15.11.2021

LMU – Fakultät für Physik

5. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Delta-Potential)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem Potential der Form:

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x), \qquad \alpha > 0.$$

a) Bestimmen Sie die stationären Zustände des Systems ($E < 0$). Normieren und skizzieren Sie diese.

b) Geben Sie die Bedingung an, welche die Quantisierung der Energie E des Teilchens widerspiegelt (Hinweis: Betrachten Sie dazu die Unstetigkeit von $\Psi'(x)$). Wie viele gebundene Zustände gibt es? Sind die zugehörigen Wellenfunktionen symmetrisch/antisymmetrisch?

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen zum Potentialtopf im Limes $V_0 \to \infty$, $L \to 0$ wobei $2V_0L = \alpha$.

d) Finden Sie die Ergebnisse der Aufgabenteile (a) und (b) aber diesmal mit Hilfe der Fourier-Transformation, d.h., berechnen Sie zunächst die Fourier-Transformation der Schrödingergleichung, lösen Sie die entsprechende algebraische Gleichung und berechnen Sie schließlich die inverse Fourier-Transformation der Wellenfunktion, um $\psi(x)$ zu finden. Benutzen Sie dazu

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{a+bk^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}}\,e^{-|x|\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Aufgabe 2: (Gekoppelte Potentialtöpfe)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem Potential der Form:

$$V(x) = \begin{cases} U & |x| \le d \\ 0 & d < |x| \le L \\ \infty & |x| > L \end{cases} \qquad ,U > 0.$$

Es handelt sich um ein System aus zwei gleichen Potentialtöpfen, welche über eine Barriere der Höhe U und der Breite $2d$ miteinander gekoppelt sind. Dieses einfache System kann als erste Näherung verschiedener quantenmechanischer Probleme (H_2^+-Ion, NH_3-Molekül ...) dienen. So erfährt das Elektron des H_2^+-Ions in unmittelbarer Nähe jeweils eines der beiden Protonen hauptsächlich dessen Coulomb-Anziehung (Potentialtopf). Im Bereich zwischen den beiden Protonen muss das Elektron dagegen eine sogenannte Coulomb-Barriere, welche durch die gegenseitige Abstoßung der beiden Protonen erzeugt wird, überwinden.

a) Bestimmen Sie die stationären Zustände des Systems (ohne Normierung). Zeigen Sie, dass die Quantisierung der Energie E des Teilchens für symmetrische/antisymmetrische Wellenfunktion auf

$$\frac{k}{\rho} = \tan\left[k(d-L)\right]\tanh[\rho d], \qquad \frac{k}{\rho} = \tan\left[k(d-L)\right]\tanh^{-1}[\rho d]$$

führt, wobei k und ρ definiert sind durch:

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar, \qquad \rho = \sqrt{2m(U-E)}/\hbar.$$

b) Betrachten Sie die transzendenten Gleichungen im Limes $U \to 0$ und $U \to \infty$. Welche Entartung liegt im letzten Fall vor?

c) Betrachten Sie im Folgenden den Fall, dass die Barriere hoch ist im Vergleich zur Grundzustandsenergie E_0 und nur schwach durchlässig, d.h.

$$U \gg E_0, \qquad \rho d \gg 1.$$

Bestimmen Sie die Energieaufspaltung zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand des Systems. Verwenden Sie dazu die Entwicklung

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1 - 2e^{-2x} + \cdots$$

und den Ansatz $k_\pm = k_1 + \varepsilon_\pm$, wobei $k_1 = \pi/(L-d)$ den Grundzustand eines Potentialtopfs der Breite $L-d$ mit unendlich hohen Wänden beschreibt. Behandeln Sie $\varepsilon_\pm$ als kleine Größe.

d) Durch Addition der beiden Zustände aus (c) kann erreicht werden, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ überwiegend im Gebiet rechts von der Barriere befindet. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands und geben Sie die Frequenz an, mit der das Teilchen zwischen den beiden Potentialtöpfen oszilliert.