L4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt) (nur in 3 Dimensionen definiert)

L4a

- Zusammenfassung v. Schulwissen
- Geometrische Anschauung
- Komponentendarstellung, Levi-Civita-Symbol

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$$

Aus Schule bekannt: (?)

zyklisch: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ (1)

Verknüpfung: $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(i) Antisymmetrisch: $\vec{v} \times \vec{w} = - \vec{w} \times \vec{v}$ (2)

(ii) Nur senkrechte Anteile tragen bei: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v}_\perp \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w}_\perp$ (3)

(iii) Distributiv: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (4)

(iv) Nicht assoziativ: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (5)

(Beweise: aus geometrischer Anschauung, siehe unten.)

Geometrische Definition

L4b

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$

Mittelfinger: $\vec{w}$

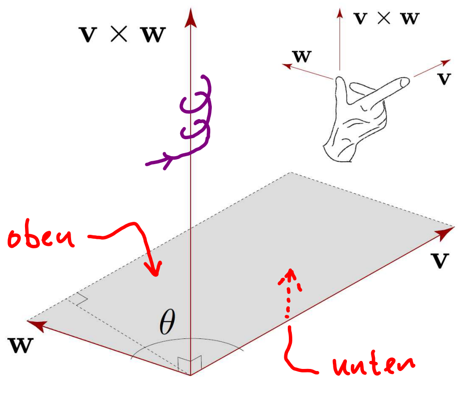
Zeigefinger: $\vec{v}$

$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ ist ein 3-Komponenten-Objekt mit folgenden Eigenschaften:

(i) Betrag: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \equiv \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \sin\theta$ (1)

Fläche von Parallelogram

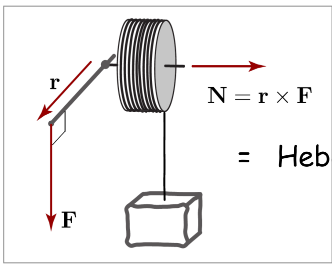
(ii) Richtung: $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene, sodass $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in dieser Folge ein Rechtssystem bilden. (2)



Anmerkungen:

- $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$
- 'Vektorprodukt beschreibt Drehsinn'
- $\vec{v} \times \vec{w}$ definiert eine 'orientierte Fläche'
- $\vec{v} \times \vec{w}$ ist ein 'Pseudo-Vektor'

Beispiel v. physikalischen Anwendung:



= Drehmoment

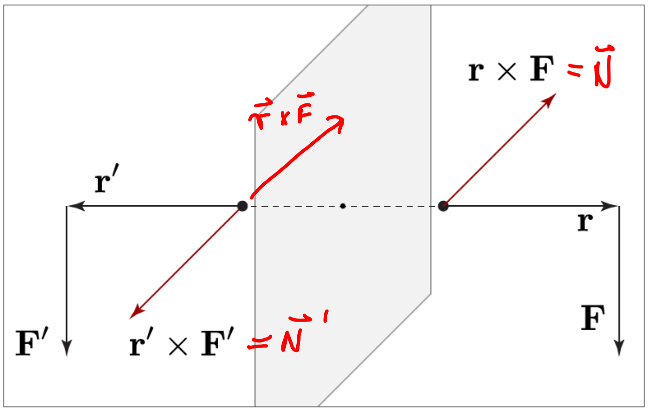
= Hebelarm x Kraft

Kreuzprodukt ist kein Vektor, sondern ein 'Pseudovektor'

Für Vektoren ist Reflexion in der Ebene definiert durch:

$$\vec v = \vec v_\parallel + \vec v_\perp \xrightarrow{\text{Reflexion:}} \vec v\,' = \vec v_\parallel - \vec v_\perp$$

Anteil senkrecht zur Ebene: Vorzeichenwechsel. Anteil parallel zur Ebene: unverändert.



$\vec r \to \vec r\,' = -\vec r$

$\vec F \to \vec F\,' = \vec F$

Definition des Drehmoments: $\vec N \equiv \vec r \times \vec F$

Für Drehmoment ist Reflexion in der Ebene definiert durch:

$$\vec N \equiv \vec r \times \vec F \longrightarrow \vec N\,' \equiv \vec r\,' \times \vec F\,'$$

Offenbar gilt $\quad \vec N\,' = -\vec N \quad$ obwohl $\quad \vec N \simeq \vec N_\parallel \quad$ parallel zur Ebene steht!

Also verhält sich das Drehmoment nicht wie ein 'Vektor'. Wird 'Pseudovektor' genannt.

Eigenschaften: diskutiert durch geometrische Anschauung

(i) Antisymmetrisch: $\quad \vec v \times \vec w = -\vec w \times \vec v \quad$ (folgt aus rechtshändischer Regel) (1)

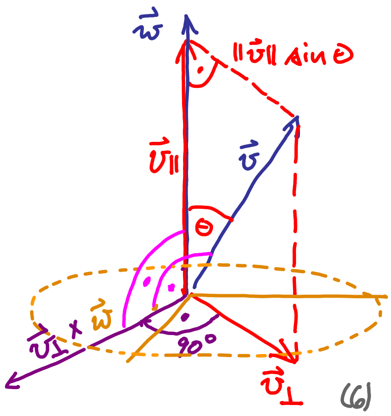
(ii) Nur senkrechter Anteil trägt bei: $\quad \vec v \times \vec w = \vec 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \|\vec v\| = 0 \text{ und/oder } \|\vec w\| = 0 & (2) \\ \text{oder } \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \Rightarrow \vec v \parallel \pm \vec w & (3) \end{cases}$

(Zwei kollineare Vektoren spannen keine Ebene auf.)

Sei $\vec v = \vec v_\parallel + \vec v_\perp$ Zerlegung v. $\vec v$ bezgl. $\vec w$

Dann gilt: $\quad \vec v \times \vec w = (\overset{(3)\to 0}{\cancel{\vec v_\parallel}} + \vec v_\perp) \times \vec w \quad (3)$

$$= \vec v_\perp \times \vec w \quad (4)$$



(6)

Merkregel: $\vec v \times \vec w$ liegt in Ebene $\perp$ zu $\vec w$, um 90 Grad gedreht zu $\vec v_\perp$ (7)

(iii) Distributivität: $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$ (1)

[aus geometrischer Anschauung]

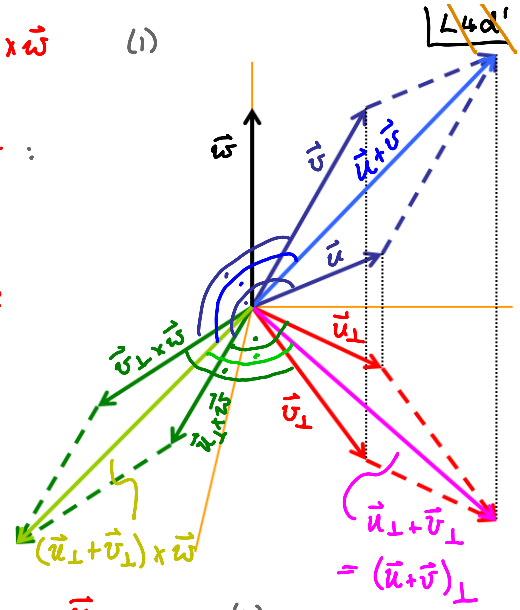
$\vec{w}$ ist ausgezeichnet, zerlege anderen Vektoren bzgl. $\vec{w}$:

$$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \boxed{\vec{u}_{\perp}} \quad (2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \boxed{\vec{v}_{\perp}} \quad (3)$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})_{\parallel} + \boxed{(\vec{u}+\vec{v})_{\perp}} \quad (4)$$

liegen in Ebene senkrecht zu $\vec{w}$



In dieser Ebene, $\perp\ \vec{w}$, liegt:

$\vec{u}\times\vec{w} \overset{(C.4)}{=} \vec{u}_{\perp}\times\vec{w}$ um 90 Grad gedreht relativ zu $\vec{u}_{\perp}$ (5)

(C.7)

$\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}_{\perp}\times\vec{w}$ " " $\vec{v}_{\perp}$ (6)

$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}+\vec{v})_{\perp}\times\vec{w}$ " " $(\vec{u}+\vec{v})_{\perp}$ (7)

Offensichtlich gilt: $(\vec{u}+\vec{v})_{\perp}\times\vec{w} = \vec{u}_{\perp}\times\vec{w} + \vec{v}_{\perp}\times\vec{w}$ (8)

Also auch: $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$ $\square$ (9)

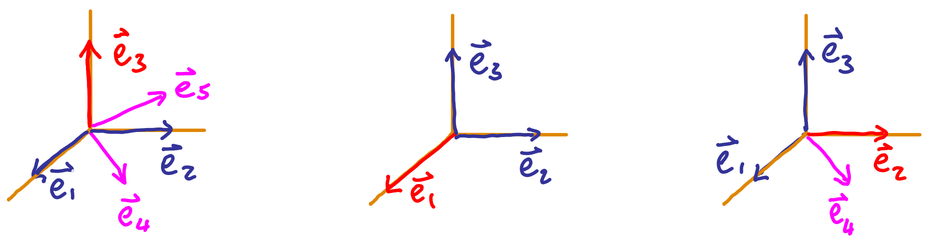
(iv) Nicht-Assoziativität: $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ (1)

L4e

Ein Gegenbeispiel genügt:

$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$ $\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$

$\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ $\vec{e}_1\times\vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ (2)



Nehme:

$\vec{u} = \vec{e}_1$

$\vec{v} = \vec{e}_2$

$\vec{w} = \vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$

$\vec{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$

$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ (3)

$= (\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_4$ (4)

$= \vec{e}_3\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$ (5)

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + \vec{e}_3\times\vec{e}_2)$ (6)

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_1) = \vec{e}_5$ (7)

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ (8)

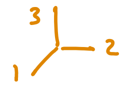
$= \vec{e}_1\times\left[\vec{e}_2\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\right]$ (9)

$= \vec{e}_1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\vec{e}_2\times\vec{e}_1 + \vec{e}_2\times\vec{e}_2\right]$ (10)

$= \vec{e}_1\times\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_3+\vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$ (11)

(7) $\neq$ (11) $\Longrightarrow$ (1) ✓

Vektorprodukt in kartesischen Komponenten:



L4f

Vektorprodukte der orthonormalen Einheitsvektoren:

Zyklische Reihenfolge:	$+$	$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3$	$\vec e_2 \times \vec e_3 = \vec e_1$	$\vec e_3 \times \vec e_1 = \vec e_2$	(1)
Antizyklische Reihenfolge:	$-$	$\vec e_2 \times \vec e_1 = -\vec e_3$	$\vec e_3 \times \vec e_2 = -\vec e_1$	$\vec e_1 \times \vec e_3 = -\vec e_2$	(2)
Gleiche Indizes:	0	$\vec e_1 \times \vec e_1 = \vec 0$	$\vec e_2 \times \vec e_2 = \vec 0$	$\vec e_3 \times \vec e_3 = \vec 0$	(3)

Kompaktnotation für (1)-(3): $\vec e_i \times \vec e_j \overset{ES}{=} \varepsilon_{ijk}\,\vec e_k$ (4) z.B. $\vec e_1 \times \vec e_3 = \underbrace{\varepsilon_{131}}_{0}\vec e_1 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}\vec e_2 + \underbrace{\varepsilon_{133}}_{0}\vec e_3 = -\vec e_2$

Definition: 'Levi-Civita-Symbol' (LCS)

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für zyklische Indizes:} \quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ -1 & \text{für antizyklische Indizes:} \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \\ 0 & \text{für gleiche Indizes:} \quad \varepsilon_{iij} = \varepsilon_{ijj} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{iii} = 0 \end{cases}} \quad (5)$$

Explizit: (6)

ϵ_{111}	ϵ_{112}	ϵ_{113}	ϵ_{121}	ϵ_{122}	ϵ_{123}	ϵ_{131}	ϵ_{132}	ϵ_{133}	ϵ_{211}	ϵ_{212}	ϵ_{213}	ϵ_{221}	ϵ_{222}	ϵ_{223}	ϵ_{231}	ϵ_{232}	ϵ_{233}	ϵ_{311}	ϵ_{312}	ϵ_{313}	ϵ_{321}	ϵ_{322}	ϵ_{323}	ϵ_{331}	ϵ_{332}	ϵ_{333}
0	0	0	0	0	1	0	−1	0	0	0	−1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	−1	0	0	0	0	0

[Allgemeine Def. des Levi-Civita-Symbols für $d \geq 2$ Indizes $i = 1, \ldots, d$: $\quad \varepsilon_{123\ldots d} = 1$ (7)

$\varepsilon_{\ldots i \ldots j \ldots} = -\varepsilon_{\ldots j \ldots i \ldots}$ 'total antisymmetrisch'] (8)

Für d = ungerade folgt hieraus zyklische Invarianz. Z.B. für d=3: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = +\varepsilon_{jki}$ (9)

L4g

Vektorprodukte v. zwei allgemeinen Vektoren: $\vec v = \vec e_i v^i, \qquad \vec w = \vec e_j w^j$ (1)

$$\underline{\vec u = \vec v \times \vec w} \overset{(3)}{=} (\vec e_i v^i) \times (\vec e_j w^j) = v^i w^j \underbrace{(\vec e_i \times \vec e_j)}_{(f.4)\ \varepsilon_{ijk}\vec e_k} = \underbrace{v^i w^j \varepsilon_{ijk}}_{\equiv u^k} \vec e_k = \underline{\vec e_k u^k} \quad (2)$$

Distributivität, komponentenweise

Definition der Koeff. von c

Folglich: $\underline{u^k = v^i w^j \varepsilon_{ijk}}$, $\qquad \underline{(\vec v \times \vec w)^k = v^i w^j \varepsilon_{ijk}}$ (3)

Explizit:

$$\underline{\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} v^2 w^3 \overset{+1}{\varepsilon_{231}} + v^3 w^2 \overset{-1}{\varepsilon_{321}} \\ v^3 w^1 \varepsilon_{312} + v^1 w^3 \varepsilon_{132} \\ v^1 w^2 \varepsilon_{123} + v^2 w^1 \varepsilon_{213} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix}} \quad (4)$$

Anmerkung: bei Rechnungen mit Kreuzprodukt treten manchmal Index-Summationen auf, bei denen beide Summations-Indices unten oder beide oben stehen. Die Einstein-Regel, 'summiere über oben-unten-Paar', läßt sich also nicht streng einhalten. Grund hierfür: Kreuzprodukt ist kein echter Vektor. Macht aber nichts - für Anwendungen des Kreuzprodukts werden wir immer nur mit Orthonormalbasen arbeiten, also ist $g_{ij} = \delta_{ij}$ und 'Index oben' äquivalent zu 'Index unten'.

Zur Kenntnisnahme (nicht klausurrelevant): Kovariante Form des Kreuzprodukts:

$$\vec v \times \vec w = v^i w^j \varepsilon_{ijl}\, g^{lk}\, \vec e_k, \qquad u^k = v^i w^j \varepsilon_{ijl}\, g^{lk} \quad (5)$$

Siehe AD-Buch, Abschnitt L6.4, Gl. (L183), und für Fortgeschrittene, Abschnitt L10.9, Gl. (L285).

(g.2) ganz explizit: ☹ L4h

$$\vec{u} = \vec{v}\times\vec{w} = (\vec{e}_1 v^1 + \vec{e}_2 v^2 + \vec{e}_3 v^3)\times(\vec{e}_1 w^1 + \vec{e}_2 w^2 + \vec{e}_3 w^3)$$

$$= v^1 w^1 \underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{=\vec{0}} + v^1 w^2 \underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3} + v^1 w^3 \underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_2}$$

$$+ v^2 w^1 \underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)}_{=-\vec{e}_3} + v^2 w^2 \underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{=\vec{0}} + v^2 w^3 \underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}_{=\vec{e}_1}$$

$$+ v^3 w^1 \underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)}_{=\vec{e}_2} + v^3 w^2 \underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{=-\vec{e}_1} + v^3 w^3 \underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)}_{=\vec{0}}$$

$$= \underbrace{(v^2 w^3 - v^3 w^2)}_{\equiv u^1}\vec{e}_1 + \underbrace{(v^3 w^1 - v^1 w^3)}_{\equiv u^2}\vec{e}_2 + \underbrace{(v^1 w^2 - v^2 w^1)}_{\equiv u^3}\vec{e}_3 = (g.2) \checkmark$$

Herleitung mittels Levi-Civita & Einstein-Summation ist offenbar viel effizienter und schmerzfreier... ☺

(g.3) ganz explizit:

$$u^1 = v^i w^j \varepsilon_{ij1} = \left(\begin{array}{l} v^1 w^1 \overset{0}{\varepsilon_{111}} + v^1 w^2 \overset{0}{\varepsilon_{121}} + v^1 w^3 \overset{0}{\varepsilon_{131}} \\ + v^2 w^1 \overset{0}{\varepsilon_{211}} + v^2 w^2 \overset{0}{\varepsilon_{221}} + v^2 w^3 \overset{+1}{\varepsilon_{231}} \\ + v^3 w^1 \overset{0}{\varepsilon_{311}} + v^3 w^2 \overset{-1}{\varepsilon_{321}} + v^3 w^3 \overset{0}{\varepsilon_{331}} \end{array}\right) = v^2 w^3 - v^3 w^2$$

L4i

Identität:

$$\vec{e}_k\cdot(\vec{e}_i\times\vec{e}_j) \overset{(f.4)}{=} \underbrace{\vec{e}_k\cdot(\varepsilon_{ijn}\vec{e}_n}_{\delta_{kn}}) = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} \qquad (1)$$

denn Basisvektoren sind orthonormal: $\vec{e}_k\cdot\vec{e}_n = \delta_{kn}$ (2)

Identität:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} \overset{(ES)}{=} \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \qquad (3)$$

(ES: implizite Summe über 'Dummy-Index' k, mit i,j,m,n 'frei')

$$= \begin{cases} +1 & \text{falls } i=m,\ j=n \\ -1 & \text{falls } i=n,\ j=m \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \qquad (4)$$

Explizites Beispiel: sei $i=1$, $j=2$, mit m,n zunächst 'frei' (1) L4j

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} \overset{\text{ES}}{=} \varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{mn1} + \varepsilon_{ij2}\,\varepsilon_{mn2} + \varepsilon_{ij3}\,\varepsilon_{mn3} \qquad (2)$$

$\downarrow (1)$

$$\varepsilon_{12k}\,\varepsilon_{mnk} \overset{(f.5)}{=} \underbrace{\varepsilon_{121}}_{=0}\varepsilon_{mn1} + \underbrace{\varepsilon_{122}}_{=0}\varepsilon_{mn2} + \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1}\varepsilon_{mn3} \qquad (3)$$

Nur ein Term überlebt in k-Summe: Summationsindex 'gepinnt' bei $k \notin \{i,j\}$ (4)

hier: $k=3$

$$\overset{(3)}{=} \varepsilon_{mn3} \overset{(f.5)}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } m=1,\ n=2 \\ -1 & \text{falls } m=2,\ n=1 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} = \delta_{1m}\delta_{2n} - \delta_{1n}\delta_{2m} \qquad (5)$$

$$= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \qquad (6)$$

konsistent mit (i.4) ✓ ☺

Fazit: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk}$ ist nur dann verschieden von Null, falls freien Indizes vom erstem und zweiten Faktor paarweise gleich sind. Vorzeichen bestimmt durch Zyklitizät.

<u>Eigenschaften des Vektorprodukts</u>: alle folgen aus (f.4) : $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k$ (1) L4k

Anti-symmetrisch:
(<u>nicht</u> kommutativ!)
$$\vec{v}\times\vec{w} = -\vec{w}\times\vec{v} \qquad (2)$$

Distributiv:
$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} \qquad (3)$$

Nicht assoziativ:
$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{w}\times\vec{v}) \qquad (4)$$

'Grassmann-Identität'
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\,(\vec{u}\cdot\vec{w}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} \qquad (5)$$

Eselsbrücke:
BAC-CAB-Identität'
[sprich: 'Bakzap'-Identität]
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Jacobi-Identität:
[zyklisch]
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{0} \qquad (6)$$

Lagrange-Identität:
$$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot(\vec{t}\times\vec{u}) = (\vec{v}\cdot\vec{t})(\vec{w}\cdot\vec{u}) - (\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{w}\cdot\vec{t}) \qquad (7)$$

$\vec{t}=\vec{v}$, $\vec{u}=\vec{w}$:
$$(\vec{v}\times\vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2\,\|\vec{w}\|^2 - (\vec{v}\cdot\vec{w})^2 \qquad (8)$$

Beispiel:
'BAC-CAB-Identität'

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \vec b\,(\vec a\cdot\vec c) - \vec c\,(\vec a\cdot\vec b) \qquad (1)$$

L4l

Herleitung: k-Komponente v. (1):

$$(\vec a\times\vec d)^k \overset{(4g.3)}{=} a^i d^j \varepsilon_{ijk} \qquad (2a)$$

$$(\vec b\times\vec c)^j \overset{(4g.3)}{=} b^m c^n \varepsilon_{mnj} \qquad (2b)$$

$$[\vec a\times(\overbrace{\vec b\times\vec c}^{\vec d})]^k \overset{(2a)}{=} a^i(\vec b\times\vec c)^j\,\varepsilon_{ijk} \qquad (3a)$$

$$\overset{(2b)}{=} a^i\,(b^m c^n \underbrace{\varepsilon_{mnj})\,\overset{(f.5)}{\varepsilon_{kij}}}_{(i.4)} \qquad (3b)$$

$$= a^i b^m c^n\,[\delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}] \qquad (3c)$$

$$= a^i b^k c^i - a^i b^i c^k = b^k(\vec a\cdot\vec c) - (\vec a\cdot\vec b)\,c^k \qquad (3d)$$

= k-Komponente von (1)

Kurzversion:

$$[\vec a\times(\vec b\times\vec c)]^k = a^i\,(b^m c^n \underbrace{\varepsilon_{mnj})\,\overset{kij}{\varepsilon_{ijk}}}_{\delta_{mk}\delta_{ni}-\delta_{mi}\delta_{nk}} = b^k(\vec a\cdot\vec c) - (\vec a\cdot\vec b)\,c^k \qquad (4)$$

Definition: Spatprodukt:

L4m

$$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\vec u,\vec v,\vec w)\longmapsto (\vec u\times\vec v)\cdot\vec w \overset{(2)}{=} u^i v^j w^k \overset{\varepsilon_{kij}}{\varepsilon_{ijk}} \qquad (1)$$

$$(\vec u\times\vec v)\cdot\vec w = (\vec e_i u^i\times\vec e_j v^j)\cdot\vec e_k w^k = u^i v^j w^k\,\underbrace{(\vec e_i\times\vec e_j)\cdot\vec e_k}_{(i.1)\ \varepsilon_{ijk}} \qquad (2)$$

denn:

Spatprodukt ist zyklisch invariant:

$$\underbrace{(\vec u\times\vec v)\cdot\vec w \overset{(1)}{=} (\vec v\times\vec w)\cdot\vec u \overset{(1)}{=} (\vec w\times\vec u)\cdot\vec v}_{\text{zyklisch vertauscht}} \qquad (3)$$

aber antizyklisch: $\overset{(1)}{=} -(\vec u\times\vec w)\cdot\vec v$

$$\overset{(1)}{=} u^i v^j w^k \varepsilon_{kij} \overset{\substack{i\to j\\ j\to k\\ k\to i}}{=} u^j v^k w^i \varepsilon_{jki} = w^i u^j v^k \varepsilon_{ijk} = (\vec w\times\vec u)\cdot\vec v \qquad (3)'$$

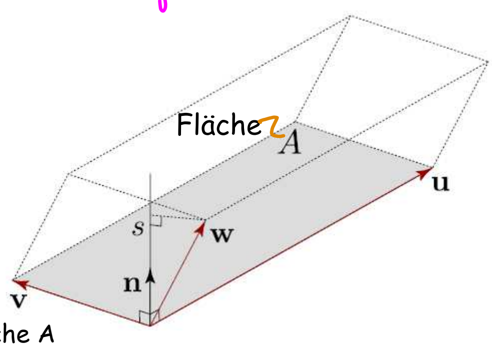
Geometrische Interpretation:

$$|(\vec u\times\vec v)\cdot\vec w| = \text{Volumen v. Parallelepiped} \qquad (4)$$

(b.1) Fläche v. Parallelogram: A

$$= (A\,\underbrace{\hat n)\cdot\vec w}_{s} = A\,s \qquad (5)$$

s = Projektion von $\vec w$ auf Normalvektor $\hat n$ zur Fläche A



Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt

ZL4

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 & - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 & - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 & - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Geometrische Def: $\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin\theta$$

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$

Mittelfinger: $\vec{w}$

Zeigefinger: $\vec{v}$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

Levi-Civita: ε_{ijk} komplett antisymmetrisch

$$(\vec{v} \times \vec{w})^k = v^i w^j \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ = Volumen v. Parallelepiped