Blatt 15: Optional: Frequenzkamm

Lösung Optionale Aufgabe 1: Poisson-Summenformeln [3]

(a) Wir multiplizieren die Vollständigkeitsrelation mit $f(y/L)$ und integrieren über $x = y/L$:

Vollständigkeit:
$$\frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n y/L} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(y - Lm) = \frac{1}{L}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\left(\tfrac{y}{L} - m\right) \tag{1}$$

$\int \mathrm{d}x f(x)(1)$:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x - m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\,.$$

Das Integral links entspricht der Fourier-Rücktransformierten,gegeben durch $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, mit $k = 2\pi n$. Somit erhalten wir:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(2\pi n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)}\,. \tag{2}$$

(b) Wir wählen $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, und berechnen zunächst die Fourier-Transformierte:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}kx + a|x|)} = \frac{2a}{k^2 + a^2}\,.$$

Die Poisson-Summenformel $\sum_n \tilde{f}(2\pi n) = \sum_m f(m)$ liefert dann:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2a}{(2\pi n^2 + a^2)}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-a|m|} = 2\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-am} - 1$$
$$= \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{-a}} - 1 = \frac{1 + \mathrm{e}^{-a}}{1 - \mathrm{e}^{-a}} = \frac{\mathrm{e}^{a/2} + \mathrm{e}^{-a/2}}{\mathrm{e}^{a/2} - \mathrm{e}^{-a/2}} = \boxed{\coth(a/2)}\,.$$

(c) Wir wählen $f(x) = \mathrm{e}^{-(ax^2 + bx + c)}$, und berechnen zunächst die Fourier-Transformierte:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-a\left(x^2 + \frac{1}{a}(b + \mathrm{i}k)x\right) - c}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-a\left(x + \frac{b+\mathrm{i}k}{2a}\right)^2} \mathrm{e}^{a\left(\frac{b+\mathrm{i}k}{2a}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{1}{4a}\left(b^2 + 2\mathrm{i}bk - k^2\right) - c}\,.$$

Die Poisson-Summenformel $\sum_m f(m) = \sum_n \tilde{f}(2\pi n)$ liefert dann:

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\left(am^2+bm+c\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\left(\pi^2 n^2 + \mathrm{i}\pi n b\right)}}\,.$$

Lösung Optionale Aufgabe 2: Fourier-Integraldarstellung periodischer Funktionen, Frequenzkamm [6]

(a) Wir setzten die Fourier-Reihe für $p(t)$ in die Formel für die Fourier-Transformierte ein:

$$\tilde{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, p(t) = \frac{1}{\tau}\sum_m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m t}}_{2\pi\delta(\omega-\omega_m)}\,\tilde{p}_m = \boxed{\omega_r \sum_m \tilde{p}_m \delta(\omega-\omega_m)}\,,$$

mit $\omega_r = 2\pi/\tau$. Offenbar ist $\tilde{p}(\omega)$ ein periodischer Frequenzkamm von δ-Funktionen, deren Gewichte durch die diskreten Fourier-Koeffiziente $\tilde{p}_m$ der Fourier-Reihe festlegt sind.

(b) Wir setzen $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{f}(\omega)$ in $p(t)$ ein und machen die Substitution $\omega = y\omega_r$ (also $\omega\tau = 2\pi y$):

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_n f(t-n\tau) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-n\tau)}\tilde{f}(\omega) \\ &\overset{\omega=y\omega_r}{=} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi y n} \underbrace{\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\omega_r t}\tfrac{1}{\tau}\tilde{f}(y\omega_r)\right]}_{\equiv F(y)} = \sum_n \tilde{F}(2\pi n) \overset{\text{(Poisson)}}{=} \sum_m F(m) \end{aligned}$$

Wir haben die Funktion $F(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\omega_r t}\frac{1}{\tau}\tilde{f}(y\omega_r)$ definiert, mit Fourier-Transform $\tilde{F}(k)$, und die Poisson-Summenformel genutzt. Mit $\omega_m = m\omega_r = 2\pi m/\tau$ erhalten wir somit:

$$p(t) = \sum_m F(m) = \frac{1}{\tau}\sum_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega_r t}\underbrace{\tilde{f}(m\omega_r)}_{\equiv\tilde{p}_m} \overset{\omega_m=m\omega_r}{=} \frac{1}{\tau}\sum_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m t}\tilde{p}_m \quad \text{mit} \quad \boxed{\tilde{p}_m = \tilde{f}(\omega_m)}\,.$$

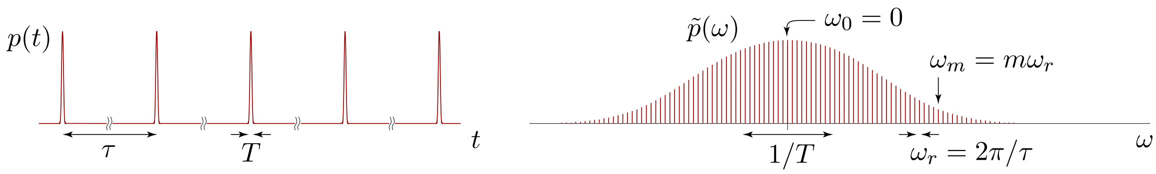
Der mittlere Term hat die Form einer diskreten Fourier-Reihe, von der wir die diskreten Fourier-Koeffizienten $\tilde{p}_m$ von $p(t)$ ablesen können. Sie sind offenbar durch $\tilde{p}_m = \tilde{f}(\omega_m)$ gegeben, entsprechen also der Fourier-Transformierten von $f(t)$, ausgewertet an den diskreten Frequenzen ω_m.

(c) Aus (a) und (b) folgt direkt folgende Form für die Fourier-Transformierte von $p(t)$:

Fourier-Spektrum: $$\tilde{p}(\omega) \overset{\text{(a)}}{=} \omega_r \sum_m \tilde{p}_m \delta(\omega-\omega_m) \overset{\text{(b)}}{=} \boxed{\omega_r \sum_m \tilde{f}(\omega_m)\delta(\omega-\omega_m)}\,.$$

Für eine Folge von Gauß-Peaks, $p_G(t) = \sum_n f_G(t-n\tau)$, hat die Einhüllende des Frequenzkamms, $\tilde{f}_G(\omega)$, ebenfalls die Form eines Gauß-Peaks (Blatt 12, Beispielaufgabe 2):

Einhüllende: $$\tilde{f}_G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}} = \boxed{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T^2\omega^2}}\,.$$

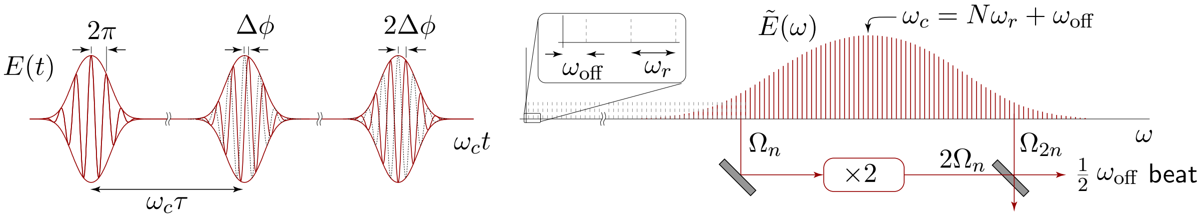


(d) Die Fourier-Transformierte von $E(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c t} p(t)$ ist die um ω_c verschobene Version der Fourier-Transformierten von $p(t)$ ('Fourier-Verschiebungstheorem'):

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \tilde{p}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_c-\omega')t}}_{2\pi\delta(\omega-\omega_c-\omega')} = \tilde{p}(\omega - \omega_c)$$

$$\overset{\text{(c)}}{=} \frac{2\pi}{\tau} \sum_m \tilde{f}(\omega_m)\delta(\omega - \omega_m - \omega_c) \overset{m=n-N}{=} \boxed{\frac{2\pi}{\tau} \sum_n \tilde{f}(\omega_{n-N})\delta(\omega - \omega_n - \omega_{\text{off}})}\,.$$

Im letzten Schritt nutzten wir $\omega_c = N\omega_r + \omega_{\text{off}}$ und eine Umbennung des Summationsindexes, $m = n - N$, sodass $\omega_m + \omega_c = \omega_n + \omega_{\text{off}}$. Somit bildet $\tilde{E}(\omega)$ einen 'offset-verschobenen' Frequenzkamm, dessen Peaks relativ zu den Fourier-Frequenzen ω_n um die Offsetfrequenz ω_{off} verschoben sind. Das 'Zentrum' liegt bei der Frequenz, bei der $\tilde{f}(\omega_{n-N})$ maximal ist, d.h. bei $n = N$, mit Frequenz $\omega_N \simeq \omega_c$.



(e) Wir beginnen mit der Definition der Fourier-Transformierten von $p_\gamma(t)$:

Definition:
$$\tilde{p}_\gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} p_\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \sum_n f(t - n\tau)\mathrm{e}^{-|n|\tau\gamma}$$

$t' = t - n\tau$:
$$= \underbrace{\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau\omega} \mathrm{e}^{-|n|\tau\gamma}}_{\equiv S^{[\gamma,\omega_r]}(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} f(t')}_{=\tilde{f}(\omega)}\,. \tag{3}$$

Die Summe

$$S^{[\gamma,\omega_r]}(\omega) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau\omega} \mathrm{e}^{-|n|\tau\gamma} \overset{\tau=2\pi/\omega_r}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\omega/\omega_r} \mathrm{e}^{-2\pi|n|\gamma/\omega_r} \tag{4}$$

dieselbe Form wie eine gedämpfte Summe über Fourier-Moden,

$$S^{[\epsilon,L]}(x) \equiv \sum_{k\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \epsilon|k|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/L} \mathrm{e}^{-2\pi|n|\epsilon/L}\,. \tag{5}$$

Diese lässt sich mittels geometrischen Reihen in den Variablen $\mathrm{e}^{-2\pi(\epsilon\mp\mathrm{i}x)/L}$ aufsummieren:

$$S^{[\epsilon,L]}(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L}}{1+\mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L}-2\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon/L}\cos(2\pi x/L)} \simeq L\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta^{[\epsilon]}_{\mathrm{LP}}(x-mL)\,. \tag{6}$$

Das Ergebnis entspricht einer periodischen Folge von (in der Skizze grau schattierte) Peaks an den Positionen $x \simeq mL$, jede mit Form eines Lorentz-Peaks (LP), $\delta^{[\epsilon]}_{\mathrm{LP}}(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$ für $x, \epsilon \ll L$. Mit den Assoziationen $x \mapsto \omega$, $\epsilon \mapsto \gamma$ und $L \mapsto \omega_r$ erhalten wir somit:

$$S^{[\gamma,\omega_r]}(\omega) \overset{(4,6)}{=} \omega_r \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta^{[\gamma]}_{\mathrm{LP}}(\omega - m\omega_r) \tag{7}$$

und

$$\tilde{p}_\gamma(\omega) \overset{(3,7)}{=} \boxed{\omega_r \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta^{[\gamma]}_{\mathrm{LP}}(\omega-\omega_m)\tilde{f}(\omega)}\,.$$

Also entspricht das Spektrum einer bei $|n| \lesssim 1/(\tau\gamma)$ trunkierten Folge von periodischen Pulsen einem Frequenzkamm mit Lorentz-verbreiterten Zinken, jede mit Breite $\simeq \gamma$.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 9]