

## 11. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

### Aufgabe 1: (Harmonischer Oszillator)

Gegeben sei das Potential des isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2.$$

- a) Verwenden Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten und zeigen Sie, dass dies auf drei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren führt. Bestimmen Sie die Bindungsenergien  $E_n$  und deren Entartungsgrad  $d(n)$ .
- b) Wiederholen Sie die Schritte aus a) für den anisotropen harmonischen Oszillator:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m[\omega_1^2(x^2 + y^2) + \omega_2^2z^2].$$

Bestimmen Sie den Entartungsgrad  $d(n)$  in diesem Fall.

### Aufgabe 2: (Wasserstoffatom)

- a) Geben Sie die explizite Form der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms  $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$  zur Quantenzahl  $n = 2$  an. Wieviele Zustände gibt es? Berechnen Sie  $\langle r \rangle$  und  $\langle z \rangle$  für jeden Zustand. An welchem Radius würde man ein Teilchen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit antreffen?
- b) Zeigen Sie, dass der radiale Anteil  $R_{nl}(r)$  der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms im Fall  $l = n - 1$  die Form

$$R_{n(n-1)}(r) = N_n r^{n-1} e^{-r/(na)}$$

annimmt und bestimmen Sie die Normierungskonstante  $N_n$ .

Berechnen Sie für die Zustände mit  $l = n - 1$  die Erwartungswerte  $\langle r \rangle$  und  $\langle r^2 \rangle$  sowie die radiale Unschärfe  $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$ . Wie verhält sich die relative radiale Unschärfe  $\Delta r / \langle r \rangle$  im Limes  $n \rightarrow \infty$ ?

- c) Zeigen Sie, dass der Operator  $p_r \equiv -i\hbar[\partial/\partial r + 1/r]$  hermitesch ist, die radiale Projektion des Impulsoperators  $\tilde{p}_r \equiv \vec{p} \cdot \vec{e}_r = -i\hbar\partial/\partial r$  hingegen nicht. Berechnen Sie die Kommutatoren  $[r, p_r]$  und  $[r, \tilde{p}_r]$ . Berechnen Sie schließlich den Ausdruck  $\Delta r \Delta p_r$  für den Grundzustand des Wasserstoffatoms  $\psi_{100}$ .