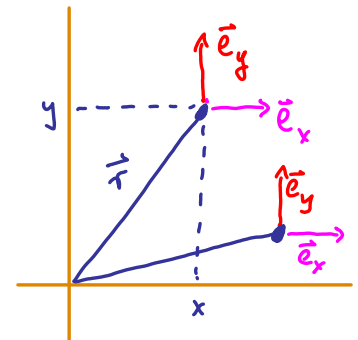
$$\vec{r}(x, y) = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{v}_x \stackrel{(1)}{\equiv} \frac{d \vec{r}_x(x)}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{r}(x, y) \stackrel{(2)}{=} \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{v}_y \stackrel{(1)}{\equiv} \frac{d \vec{r}_y(y)}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \vec{r}(x, y) \stackrel{(2)}{=} \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ableitung entlang der Koordinatenlinie $\vec{r}_y(y)$

Kurvengeschwindigkeit entlang der Koordinatenlinie $\vec{r}_y(y)$



Eigenschaften der kartesischen Koordinatenbasis:

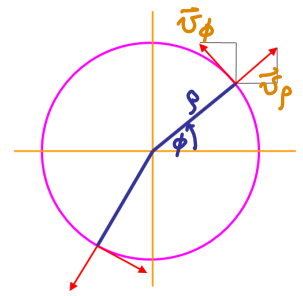
- tangential zu KL
- orthonormal: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (5)
- ortsunabhängig

Koordinatenbasis für Polarkoordinaten:

Vze

Ortsvektor: $\vec{r}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{(d.2)}{=} \vec{e}_x x + \vec{e}_y y \stackrel{(b.10)}{=} \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi = \rho \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1)$

ortsunabhängige
kartesische Basisvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{v}_{\rho, \vec{r}} \equiv \frac{d}{d\rho} \vec{r}(\rho) \stackrel{(c.2)}{=} \frac{\text{fest}}{\rho} \vec{r}(\rho) \stackrel{(1)}{=} \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2)$

Betrag: $\|\vec{v}_{\rho, \vec{r}}\| \stackrel{(2)}{=} [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi]^{1/2} = 1 \quad (3)$

$\vec{v}_{\phi, \vec{r}} \equiv \frac{d}{d\phi} \vec{r}(\phi) \stackrel{(c.2)}{=} \frac{\text{fest}}{\phi} \vec{r}(\phi) \stackrel{(1)}{=} -\vec{e}_x \rho \sin \phi + \vec{e}_y \rho \cos \phi = \rho \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4)$

Betrag: $\|\vec{v}_{\phi, \vec{r}}\| \stackrel{(4)}{=} [\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi]^{1/2} = \rho \quad (5)$

Orthogonal: $\langle \vec{v}_{\rho, \vec{r}}, \vec{v}_{\phi, \vec{r}} \rangle = \cos \phi \cdot (-\rho \sin \phi) + \sin \phi \cdot \rho \cos \phi = 0 \quad (6)$

Eigenschaften der Polar-Koordinatenbasis:

- tangential zu KL
 - orthogonal, aber nicht normiert
 - ortsabhängig
- (5)

Metrik, lokale Basis:

Vzf

Metrik:

$$g_{ij, \vec{r}} \stackrel{(L.3.3b.2)}{=} \langle \vec{v}_{i, \vec{r}}, \vec{v}_{j, \vec{r}} \rangle$$

enthält Information über Längen von und Winkel zwischen den Basisvektoren der Koordinatenbasis

(1)

Inverse Metrik:

$$g_{\vec{r}}^{ij} g_{jk, \vec{r}} = \delta^i_k$$

(2)

z.B. für Polarkoordinaten:

$i, j \in \{\rho, \phi\} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\phi} \\ g_{\phi\rho} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \stackrel{(3b)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} \stackrel{(3c)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \quad (3a)$

$g_{\rho\rho} = \langle \vec{v}_{\rho}, \vec{v}_{\rho} \rangle \stackrel{(e.3)}{=} 1, \quad g_{\rho\phi} = \langle \vec{v}_{\rho}, \vec{v}_{\phi} \rangle \stackrel{(e.6)}{=} 0, \quad g^{\rho\rho} = 1, \quad g^{\rho\phi} = 0 \quad (3b)$

$g_{\phi\rho} = \langle \vec{v}_{\phi}, \vec{v}_{\rho} \rangle \stackrel{(e.6)}{=} 0, \quad g_{\phi\phi} = \langle \vec{v}_{\phi}, \vec{v}_{\phi} \rangle \stackrel{(e.5)}{=} \rho^2, \quad g^{\phi\rho} = 0, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{\rho^2} \quad (3c)$

'Lokale Basis':

$\{\vec{e}_{j, \vec{r}}\},$

$\|\vec{e}_{j, \vec{r}}\| \stackrel{(4)}{=} 1$

$$\vec{e}_{j, \vec{r}} \equiv \frac{\vec{v}_{j, \vec{r}}}{\|\vec{v}_{j, \vec{r}}\|} \stackrel{(1)}{=} \frac{\vec{v}_{j, \vec{r}}}{\sqrt{g_{jj, \vec{r}}}}$$

normierte Version der Koordinatenbasis

(4)

z.B. für Polarkoordinaten:

$\vec{e}_{\rho} \stackrel{(4,3)}{=} \frac{\vec{v}_{\rho}}{1} \stackrel{(e.2)}{=} \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi \quad (5)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \phi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \phi$

$\vec{e}_{\phi} \stackrel{(4,3)}{=} \frac{\vec{v}_{\phi}}{\rho} \stackrel{(e.4)}{=} -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi \quad (6)$

$= -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \phi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \phi$

Geometrische Betrachtung lokaler Basis für Polarkoordinaten

V2g

$$\vec{e}_\rho \stackrel{(f.s)}{=} \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

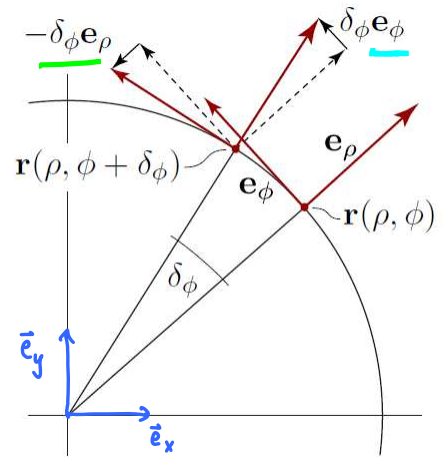
$$\vec{e}_\phi \stackrel{(f.b)}{=} -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1 = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\phi = 0 \quad (3)$$

Lokale Basis für Polar-
koord. ist orthonormal:

$i, j \in \rho, \phi$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (4)$$



Lokale Basis ist ortsabhängig:

$$\partial_\rho \vec{e}_\rho \stackrel{(1)}{=} \vec{0}, \quad \partial_\phi \vec{e}_\rho \stackrel{(1)}{=} -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi \stackrel{(2)}{=} \vec{e}_\phi \quad (5)$$

$$\partial_\rho \vec{e}_\phi \stackrel{(2)}{=} \vec{0}, \quad \partial_\phi \vec{e}_\phi \stackrel{(2)}{=} -\vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y (-\sin\phi) \stackrel{(1)}{=} -\vec{e}_\rho \quad (6)$$

Diese Beziehungen sind konsistent mit Figur!

Ortsvektor in lokaler Basis: $\vec{r}(\rho, \phi) \stackrel{(e.1)}{=} \vec{e}_x \rho \cos\phi + \vec{e}_y \rho \sin\phi = \vec{e}_\rho \rho \quad (7)$

Kurven: Orts- und Geschwindigkeitsvektor, ausgedrückt in lokaler Basis

V2h

Kartesische Koordinaten:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y$$

Parametrisierung
einer Raumkurve:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x x(t) + \vec{e}_y y(t) \quad (1)$$

zeitunabhängige Basisvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kurven-
geschwindigkeit:

$$d_t \vec{r}(t) = \vec{e}_x \dot{x}(t) + \vec{e}_y \dot{y}(t) \quad (2)$$

$$d_t \equiv \frac{d}{dt}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{r} \stackrel{(e.1)}{=} \underbrace{[\vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi]}_{\vec{e}_{\rho, \vec{r}}} \rho \stackrel{(g.7)}{=} \vec{e}_{\rho, \vec{r}} \rho = \vec{e}_\rho \rho \quad (3)$$

zeigt radial auswärts
Kompaktnotation

Parametrisierung
einer Raumkurve:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{[\vec{e}_x \cos\phi(t) + \vec{e}_y \sin\phi(t)]}_{\vec{e}_{\rho, \vec{r}(t)}} \rho(t) = \vec{e}_{\rho, \vec{r}(t)} \rho(t) \quad (4)$$

zeitabhängige Basisvektoren

$$d_t \vec{r}(t) = \vec{e}_{\rho, \vec{r}(t)} \dot{\rho}(t) + \underbrace{\phi \vec{e}_\phi}_{(i.1)} d_t \vec{e}_{\rho, \vec{r}(t)} \rho(t) \quad (5)$$

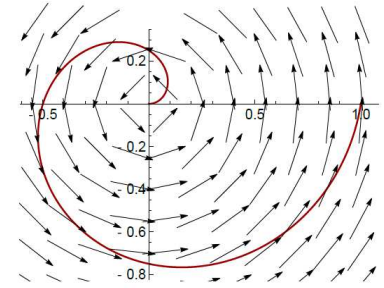
$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} \quad (6)$$

Einheiten: Länge / Zeit

$$d_t \bar{e}_\rho(\rho, \phi) \stackrel{\text{KR (C3i.4)}}{=} \underbrace{\frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \rho} d_t \rho}_{(g.5) = 0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \phi} d_t \phi}_{(g.5) \bar{e}_\phi} = \bar{e}_\phi \dot{\phi} = \dot{\bar{e}}_\rho \quad (1) \quad \boxed{\text{Vzi}}$$

$$d_t \bar{e}_\phi(\rho, \phi) \stackrel{\text{KR (C3i.4)}}{=} \underbrace{\frac{\partial \bar{e}_\phi}{\partial \rho} d_t \rho}_{(g.6) = 0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{e}_\phi}{\partial \phi} d_t \phi}_{(g.6) -\bar{e}_\rho} = -\bar{e}_\rho \dot{\phi} = \dot{\bar{e}}_\phi \quad (2)$$

Beispiel: Spiralbahn $\gamma: \vec{r}_s(t) \stackrel{(h.4)}{=} \bar{e}_\rho(t) \rho(t), \quad (3)$



$$\rho(t) = \frac{Rt}{t_0}, \quad (4a) \quad \phi(t) = \frac{2\pi t}{t_0}, \quad (4b) \quad t \in (0, t_0)$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{R}{t_0}, \quad (5a) \quad \dot{\phi}(t) = \frac{2\pi}{t_0} \quad (5b)$$

Kurvengeschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}}_s(t) = \frac{d}{dt}(\bar{e}_\rho \rho) \stackrel{(h.6)}{=} \bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\phi \rho \dot{\phi} \stackrel{(5)}{=} \bar{e}_\rho \frac{R}{t_0} + \bar{e}_\phi \frac{Rt}{t_0} \frac{2\pi}{t_0} \quad (6)$$

Arbeit durch 'Rückenwind': Sei $\vec{F} = \bar{e}_\phi f \quad (7)$, $\vec{r}_s(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}_s(t)) \stackrel{(6,7)}{=} \frac{R}{t_0} \underbrace{[\bar{e}_\rho + \bar{e}_\phi \frac{2\pi t}{t_0}]}_{=0} \cdot \underbrace{(\bar{e}_\phi f)}_{=1} = \frac{R 2\pi t f}{t_0^2} \quad (8)$

$$W[\gamma] = \int_0^{t_0} dt \dot{\vec{r}}_s(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}_s(t)) \stackrel{(8)}{=} \int_0^{t_0} dt \frac{2\pi R t f}{t_0^2} = \pi R f \quad (10)$$

Kinetische Energie, Beschleunigung (Polarkoordinaten) [Selbststudium]

Vzi

$$|\dot{\vec{r}}(t)|^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \stackrel{(h.6)}{=} \underbrace{(\bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\phi \rho \dot{\phi}) \cdot (\bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\phi \rho \dot{\phi})}_{(g.4)} = \underbrace{\dot{\rho}^2}_{=0} + \underbrace{\rho^2 \dot{\phi}^2}_{=0} = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \quad (1)$$

$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j \in \rho, \phi)$

Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) \quad (2)$

radialer, axialer Beitrag

Beschleunigung: $\vec{a} = d_t \vec{v} \stackrel{(h.6)}{=} d_t (\bar{e}_\rho \dot{\rho} + \bar{e}_\phi \rho \dot{\phi}) \quad (3)$

$$\stackrel{\text{PR}}{=} \underbrace{\dot{\bar{e}}_\rho \dot{\rho}}_{\bar{e}_\phi \dot{\phi} \quad (1)} + \bar{e}_\rho \ddot{\rho} + \underbrace{\dot{\bar{e}}_\phi \rho \dot{\phi}}_{-\bar{e}_\rho \dot{\phi} \quad (2)} + \bar{e}_\phi \dot{\rho} \dot{\phi} + \bar{e}_\phi \rho \ddot{\phi} \quad (4)$$

$$\stackrel{\text{Einheiten:}}{\text{Länge / (Zeit)}^2} = \bar{e}_\rho (\dot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) + \bar{e}_\phi (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \quad (5)$$

rein radial Mischterme rein axial

V2.3 Zylinderkoordinaten (3D) (= Polar, ergänzt um z-Achse)

|Vzk

$x^1 = x = \rho \cos \phi$

(1)

$x^2 = y = \rho \sin \phi$

(2)

$x^3 = z = z$

(3)

$y^1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$

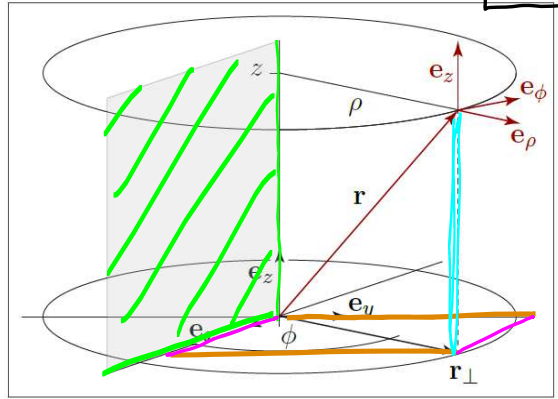
(4)

$y^2 = \phi = \arctan \frac{y}{x} \in (0, 2\pi)$

(5)

$y^3 = z = x^3 \in \mathbb{R}$

(6)



$\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi + \vec{e}_z z$

(7)

$(\rho, \phi, z) \in U = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$(x, y, z) \in U_c = \mathbb{R}^3 \setminus \{ \mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \}$

Halbebene durch nicht-negative x-Achse

Koordinatentransf., drückt kartesisch durch zylindrisch aus:

$\vec{x}: U \rightarrow U_c \quad \vec{y} \mapsto \vec{x}(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} x(\rho, \phi, z) \\ y(\rho, \phi, z) \\ z(\rho, \phi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}(\vec{y})$

Rücktransformation, drückt zylindrisch durch kartesisch aus:

$\vec{y}: U_c \rightarrow U, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \rho(x, y, z) \\ \phi(x, y, z) \\ z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \vec{y}(\vec{x})$

V2.3 Zylinderkoordinaten (3D) (= Polar, ergänzt um z-Achse)

|Vzℓ

(k.7)

$\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi + \vec{e}_z z$

(1)

Koordinatenbasis (e.1):

$\vec{v}_\rho = \partial_\rho \vec{r} = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y$

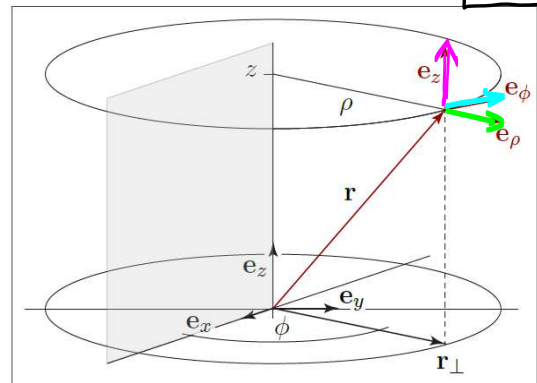
(2a)

$\vec{v}_\phi = \partial_\phi \vec{r} = \rho(-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y)$

(2b)

$\vec{v}_z = \partial_z \vec{r} = 1 \cdot \vec{e}_z$

(2c)



Metrik: $g_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lokale Basis: $\vec{e}_i = \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (i \in \rho, \phi, z)$

$g_{\rho\rho} = 1$ (3a)

$\vec{e}_\rho = \vec{v}_\rho$ (4a)

orthonormal: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (5a)

$g_{\phi\phi} = \rho^2$ (3b)

$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{v}_\phi}{\rho}$ (4b)

rechtshändig: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}^k$ (5b)

$g_{zz} = 1$ (3c)

$\vec{e}_z = \vec{v}_z$ (4c)

$g_{i \neq j} = 0$ (3d)

Ortsvektor: $\vec{r} = \hat{e}_\rho \rho + \hat{e}_z z$ (6)

zyklische Reihenfolge: $\rho \rightarrow \phi \rightarrow z$

V2.3 Kugelkoordinaten (3D) (in xy-Ebene: wie Polar, mit $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$) | $\sqrt{2}u$

$x^1 = x = r \sin \theta \cos \phi$ (1)

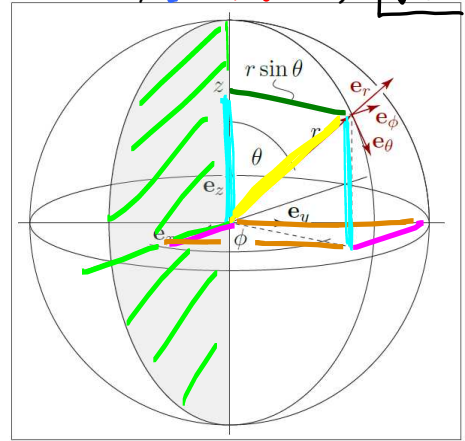
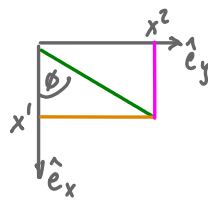
$x^2 = y = r \sin \theta \sin \phi$ (2)

$x^3 = z = r \cos \theta$ (3)

$y^1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (4)

$y^2 = \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \in (0, \pi)$ (5)

$y^3 = \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (0, 2\pi)$ (6)



$\vec{r} = \vec{e}_x r \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z r \cos \theta$ (7)

$(r, \theta, \phi) \in U = \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ (8)

$(x, y, z) \in U_c = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{R}\}$
 Halbebene durch nicht-negative x-Achse
 $x \geq 0$
 $y = 0$
 $z \in \mathbb{R}$

Koordinatentransf., drückt kartesisch durch Kugelkoord. aus:

$\vec{x}: U \rightarrow U_c, \quad \vec{y} \mapsto \vec{x}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} x(r, \theta, \phi) \\ y(r, \theta, \phi) \\ z(r, \theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{x}(\vec{y})$ (9)

Rücktransformation, drückt Kugelkoord. durch kartesisch aus:

$\vec{y}: U_c \rightarrow U, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y}(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \theta(x, y, z) \\ \phi(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos(z/r) \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix} = \vec{y}(\vec{x})$ (10)

V2.3 Kugelkoordinaten (3D) (in xy-Ebene: wie Polar, mit $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$) | $\sqrt{2}u$

(11) $\vec{r} = \vec{e}_x r \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z r \cos \theta$

Koordinatenbasis (e.1):

$\vec{v}_r = \partial_r \vec{r} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$ (12)

$\vec{v}_\theta = \partial_\theta \vec{r} = r(\cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z)$ (2b)

$\vec{v}_\phi = \partial_\phi \vec{r} = r \sin \theta (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y)$ (2c)

Metrik: $g_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ Lokale Basis: $\vec{e}_i = \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$ (13)

$g_{rr} = 1$ (3a)

$g_{\theta\theta} = r^2$ (3b)

$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ (3c)

$g_{i \neq j} = 0$ (3d)

$\vec{e}_r = \vec{v}_r$ (4a)

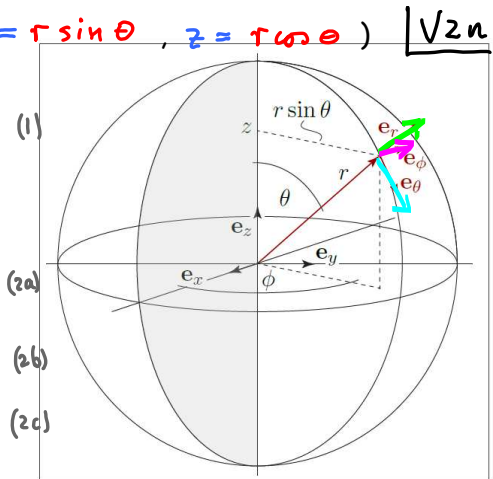
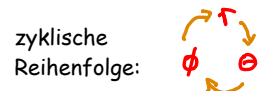
$\vec{e}_\theta = \frac{\vec{v}_\theta}{r}$ (4b)

$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{v}_\phi}{r \sin \theta}$ (4c)

orthonormal:
 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (5a)

rechtshändig:
 $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$ (5b)

Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{e}_r r$ (6)



V2.4 Allgemeine Koordinatentransformationen

√20

y-Parametrisierung von M:

$$\vec{r} : U \rightarrow M, \quad \vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) \quad (1)$$

y-Koordinatenvektor Punkt in M,
parametrisiert durch \vec{y}

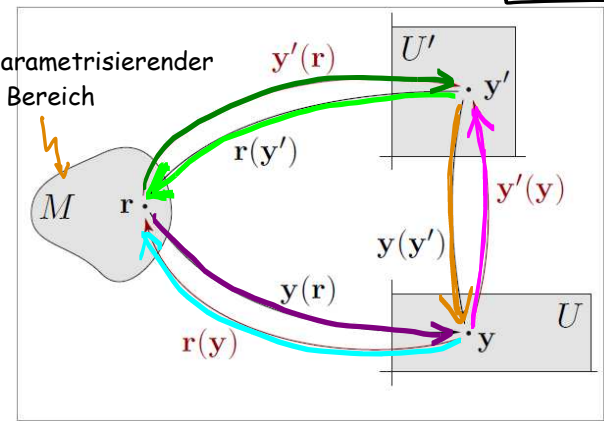
$$\vec{y} : M \rightarrow U, \quad \vec{r} \mapsto \vec{y}(\vec{r}) \quad (2)$$

y'-Parametrisierung von M:

$$\vec{r} : U' \rightarrow M, \quad \vec{y}' \mapsto \vec{r}(\vec{y}') \quad (3)$$

y'-Koordinatenvektor derselbe Punkt in M, parametrisiert durch \vec{y}'

$$\vec{y}' : M \rightarrow U', \quad \vec{r} \mapsto \vec{y}'(\vec{r}) \quad (4)$$



Beispiel Polarkoordinaten:

$$\vec{y} = (\rho, \phi) \quad \vec{y}' = \vec{x} = (x', x'') = \text{kartesisch} \quad (5)$$

'Koordinatentransformationen' zwischen y und y':

$$y' \text{ ausgedrückt durch } y: \quad \vec{y}' \equiv \vec{y}' \circ \vec{r} : U \rightarrow U', \quad \vec{y} \mapsto \vec{y}'(\vec{y}) \quad (6)$$

$$y \text{ ausgedrückt durch } y': \quad \vec{y} \equiv \vec{y} \circ \vec{r} : U' \rightarrow U, \quad \vec{y}' \mapsto \vec{y}(\vec{y}') \quad (7)$$

Zusammenfassung: V5 Krummlinige Koordinaten

√2a

Kartesisch: $\vec{r} = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i x^i$

Polar (2D): $\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi$
 $y' = \rho, y'' = \phi$

Zylinder (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi + \vec{e}_z z$

Kugel (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x r \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z r \cos \theta$

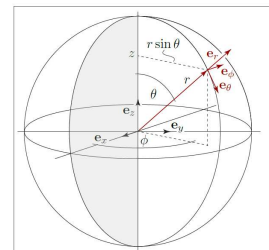
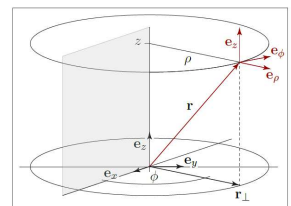
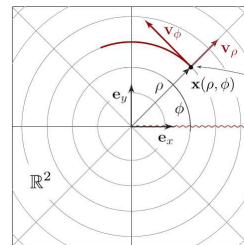
Koordinatenlinie: $\vec{r}_{y^j}(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \dots, y^j, \dots, y^d)$
 $\vec{r}_{y^j}(y^j) = \vec{r}_\rho(\rho), \vec{r}_\phi(\phi)$

wird variiert
werden konstant gehalten

Koordinatenbasis: $\{\vec{v}_{j,\vec{r}}\}$
 $\vec{v}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j} \vec{r}_j(y^j) = \partial_j \vec{r}(\vec{y})$
 erinnert an Ortsabhängigkeit, wird meist nicht explizit angezeigt

Metrik: $g_{ij,\vec{r}} \equiv \langle \vec{v}_{i,\vec{r}}, \vec{v}_{j,\vec{r}} \rangle$

Lokale Basis: $\{\vec{e}_{j,\vec{r}}\}$
 $\vec{e}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\|\vec{v}_{j,\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\sqrt{g_{jj,\vec{r}}}}$



Kartesisch: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad \vec{r} = \sum_i \vec{e}_i x^i$

Polar (2D):

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_\rho \rho \\ \vec{u}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} \end{aligned}$$

Zylinder (3D):

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z \\ \vec{u}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} + \dot{\vec{e}}_z z \\ \vec{u}_z &= \vec{e}_z, & \vec{e}_z &= \vec{e}_z, & g_{zz} &= 1, & & \end{aligned}$$

Kugel (3D):

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \vec{e}_r, & \vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z \cos \theta, & g_{rr} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_r r \\ \vec{u}_\theta &= r \vec{e}_\theta, & \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos \theta \cos \phi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \phi - \vec{e}_z \sin \theta, & g_{\theta\theta} &= r^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_r r + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} \\ \vec{u}_\phi &= r \sin \theta \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta, & & + \vec{e}_\phi r \dot{\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

Alle diese lokalen Basen sind orthonormal:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Für Zylinder & Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}^k$$

zyklische Reihenfolge:

