

1. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Lineare Algebra)

Wir bezeichnen die Basisvektoren eines Vektorraums V mit dem Symbol $|n\rangle$, $n = 1, \dots, \dim(V)$; die konjugierten Basisvektoren mit $\langle n|$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird in dieser Notation mit $\langle u|v\rangle$ bezeichnet, insbesondere gilt also für die orthonormierten Basisvektoren $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. Eine Matrix A wird *hermitesch* genannt, falls $A = A^\dagger$; eine Matrix U wird *unitär* genannt, falls $U^{-1} = U^\dagger$. Die *Spur* einer Matrix ist die Summe über ihre Diagonalelemente, d.h. $\text{Tr}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$.

- a) Zeigen Sie die Zerlegung der Eins, d.h. $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist.
- b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reell sind und dass Eigenvektoren $|\lambda\rangle$, $|\lambda'\rangle$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \lambda'$ orthogonal sind.
- c) Zeigen Sie, dass $(e^{iA})^\dagger = e^{-iA^\dagger}$ und dass für B hermitesch e^{iB} unitär ist. Beachten Sie dabei, dass das Exponential einer Matrix über ihre Exponentialreihe definiert wird, also $e^A = 1 + A + A^2/2 + \dots$
- d) Zeigen Sie, dass die Spur einer beliebigen Matrix invariant unter unitären Transformationen ist und dass die Spur eine lineare Abbildung ist.
- e) Zeigen Sie $\text{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k) = \text{Tr}(A_k A_1 A_2 \cdots A_{k-1})$, d.h. unter der Spur darf zyklisch vertauscht werden.
- f) Zeigen Sie für eine hermitesche Matrix, dass die Spur die Summe der Eigenwerte und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Zeigen Sie anschließend die Relation $\text{Det}(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$.

Aufgabe 2: (Kommutatoren)

Für zwei Matrizen A, B gleicher Dimension definieren wir den *Kommutator* als

$$[A, B] := AB - BA,$$

und den *Antikommutator* als

$$\{A, B\} := AB + BA.$$

- Zeigen Sie $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
- Zeigen Sie $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (*Jacobi-Identität*).
- Zeigen Sie $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ und $\{A, B\}^\dagger = \{A^\dagger, B^\dagger\}$.
- Zeigen Sie für hermitesche Matrizen A und B , dass $i[A, B]$ ebenfalls hermitesch und $i\{A, B\}$ dagegen antihermitesch (d.h. $A^\dagger = -A$) ist.
- Sei $F(B)$ ein Polynom in B ; die Ableitung nach B ist gegeben durch $(B^n)' = nB^{n-1}$. Nehmen Sie an, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und zeigen Sie, dass

$$[A, F(B)] = [A, B]F'(B).$$

- Man definiert die Ableitung einer Matrix A , die von einem Parameter t abhängt, über

$$\frac{dA(t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t}.$$

Man kann zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}.$$

Berechnen Sie für konstante A und B

$$\frac{d}{dt}e^{At} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt}).$$

- Zeigen Sie mit Hilfe von $\frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt})$ und einer daraus abgeleiteten Differentialgleichung die *Glauber-Formel*

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]},$$

unter der Voraussetzung, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

- Zeigen Sie die *Baker-Hausdorff-Formel*:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Zeigen Sie dazu, dass $B(t) = e^{At} B e^{-At}$ die Integralgleichung

$$B(t) = B + \int_0^t d\tau [A, B(\tau)]$$

löst, und iterieren Sie diese.