Blatt 15: Optional: Frequenzkamm

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll

Optionale Aufgabe 1: Poisson-Summenformeln [3]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E); (c)[1](M). [T]

(a) Beweisen Sie, dass jede Funktion $f(x)$, für die eine Fourier-Integraldarstellung der Form $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k)$ existiert, folgende bemerkenswerte Beziehung erfüllt:

'Poisson-Summenformel': $$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(2\pi n)\,.$$

Die Summe über die Funktionswerte $f(m)$ aller ganzzahligen Argumente liefert somit dasselbe wie die Summe über alle Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}(2\pi n)$!

Hinweis: Multiplizieren Sie die Vollständigkeitrelation für diskrete Fourier-Moden, nämlich $\frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ny/L} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(y - Lm)$, mit $f(y/L)$ und integrieren Sie über $x = y/L$.

Beweisen Sie mittels der Poisson-Summenformel und den angegebenen Funktionen $f(x)$ folgende Identitäten (mit $0 < a \in \mathbb{R}$):

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$: $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2a}{(2\pi n)^2 + a^2} = \coth(a/2)\,.$$

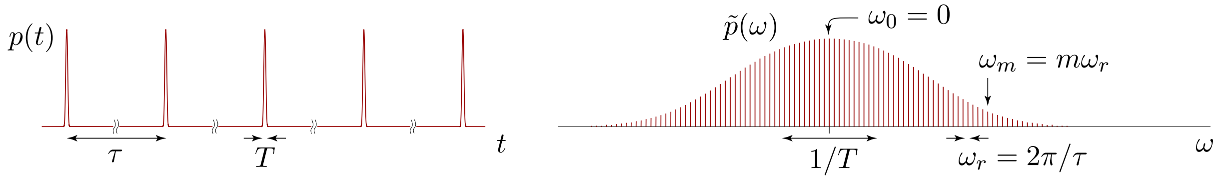
(c) $f(x) = \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}$: $$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-(am^2+bm+c)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\left(\pi^2 n^2 + \mathrm{i}\pi nb\right)}\,.$$

Die Identität (c) ist die sogenannten 'Poisson-Resummationsformel' für unendliche Summen über diskrete Gauß-Peaks. Beachten Sie die Fourier-Gegensätzlichkeit: die Breite der diskreten Gauß-Peaks links und rechts ist proportional zu $1/a$ bzw. a/π^2.

Optionale Aufgabe 2: Fourier-Integraldarstellung periodischer Funktionen, Frequenzkamm [6]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[1](E); (d)[2](M); (e)[3,Bonus](A).

Die derzeit genauste Methode, optische Frequenzen zu messen, basiert auf der Nutzung eines optischen 'Frequenzkamms'. Für die Entwicklung dieser Technik erhielten John L. Hall (University of Colorado, USA) und Theoder W. Hänsch (Ludwig-Maximilians-Universität München) 2005 den Nobelpreis für Physik. Dabei wird mittels einer optischen Kavität eine streng periodische Folge von Lichtpulsen erzeugt, deren Fourier-Spektrum die Form eines Frequenzkamms hat. Dieser Kamm enthält mehr als 1 Millionen 'Zinken'; sie umfassen mehr als eine Oktave und ihre Frequenzen sind mit einer Genauigkeit von besser als 10^{-15} bekannt. Um die Frequenz eines optischen Lichtstrahls zu messen, wird dieser mit einem Frequenzkamm überlagert; diejenige Zinke, deren Frequenz der

zu vermessenden Frequenz am nächsten liegt, bildet mit dieser eine Schwebung im Radiobereich, aus der sich die unbekannte Frequenz mit einer Genauigkeit von 10^{-15} ermitteln lässt.
Die folgende Aufgabe stellt die der Frequenzkammtechnik zugrundeliegenden mathematischen Zusammenhänge vor. Die Grundidee ist einfach: Die Fourier-Transformierte eines periodischen Signals ist eine periodische δ-Funktion — der Frequenzkamm. Wir möchten die Positionen, Höhen und Breiten seiner 'Zinken' bestimmen, und wie sich diese Eigenschaften ändern, wenn das Eingangssignal nicht perfekt periodisch ist, was im Labor stets der Fall ist.



Eine periodische Funktion $p(t)$ mit Periode τ habe die Fourier-Reihendarstellung $p(t) = \frac{1}{\tau}\sum_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m t}\tilde{p}_m$, mit $\omega_m = m\omega_r$ und $\omega_r = 2\pi/\tau$. Sie hat auch eine Fourier-Integraldarstellung, $p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{p}(\omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $\tilde{p}(\omega)$ die Form eines periodischen Frequenzkamms von δ-Funktionen hat, dessen 'Zinken' bei den diskreten Fourier-Frequenzen ω_m liegen, gewichtet mit den diskreten Fourier-Koeffizienten $\tilde{p}_m$:

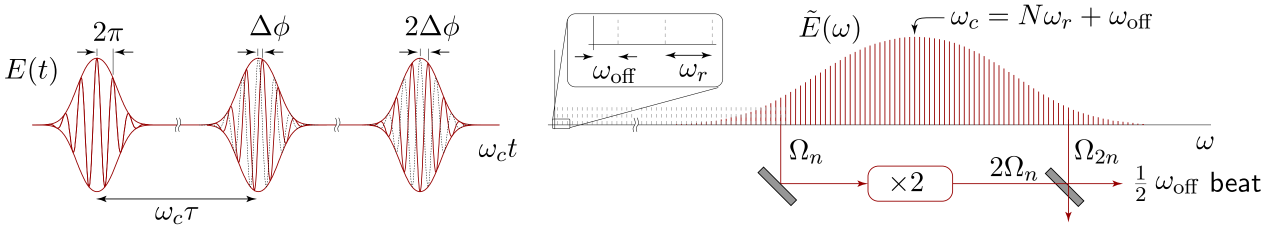
$$\tilde{p}(\omega) = \omega_r \sum_m \tilde{p}_m \delta(\omega - \omega_m). \tag{1}$$

Betrachten Sie fortan eine periodische Funktion der Form $p(t) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - n\tau)$, bestehend aus einer Folge von verschobenen Versionen derselben 'Saatfunktion' $f(t)$, mit Fourier-Integraldarstellung $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{f}(\omega)$. Beschreibt beispielsweise die Saatfunktion einen Peak, so beschreibt die periodische Funktion eine Folge solcher Peaks.

(b) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten $\tilde{p}_m$ der Fourier-Reihendarstellung von $p(t)$ durch $\tilde{p}_m = \tilde{f}(\omega_m)$ gegeben sind. *Hinweis:* Setzen Sie in $p(t)$ die Fourier-Integraldarstellung der Saatfunktion $f(t)$ ein. Bringen Sie $p(t)$ nun mittels der Poisson-Summenformel, $\sum_m \tilde{F}(2\pi m) = \sum_n F(n)$, in die Form einer Fourier-Reihe, von der sich die Fourier-Koeffizienten $\tilde{p}_m$ ablesen lassen.

Konkret sei nun $p_G(t)$ eine periodische Folge von Gauß-Peaks, mit Saatfunktion $f_G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}}$, deren Peakbreite viel kleiner ist als die Peakabstände ($T \ll \tau$).

(c) Gemäß Gl. (1) ist die Fouriertransformierte, $\tilde{p}_G(\omega)$, der Folge von Gauß-Peaks ein Frequenzkamm. Finden Sie eine Formel für $\tilde{p}_G(\omega)$, und bestimmen Sie Positionen und Gewichte der Kammzinken. Zeigen Sie, dass die Gewichte der Peaks durch eine Gauß-Einhüllende gegeben sind, deren Breite umgekehrt proportional zu der der Gaußschen Saatfunktion ist — Fourier-Gegensätzlichkeit!



Ein optischer Frequenzkammgenerator erzeugt einen Lichtstrahl, dessen elektrisches Feld (vereinfacht dargestellt) die Form $E(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c t} p(t)$ hat. Dabei beschreibt $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c t}$ die Oszillation des 'Trägersignals' mit Trägerfrequenz ω_c, und die Einhüllende $p(t)$ ist eine streng periodische Folge von sehr kurzen Pulsen (mit Pulsdauer/Periode $= T/\tau \ll 10^{-6}$). In der Regel sind die Einhüllende und das Trägersignal 'nicht kommensurabel': die Trägerfrequenz ω_c liegt typischerweise *zwischen* zwei Zinken (statt *auf* einer Zinke), hat also die Form $\omega_c = N\omega_r + \omega_{\text{off}}$, mit einer 'Offsetfrequenz' $\omega_{\text{off}} \in (0, \omega_r)$. Aufgrund dieser Inkommensurabilität ist $E(t)$ nicht periodisch: die Phasenlage des Trägersignals relativ zu den Maxima der Einhüllenden verschiebt sich von einem Puls zum nächsten um $\Delta\phi = \omega_{\text{off}}\tau < 2\pi$.

(d) Zeigen Sie, dass das Fourier-Spektrum von $E(t)$ einen Frequenzkamm bildet, dessen 'Zentrum' von 0 nach ω_c verschoben ist, und dessen Peaks relativ zu den Fourier-Frequenzen ω_n um die Offsetfrequenz ω_{off} verschoben sind:

$$\tilde{E}(\omega) = \omega_r \sum_n \tilde{f}(\omega_{n-N})\delta(\omega - \omega_n - \omega_{\text{off}})\,. \tag{2}$$

Anmerkung: Präzise Frequenzmessungen mit einem Frequenzkamm erfordern die genaue Kenntnis der Zinkenpositionen, $\Omega_n = n\omega_r + \omega_{\text{off}}$, und somit von ω_r und ω_{off}. Die Frequenz $\omega_r = 2\pi/\tau$ ist in der Regel hochstabil, ω_{off} zeigt jedoch langsame, unkontrollierte zeitliche Fluktuationen. Mit einem solchen Kamm Frequenzen zu messen wäre wie mit einem zitternden Lineal Abstände zu messen. Die entscheidende Erkenntnis von Hänsch, die es ermöglicht, dieses 'Zittern' zu kontrollieren, ist, dass ω_{off} sich präzise messen lässt, falls die Kammbreite mindestens eine Oktave umfasst. Dann liegt für eine Zinke mit Frequenz Ω_n am unteren Kammende auch die doppelte Frequenz, $2\Omega_n$, im Bereich des Kammes. Eine Verdopplung der Frequenz (ein Standardverfahren in der Optik) und die anschließende Überlagerung mit einer Zinke mit Frequenz Ω_{2n} liefert eine Schwebung mit Frequenz $\frac{1}{2}(2\Omega_n - \Omega_{2n}) = \frac{1}{2}\left[2(n\omega_r + \omega_{\text{off}}) - (2n\omega_r + \omega_{\text{off}})\right] = \frac{1}{2}\omega_{\text{off}}$. Durch Messung und Regelung von ω_{off} lässt sich ein Frequenzkamm mit einer Genauigkeit von 10^{-15} stabilisieren.

Grundlage eines Frequenzkamms ist die strenge Periodizität der Einhüllenden, $p(t)$. Falls diese Periodizität nur innerhalb eines Zeitintervalls von endlicher Dauer gilt, führt dies zu einer Verbreiterung der Kammzinken. Betrachten Sie zur Illustration dieser Tatsache eine 'trunkierte' Einhüllende der Form $p_\gamma(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - n\tau)\mathrm{e}^{-|n|\tau\gamma}$, mit $\tau\gamma \ll 1$, wobei der Faktor $\mathrm{e}^{-|n|\tau\gamma}$ die Beiträge von Termen mit $|n| \gtrsim 1/(\tau\gamma) \gg 1$ wegdämpft (d.h. die Reihe 'trunkiert').

(e) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{p}_\gamma(\omega)$ der trunkierten Pulsfolge. Welche Form haben die einzelnen Zinken? Zeigen Sie, dass ihre Breite umgekehrt proportional zur 'Dauer' der trunkierten Pulsfolge ist — wieder Fourier-Gegensätzlichkeit!

Hinweis: Setzen Sie in $\tilde{p}_\gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} p_\gamma(t)$ die Definition von $p(t)$ und in dieser die Fourier-Darstellung von $f(t)$ ein und machen Sie im Zeitintegral die Substitution $t' = t - n\tau$. Sie erhalten einen Ausdruck der Form $\tilde{p}_\gamma(\omega) = S(\omega)\tilde{f}(\omega)$, wobei $S(\omega)$ durch eine geometrische Reihe gegeben ist. Berechnen Sie diese und analysieren Sie die Form eines Peaks bei $\omega \simeq m\omega_r$ im Limes $\gamma\tau \ll 1$.

Zusammenfassung: Diese Aufgabe beleuchtet folgende allgemeine Zusammenhänge: (a) Da eine periodische Funktion $p(t)$ sich durch eine diskrete Fourier-Reihe darstellen lässt, besteht ihre Fourier-Integraldarstellung $\tilde{p}(\omega)$ aus einem Kamm von δ-Funktionen bei den diskreten Fourier-Frequenzen ω_m. (b) Für eine periodische Funktion, die mittels $p(t) = \sum_n f(t - n\tau)$ durch eine Saatfunktion $f(t)$ dargestellt wird, entspricht die Einhüllende des Frequenzkamms der Fourier-Transformierten der Saatfunktion, $\tilde{p}_m = \tilde{f}(\omega_m)$. (c) Dabei gilt Fourier-Gegensätzlichkeit: je schärfer $f(t)$ gepeaked ist, je breiter ist die Peakform der Einhüllenden $\tilde{f}(\omega_m)$. (d) Wird $p(t)$ mit einem Trägersignal multipliziert, dessen Frequenz mit dem Kamm nicht kommensurabel ist, verschiebt sich der Kamm um eine Offsetfrequenz. (e) Gilt die Periodizität von $p(t)$ nur in einem begrenzten Zeitinterval, sind die Zinken des Frequenzkamms verbreitert.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 9]
