

### 3. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

#### Aufgabe 1: (Fourier-Transformation)

Wir definieren die *Fourier-Transformierte*  $\tilde{f}(k)$  einer Funktion  $f(x)$  durch:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Die inverse Fourier-Transformation lautet dann:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

Die Funktion  $f(x)$  erfülle im Folgenden die notwendigen mathematischen Voraussetzungen, so dass die Fourier-Transformierte existiert (was in der Physik praktisch immer der Fall ist). Nehmen Sie insbesondere an, dass  $f(x)$  im Unendlichen verschwindet.

- a) Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

Hinweis: Fügen Sie im Exponenten einen Dämpfungsterm der Form  $-\frac{1}{n}|k|$  mit  $n > 0$  hinzu, so dass der Integrand im Unendlichen verschwindet. Betrachten Sie erst nach der Berechnung des Integrals den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

- b) Zeigen Sie, dass die angegebene Form der inversen Fourier-Transformation mit der Definition der ursprünglichen Fourier-Transformation konsistent ist, d.h. berechnen Sie explizit die inverse Fourier-Transformation der Fourier-Transformierten von  $f(x)$ .
- c) Zeigen Sie die *Parsevalsche Identität*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k)$$

- d) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation Ableitungen in einfache Produkte verwandelt, d.h. berechnen Sie die Fourier-Transformierte von  $f'(x)$ .
- e) Die Faltung zweier Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  ist definiert durch:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x')$$

Zeigen Sie das Faltungstheorem:  $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$ .

- f) Skizzieren Sie die Funktion:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}a^2x^2+bx}$$

Berechnen Sie ihre Fourier-Transformierte und skizzieren Sie diese für  $b = 0$ . Wie läßt sich das Resultat allgemein charakterisieren?

## Aufgabe 2: (Potentialtopf)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse  $m$  in einem Potential der Form:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L \\ V_0 & |x| > L \end{cases}, V_0 > 0$$

Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion auf die Bindungszustände des Systems, d.h. auf den Fall  $0 \leq E < V_0$ .

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung der zugehörigen stationären Schrödinger-Gleichung auf eine Quantisierung der Energie  $E$  des Teilchens führt, welche ausgedrückt werden kann durch:

$$\frac{\rho - ik}{\rho + ik} = \pm e^{2ikL}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar, \quad \rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

- b) Zeigen Sie, dass die Lösungen zum negativen (positiven) Vorzeichen auf symmetrische (antisymmetrische) Wellenfunktionen führen. Für symmetrische Wellenfunktionen kann die Quantisierungsbedingung zudem in die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\rho}{k} = \tan(kL)$$

Wie lautet die entsprechende Gleichung für die antisymmetrischen Lösungen?

- c) Die transzendenten Gleichungen können graphisch gelöst werden. Führen Sie dazu dimensionslose Parameter  $\alpha = kL$ ,  $\beta = \rho L$  und  $\xi = \sqrt{2mV_0}L/\hbar$  ein. Geben Sie die Anzahl der symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen in Abhängigkeit von  $V_0$  an.
- d) Untersuchen Sie die Ergebnisse für den Fall  $V_0 \rightarrow \infty$  und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen zum Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden aus der Vorlesung.