

11. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Harmonischer Oszillator)

Gegeben sei das Potential des isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2.$$

- a) Verwenden Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten und zeigen Sie, dass dies auf drei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren führt. Bestimmen Sie die Bindungsenergien E_n und deren Entartungsgrad $d(n)$.
- b) Wiederholen Sie die Schritte aus a) für den anisotropen harmonischen Oszillator:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m[\omega_1^2(x^2 + y^2) + \omega_2^2z^2].$$

Bestimmen Sie den Entartungsgrad $d(n)$ in diesem Fall.

Aufgabe 2: (Wasserstoffatom)

- a) Geben Sie die explizite Form der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$ zur Quantenzahl $n = 2$ an. Wieviele Zustände gibt es? Berechnen Sie $\langle r \rangle$ und $\langle z \rangle$ für jeden Zustand. An welchem Radius würde man ein Teilchen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit antreffen?
- b) Zeigen Sie, dass der radiale Anteil $R_{nl}(r)$ der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms im Fall $l = n - 1$ die Form

$$R_{n(n-1)}(r) = N_n r^{n-1} e^{-r/(na)}$$

annimmt und bestimmen Sie die Normierungskonstante N_n .

Berechnen Sie für die Zustände mit $l = n - 1$ die Erwartungswerte $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$ sowie die radiale Unschärfe $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$. Wie verhält sich die relative radiale Unschärfe $\Delta r / \langle r \rangle$ im Limes $n \rightarrow \infty$?

- c) Zeigen Sie, dass der Operator $p_r \equiv -i\hbar[\partial/\partial r + 1/r]$ hermitesch ist, die radiale Projektion des Impulsoperators $\tilde{p}_r \equiv \vec{p} \cdot \vec{e}_r = -i\hbar\partial/\partial r$ hingegen nicht. Berechnen Sie die Kommutatoren $[r, p_r]$ und $[r, \tilde{p}_r]$. Berechnen Sie schließlich den Ausdruck $\Delta r \Delta p_r$ für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ψ_{100} .