

C1: Differenzieren (Ableiten) 1-dimensionaler Funktionen

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Ableitung einer Funktion'

C1.1 Def. der Ableitung

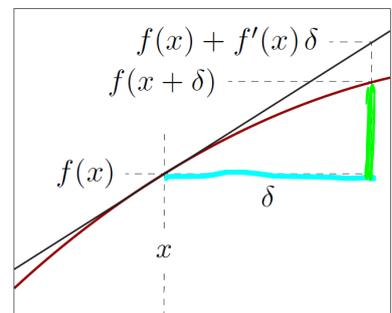
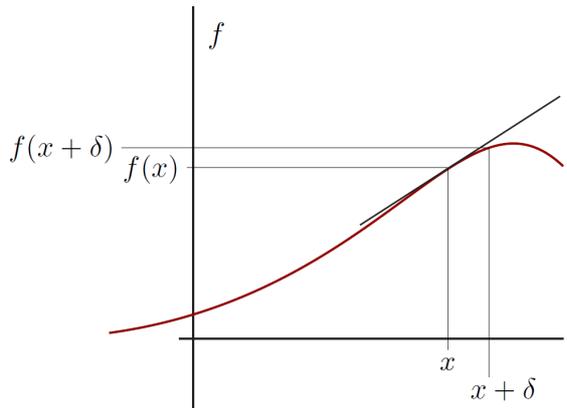
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

sei eine glatte Funktion.

'Ableitung von f am Punkt x':

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right]}_{\text{'Differenzquotient'}} \quad (1)$$

↓ 'Differentialquotient'



Interpretation: Steigung v. $f(x)$ am Punkt x

Alternative Notationen:

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=x} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv d_x f(x) \quad (1) \quad \text{C1b}$$

Verallgemeinerbare Betrachtung: Sei δ klein, aber nicht infinitesimal klein.

Dann:

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \stackrel{(a.)}{\approx} f'(x) \quad \text{in guter Näherung, wird exakt für } \delta \rightarrow 0 \quad (2)$$

Grundlegende Formel:

$$f(x+\delta) \stackrel{(2)}{\approx} f(x) + \delta f'(x) \quad \text{'Mutter aller Ableitungen'} \quad (3)$$

E1-Sprech: 'Taylor-Entwicklung'

Schreibe $x+\delta \equiv y$:

$$f(y) \approx f(x) + (y-x) f'(x) \quad (4)$$

↑ linear in y!

Interpretation: nahe bei x kann $f(y)$ näherungsweise beschrieben werden durch eine lineare Funktion v. y !

Allgemeine Faustregel: jede Ableitung liefert eine lokale Näherung einer Funktion durch eine lineare Funktion! (5)

Beispiel:

$$f(x) = x^3$$

(1)

C1c

$$f(x + \delta) = (x + \delta)^3$$

ausmultipliziert:

$$= x^3 + \underbrace{\delta \cdot 3x^2}_{\text{III}} + \underbrace{3(\delta)^2 x + (\delta)^3}_{= \mathcal{O}(\delta^2)}$$

(2)

Identifiziere:

$$= f(x) + \delta f'(x)$$

(3)

[(durch Vergleich mit (b.3))]

Fazit:

$$f'(x) = 3x^2 \quad \checkmark$$

$\mathcal{O}(\delta^2)$ bedeutet: Terme 'höher als lineare Ordnung in δ ' (hier: δ^2, δ^3)

sind vernachlässigbar relativ zu δ wenn $\delta \ll 1$: $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}$

vernachlässigbar relativ zum ersten Term in [], falls $\delta \ll 1$

$$f(x + \delta) = x^3 + \delta \left[3x^2 + \underbrace{3\delta x + \delta^2}_{\text{vernachlässigbar}} \right] \quad (4)$$

C1.2 Ableitungsregeln

(aus Schule bekannt? In Übungen trainieren!)

C1d

(Siehe auch Skript, Mathe Vorkurs)

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien 'glatte Funktionen', $a \in \mathbb{R}$
↳ Ableitungen existieren

Produktregel:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \quad (1)$$

Kettenregel:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (2)$$

Inverse:

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \stackrel{(2)}{=} \frac{\frac{d}{dy} \frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{-1}{g^2(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (3)$$

Ableitung der Umkehrfunktion:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} \stackrel{(e.z.)}{=} \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}} \quad (4)$$

Inverse Funktion: Sei f^{-1} die Inverse Funktion v. f :

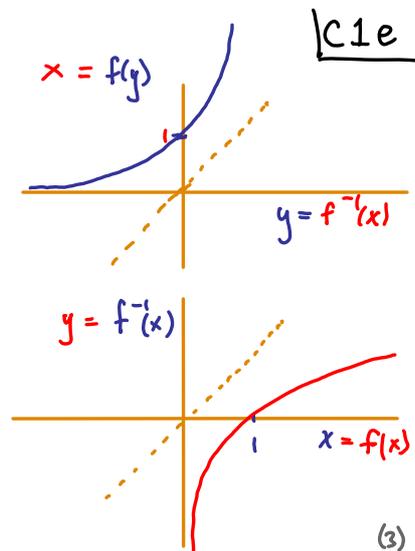
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad (1)$$

dann gilt:

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) \stackrel{\text{KR}}{=} \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)} \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} x = 1 \quad (1')$$

(d.2), mit $y=f^{-1}$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} \stackrel{(1')}{=} \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}} \quad (2)$$



Beispiel: $\exp(\ln(x)) \stackrel{(1)}{=} x$, $f^{-1}(x) = \ln(x) = y$, $f(y) = \exp(y)$ (4)

$$\frac{d \ln(x)}{dx} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\frac{d \exp(y)}{dy} \Big|_{y=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(y) \Big|_{y=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad (5)$$

C1.3 Ableitungen v. wichtigen Funktionen

(1) C1f

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}] , \quad \cosh(x) = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}] \quad (6)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} , \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \frac{d}{dx} \coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} \quad (9)$$

C2.1 Grundidee der Integration

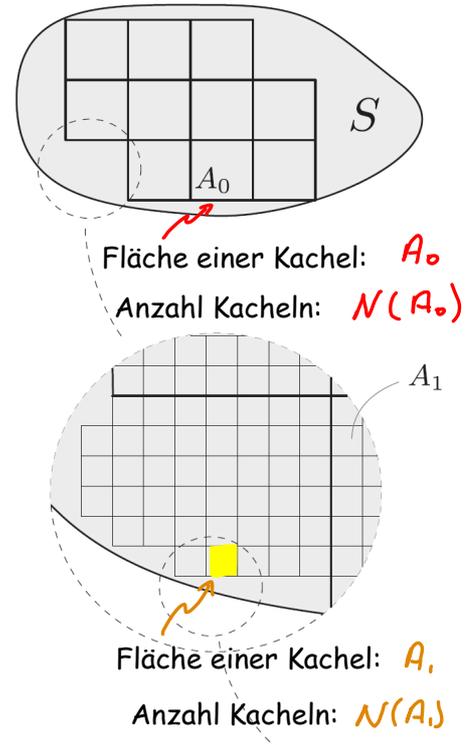
Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Integral einer Funktion'

Beispiel: Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche:

Schätzung d. Gesamtfläche:
$$F \approx \sum_{l=1}^{N(A_0)} A_0 = A_0 \cdot N(A_0) \quad (1)$$

Bessere Schätzung d. Gesamtfläche:
$$F \approx \sum_{l=1}^{N(A_1)} A_1 = A_1 \cdot N(A_1) \quad (2)$$

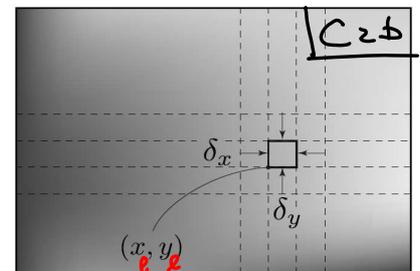
Tatsächliche Gesamtfläche erhält man im Limes 'unendlich vieler', 'unendlich kleiner' Flächenelemente.



Kompliziertere Aufgabe: Fläche sei ungleichmäßig angemalt. Was ist Gesamtmasse der Farbe?

Schätzung der Gesamtmasse:
$$M \approx \sum_{l=1}^{N(\delta_x, \delta_y)} \delta_x \delta_y \rho(x_l, y_l) \quad (1)$$

 Farbmasse der Kachel bei (x_l, y_l)
 Massendichte = Masse pro Flächenelement



Tatsächlicher Farbverbrauch, akkurat bestimmt im Limes unendlich vieler, infinitesimal kleiner Kacheln:

Integrationsmasse (2-dimensional)

$$M = \lim_{\delta_x, \delta_y \rightarrow 0} \delta_x \delta_y \sum_{l=1}^{N(\delta_x, \delta_y)} \rho(x_l, y_l) \equiv \int_S dx dy \rho(x, y) \quad (2)$$

Funktion von zwei kontinuierlichen Variablen

Integrationsbereich

Falls $\rho(x, y) = 1$ dann $M = \text{Fläche von } S$

Allgemeine Faustregel: Integral = Grenzwert einer Summe (3)

'Riemann-Summe' =
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{l=1}^{N(\delta)} X_l$$

Diskretisierungsparameter: δ

Diskretisierungsindex: $l = 1, \dots, N(\delta) \propto \frac{1}{\delta}$
 ist proportional zu

'Mutter aller Integrale'

Größe, über die summiert wird: X_l

Beispiel: Fläche unter einer Kurve

C2c

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(y)$

Integrationsbereich: $S = [0, x]$

Diskretisierungsparameter = Kachelbreite: δ_0

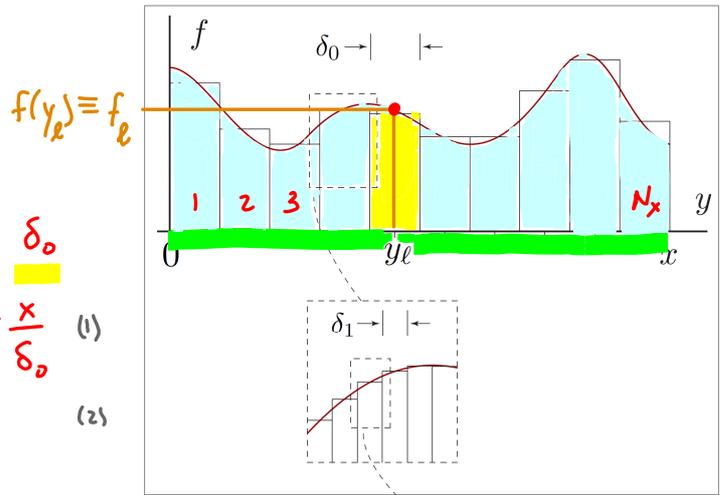
Diskretisierungsindex: $l = 1, \dots, N_x(\delta_0) = \frac{x}{\delta_0}$ (1)

Fläche v. Kachel l : $\delta_0 \cdot f(y_l)$ (2)

Schätzung d. Gesamtfläche: $F(x) = \delta_0 \sum_{l=1}^{N_x(\delta_0)} f_l$ (3)

Tatsächliche Fläche: $F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{l=1}^{N_x(\delta)} f_l \equiv \int_0^x dy f(y)$ (4)

Definition: 'Integral d. Funktion f'



Integration als 'Umkehroperation' des Differenzierens

C2d

Wie ändert sich $F(x)$ als Funktion von x ?
(halte δ fest, füge eine Kachel hinzu)

$F(x+\delta) \stackrel{(c.3)}{\approx} \delta \sum_{l=1}^{N_x+1} f_l$ (1)

$= \delta \sum_{l=1}^{N_x} f_l + \delta \cdot \underbrace{f_{N_x+1}}_{\approx f(x+\delta/2) \approx f(x) + \frac{\delta}{2} f'(x)} \stackrel{(2)}{\approx} F(x) + \delta f(x) + \mathcal{O}(\delta^2)$

$\approx F(x) + \delta f(x) + \mathcal{O}(\delta^2)$ (3)

Aufgelöst nach f: $f(x) \stackrel{(3)}{=} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} \stackrel{(1a.1)}{\approx} \frac{dF(x)}{dx}$



(4)

Im Limes $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir den 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung':

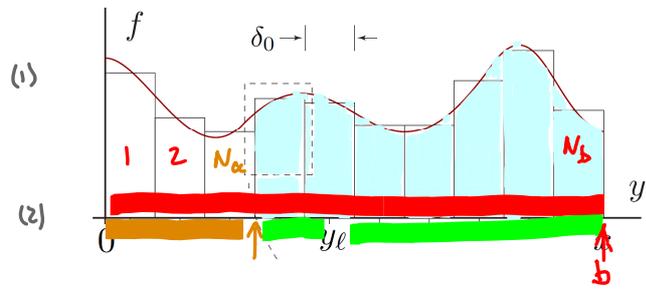
$F(x) = \int_0^x dy f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (5)

'Bestimmtes Integral':

$$F(b) - F(a)$$

$$(d.2) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\delta \sum_{l=1}^{N_b} f_l - \delta \sum_{l=1}^{N_a} f_l \right]$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{l=N_{a+1}}^{N_b} f_l \equiv \int_a^b dy f(y) \quad (3)$$



C2e

Standardnotation:

$$\int_a^b dy f(y) \stackrel{(1)}{=} F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b \equiv [F(y)]_a^b \quad (4)$$

Falls $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ist $F: x \mapsto F(x)$ eine 'Stammfunktion' von $f: x \mapsto f(x)$ (5)

Stammfunktion ist nicht eindeutig:

$$F + c : x \mapsto F(x) + c \quad \text{ist auch eine Stammfunktion.} \quad (6)$$

↙ beliebige Konstante

'Unbestimmtes Integral':

$$\int dy f(y) \equiv F(y) + c \quad (7)$$

C2.3 Integrationsregeln

C2f

Partielle Integration (entstammt der Produktregel)

Sei $F(x) = u(x) v(x)$ mit u, v beliebig aber differenzierbar.

Produktregel: $F' = u' v + u v'$ (1)

$\int dx (1): [F(x)]_a^b \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b dx F' = \int_a^b dx [u' v + u v']$ (2)

Umstellen: $\int_a^b dx u v' \stackrel{(1,2)}{=} [u v]_a^b - \int_a^b dx u' v$ 'partielle Integration' (3)

Nützlich, falls u' einfacher ist als u .

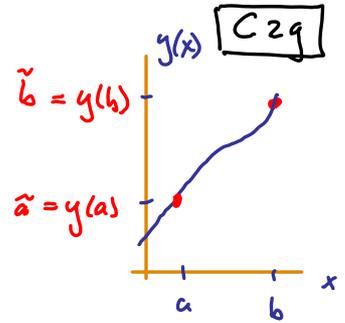
Beispiel: $\int_0^\pi dx x \sin(x) = -x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx 1 \cdot (-\cos x)$ (4)

$$\begin{aligned} u &= x & v' &= \sin(x) & &= -\pi(-1) - 0 + \sin x \Big|_0^\pi = \pi \\ u' &= 1 & v &= -\cos(x) & &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Variablen-Substitution (entstammt der Kettenregel)

Sei $f(y) = \frac{d}{dy} F(y)$ (1)

und $y(x)$ eine monoton steigende Funktion v. x (2)



$\int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy = \int_a^{\tilde{b}} \frac{d}{dy} F(y) dy \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} [F(y)]_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} = F(\tilde{b}) - F(\tilde{a})$ (3)

Alternativ, betrachte $F(y(x))$ als Funktion von x :

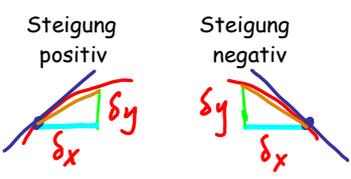
Kettenregel: $\frac{d}{dx} F(y(x)) \stackrel{(1 \text{ d. 2.})}{=} \frac{d}{dy} F(y) \Big|_{y=y(x)} \frac{dy(x)}{dx} \stackrel{(1)}{=} f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx}$ (4)

$\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x)) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} F(y(x)) \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} [F(y(x))]_a^b$ (5)

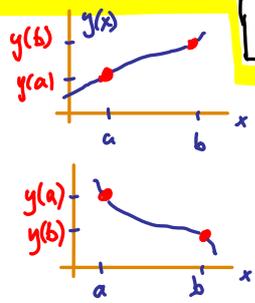
$= F(y(b)) - F(y(a)) = F(\tilde{b}) - F(\tilde{a})$ (6)

(6) = (3) : $\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x)) \stackrel{(3)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy$ (7)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \stackrel{(3)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy$



$\int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy$ [$y(x)$ monoton zunehmend]
 $-\int_{y(b)}^{y(a)} f(y) dy$ [$y(x)$ monoton abnehmend]



Merkregel:
Substitution:

Integrationsmaß:

$y = y(x), \frac{dy}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} \approx \pm \frac{\delta y}{\delta x} \Rightarrow \delta y \approx \pm \delta x \frac{dy(x)}{dx}$ (2)

Integrationsgrenzen:

$x \mapsto y(x)$
 $a \mapsto y(a)$
 $b \mapsto y(b)$ (3)

Beispiel: $I = \int_4^5 dx \frac{x}{(1+x^2)^2}$ (4)

Substitution:

Integrationsmaß:

$y(x) = 1+x^2$ (5) $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2} \delta y = \delta x \cdot x$ (6)

Integrationsgrenzen:

$4 \mapsto y(4) = 1+4^2$ (7)
 $5 \mapsto y(5) = 1+5^2$ (8)

$I = \int_{17}^{26} \frac{1}{2} \frac{dy}{(y)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y} \Big|_{17}^{26} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{26} - \frac{1}{17} \right]$ (9)

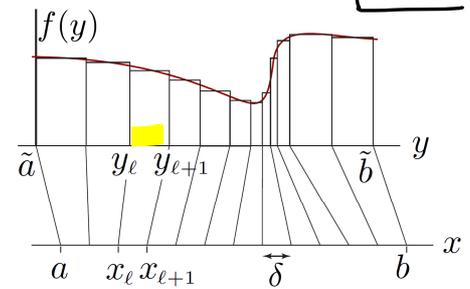
Variablen-Substitution (intuitive Diskussion)

Czi

Kacheln müssen nicht alle gleich groß sein!

$$f: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(y) \quad (1)$$

$\{y_\ell\}$ seien Grenzpunkte v. 'ungleichbreiten' Kacheln.



Verallgemeinerung der Riemann-Summe:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} dy f(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y_\ell) \underbrace{[y_{\ell+1} - y_\ell]}_{\text{Breite v. Kachel } \ell} \quad (2)$$

Umformung in Riemann-Summe mit gleichbreiten Kacheln:

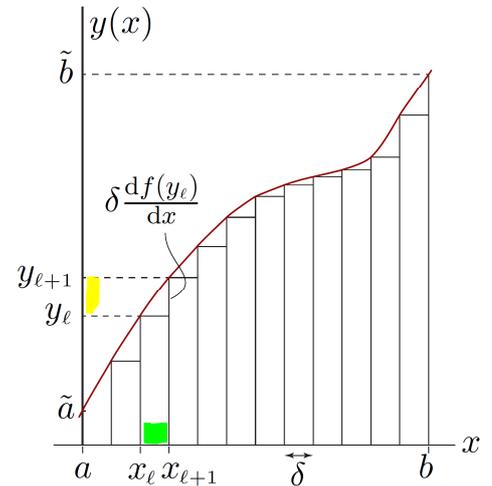
$$x_i \equiv \delta \cdot \ell \quad (3)$$

$$\delta \equiv (b-a)/N \quad (4)$$

Kachelbreiten seien bestimmt durch eine monoton steigende Funktion, y :

$$x: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}] = [y(a), y(b)]$$

$$x \mapsto y(x) \quad \text{mit} \quad y_\ell = y(x_\ell) \quad (5)$$



Variablen-Substitution in der Riemann-Summe:

Czi

$$\begin{aligned} y(b) &= \tilde{b} \\ y(a) &= \tilde{a} \end{aligned} \quad (i.2) \quad \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} dy f(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y_\ell) [y_{\ell+1} - y_\ell] \quad (1)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y(x_\ell)) \left[\frac{y(x_{\ell+1}) - y(x_\ell)}{\delta} \right] \cdot \delta \quad (2)$$

$$\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y(x_\ell)) \underbrace{\frac{dy(x_\ell)}{dx}}_{\substack{\text{Mutter aller Ableitungen} \\ \text{(Cib.2)}}} \cdot \delta \quad (3)$$

$$= \int_a^b dx f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} \quad (4)$$

entstammt den ungleichen Kachelbreiten in Ausgangsformel (i.2), und beschreibt die Streckung/Stauchung der Kachelbreiten, die beim Übergang zu gleichbreiten Kacheln generiert wird.

'Variablen-Substitution':

$$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \stackrel{(4)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy f(y) \quad (5)$$

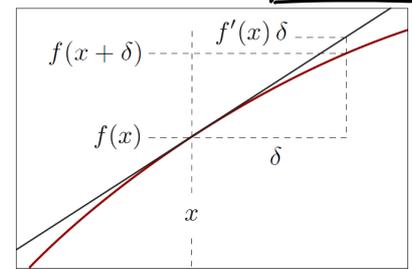
Zusammenfassung: C1-C2

Z C1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen

Definition d.
Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta > 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \quad (1)$$



Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\delta) \approx f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} \quad (2)$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \quad (3)$$

Kettenregel:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (4)$$

Ableitung d.
Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}} \quad (5)$$

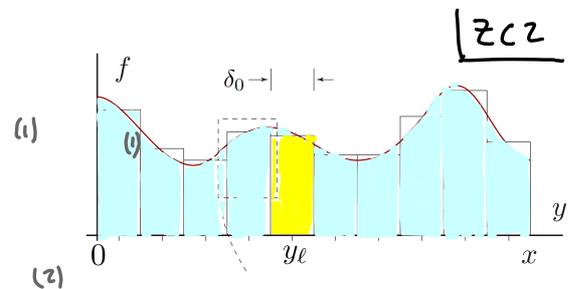
C2 Integrale

'Riemann-Summe'

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{l=1}^{N(\delta)} X_l$$

Fläche
unter Kurve:

$$F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_l f_l \equiv \int_0^x dy f(y)$$



'Hauptsatz':

$$F(x) = \int_0^x dy f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (3)$$

Bestimmtes
Integral:

$$\int_a^b dy f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b \quad (4)$$

'Partielle
Integration'

$$\int_a^b dx u(x) v'(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x) \quad (5)$$

'Variablen-
Substitution':

$$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy f(y), \quad dy = dx y'(x), \quad \begin{array}{l} x \mapsto y(x) \\ a \mapsto y(a) \\ b \mapsto y(b) \end{array} \quad (6)$$