

7. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Harmonischer Oszillator)

Gegeben sei ein Teilchen in einem harmonischen Oszillator im Zustand

$$\Psi(x) = A \left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

- a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie.
- b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$ mit Hilfe der algebraischen Methode. Bestimmen Sie dann die Erwartungswerte der kinetische und potentielle Energie. Wie sieht die Unschärferelation bei diesem Zustand aus?
- c) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustands. Zu welcher Zeit ist der Zustand gegeben durch

$$\Psi(x) = B \left(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Aufgabe 2: (Anwendungen des harmonischen Oszillators)

Gegeben sei das *Lennard-Jones*-Potential

$$V(r) = 4\varepsilon \left(\frac{\sigma^{12}}{r^{12}} - \frac{\sigma^6}{r^6} \right),$$

welches näherungsweise das Potential zwischen zwei sphärischen Atomen beschreibt. Für zwei ${}^4\text{He}$ -Atome sind $\varepsilon \simeq 10^{-3}\text{eV}$, $\sigma \simeq 2.5\text{\AA}$ und $\hbar^2/m \simeq 2 \times 10^{-3}\text{eV \AA}^2$ (mit der reduzierten Masse m) realistische Parameterwerte.

- a) Skizzieren Sie das Potential. Bestimmen Sie die Lage des Minimums r_0 und $V_{\min} = V(r_0)$.
- b) Nähern Sie das Potential in der Nähe des Minimums durch einen harmonischen Oszillator an und schätzen Sie die Nullpunktsenergie $E_0 = \hbar\omega/2$ für die eindimensionale Bewegung (entlang r) der ${}^4\text{He}$ -Atome in dieser Näherung ab. Vergleichen Sie E_0 mit der Dissoziationsenergie $-V_{\min}$.

Aufgabe 3: (Variationen des harmonischen Oszillators)

- a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Energieeigenwerte für ein Teilchen der Masse m in einem Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

- b) Ein harmonischer Oszillator der Masse m und der Ladung q werde einem konstanten elektrischen Feld E_x ausgesetzt:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qE_x x.$$

Bestimmen Sie die Verschiebung der Energieniveaus durch das elektrische Feld.

- c) Finden Sie mit Hilfe der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie eines Teilchens der Masse m , das sich im Potential $V(x) = \lambda x^4$, $\lambda > 0$ befindet.