Blatt 13: Integralsätze von Gauß und Stokes

Ausgabe: Mo 24.01.22 Zentralübung: Do 27.01.22 Abgabe: Do 03.02.22, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 4, 6, (7, falls Zeit reicht).
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (V3.7.7), 7 (V3.7.11).

Beispielaufgabe 1: Satz von Gauß – Quader (kartesische Koordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Quader Q, definiert durch $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$, $z \in (0, c)$, und das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\frac{1}{2}x^2 + x^2 y, \frac{1}{2}x^2 y^2, 0)^T$. Berechnen Sie dessen nach außen gerichteten Fluss, $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$, durch die Quaderoberfläche, $S \equiv \partial Q$, auf zwei Weisen:

(a) direkt als Fluss-Integral;

(b) mittels dem Satz von Gauß als Volumenintegral.

[Kontrollergebnisse: falls $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$, dann gilt $\Phi = 18$.]

Beispielaufgabe 2: Berechung des Volumens eines Fasses mittels Satz von Gauß [1]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](A,Bonus).

Wir betrachten einen dreidimensionalen Körper K mit Oberfläche S. Wir können sein Volumen V berechnen, indem wir es als Flussintegral über S darstellen, unter Verwendung des Satzes von Gauß für ein Vektorfeld $\mathbf{u}$, welches $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 1$ erfüllt:

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}V \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \,.$$

Berechnen Sie mittels dieser Methode, mit $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(x, y, 0)^T$, und zylindrischen Koordinaten, das Volumen

(a) eines Zylinders mit Höhe h und Radius R zu berechnen, und

(b) eines zylindrischen Fasses mit Höhe H und z-abhängigem Radius, $\rho(z) = R[1 + a \sin(\pi z/h)]^{1/2}$, mit $z \in (0, h)$ und $a > 0$. [Kontrollergebnis: falls $a = \pi/4$, dann $V = \frac{3}{2}\pi R^2 h$.]

Beispielaufgabe 3: Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace in Zylinderkoordinaten [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](M); (e)[0.5](M); (f)[1](M); (g)[1](E)

Wir betrachten ein krummliniges *orthogonales* Koordinatensystem mit Koordinaten $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T \equiv (\eta, \mu, \nu)^T$, Ortsvektor $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(\eta, \mu, \nu)$ und Koordinatenbasisvektoren $\partial_\eta \mathbf{r} = \mathbf{e}_\eta n_\eta$, $\partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu n_\mu$, $\partial_\nu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\nu n_\nu$, mit $\|\mathbf{e}_j\| = 1$ und Normfaktoren n_η, n_μ, n_ν (d.h. keine Summationen über η, μ und ν

hier!). Ferner sei $f(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\eta u^\eta + \mathbf{e}_\mu u^\mu + \mathbf{e}_\nu u^\nu$ ein Vektorfeld, dargestellt in der *lokalen Basis*. Dann sind Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator gegeben durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\eta} \partial_\eta f \; + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\curvearrowright}} + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\circlearrowright}} \,, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(n_\mu n_\nu u^\eta \right) \; + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\curvearrowright}} + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\circlearrowright}} \,, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\mu n_\nu} \Big[\partial_\mu \left(n_\nu u^\nu \right) - \partial_\nu \left(n_\mu u^\mu \right) \Big] \; + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\curvearrowright}} + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\circlearrowright}} \,, \\
\boldsymbol{\nabla}^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f) &= \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(\frac{n_\mu n_\nu}{n_\eta} \partial_\eta f \right) \; + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\curvearrowright}} + \underset{\nu}{\overset{\eta\;\mu}{\circlearrowright}} \,,
\end{aligned}$$

wobei Kreise mit Pfeilen zyklische Indexpermutationen andeuten. Betrachten Sie nun Zylinderkoordinaten, definiert durch $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)^T$.

(a) Wie lauten $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ und n_ρ, n_ϕ, n_z ?

Finden Sie, ausgehend von den oben angegebenen allgemeinen Formeln, explizite Formeln für

(b) $\boldsymbol{\nabla} f$, (c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, (d) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, (e) $\boldsymbol{\nabla}^2 f$.

(f) Überprüfen Sie explizit, mittels den oben angegebenen Formeln für Gradient und Rotation für allgemeine krummlinigen Koordinaten u, v, w (also nicht spezifisch für Zylinderkoordinaten), dass $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$.

(g) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten zur Berechnung von $\boldsymbol{\nabla} f$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\nabla}^2 f$ für die Felder $f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^2$ und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x, y, 2z)^T$. [Kontrollergebnis: bei $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$ gilt $\boldsymbol{\nabla} f = (2,2,2)^T$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 4$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\nabla}^2 f = 6$.]

Beispielaufgabe 4: Gradient, Divergenz, Rotation (Kugelkoordinaten) [2]

Gegeben sei ein Skalarfeld $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$ und ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\mathrm{e}^{-r/a}/r)\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} f$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\nabla}^2 f$ explizit für $r > 0$, mittels

(a) kartesischen Koordinaten; (b) Kugelkoordinaten.

Zeigen Sie, dass Ihre Ergebnisse aus (a) und (b) miteinander konsistent sind.

Beispielaufgabe 5: Satz von Gauß – Zylinder (Zylinderkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M)

Gegeben sei ein Vektorfeld, $\mathbf{u}$, in Zylinderkoordinaten definiert durch $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\rho z \rho$, und ein Zylindervolumen, V, definiert über $\rho \in (0, R)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, H)$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{u}$ in Zylinderkoordinaten.

Berechnen Sie den Fluss, Φ, des Vektorfeldes $\mathbf{u}$ durch die Oberfläche, S, des Zylindervolumens V, auf zwei Arten:

(b) indem Sie das Flussintegral $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$ explizit berechnen;

(c) indem Sie das Flussintegral mithilfe des Satz von Gauß in ein Volumenintegral über $\nabla \cdot \mathbf{u}$ umschreiben und dieses Volumenintegral explizit berechnen.

Beispielaufgabe 6: Satz von Stokes – magnetischer Dipol (Kugelkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Jedes Magnetfeld lässt sich als $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ darstellen, wobei das Vektorfeld $\mathbf{A}$ das **Vektorpotential** des Feldes genannt wird. Für einen magnetischen Dipol gilt

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Das konstante Dipolmoment $\mathbf{m}$ sei nun in z-Richtung orientiert, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z m$. H sei eine Halbkugel mit Radius R, orientiert mit Grundfläche in der xy-Ebene, Symmetrie-Achse entlang der positiven z-Achse und 'Nordpol' auf derselben.
Berechnen Sie das Flussintegral des Magnetfelds durch diese Halbkugel, $\Phi_H = \int_H \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$, auf zwei verschiedene Weisen:

(a) direkt, mittels Kugelkoordinaten.

(b) drücken Sie Φ mittels $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von $\mathbf{A}$ über den Rand der Grundfläche von H aus, und berechnen Sie letzteres.

Beispielaufgabe 7: Satz von Stokes – Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters (Zylinderkoordinaten) [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M)

Ein unendlich langer, unendlich dünner Leiter sei entlang der z-Achse orientiert und trage einen Strom I. Er generiert ein Magnetfeld folgender Form:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2I}{c}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi \frac{2I}{c}\frac{1}{\rho}, \qquad \text{für} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ explizit für $\rho > 0$

(a) in kartesischen Koordinaten;

(b) in Zylinderkoordinaten. [Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b)!]

(c) Berechnen Sie mittels Zylinderkoordinaten das Linienintegral, $\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$, des Magnetfelds entlang des Randes, γ, einer kreisförmigen, parallel zur xy-Ebene orientierten, auf der z-Achse zentrierten Scheibe, S, mit Radius $R > 0$.

(d) Berechnen Sie mittels dem Satz von Stokes und dem Ergebnis aus (c) das Flussintegral, $\int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot(\nabla \times \mathbf{B})$, der Rotation des Magnetfelds über die in (c) beschriebene Scheibe S.

(e) Folgern Sie aus Ihren Ergebnissen für $\nabla\times\mathbf{B}$ aus (a) und (d), dass die Rotation des Feldes proportional zu einer zwei-dimensionalen δ-Funktion ist, also die Form $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_z\, C\delta(x)\delta(y)$ hat, und finden Sie die Konstante C. [*Hinweis*: die zwei-dimensionale δ-Funktion ist so normiert, dass $\int_S \mathrm{d}S\,\delta(x)\delta(y) = 1$ für das Flächenintegral über eine beliebige, parallel zur xy-Ebene gelegene, die z-Achse durchschneidende Fläche S.]

(f) Schreiben Sie Ihr Ergebnis aus (e) in die Form $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und bestimmen Sie $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Diese Gleichung ist das Gesetz von Ampère (eine der Maxwell-Gleichungen), wobei $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Stromdichte ist. Lässt sich Ihr Ergebnis für $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ entsprechend interpretieren?

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 18]

Hausaufgabe 1: Satz von Stokes – Quader (kartesische Koordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Quader Q, definiert durch $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$, $z \in (0,c)$, und das Vektorfeld $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(yz^2, -xz^2, 0)^T$. Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss von dessen Rotation, $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w})$, durch die Fläche $S \equiv \partial Q \backslash$Deckel, welche aus allen Quaderflächen außer dem Deckel bei $z = c$ besteht, auf zwei Weisen:

(a) direkt als Fluss-Integral;

(b) via dem Satz von Stokes als Linienintegral.

[Kontrollergebnis: falls $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$, dann gilt $\Phi = \frac{3}{2}$.]

Hausaufgabe 2: Berechnung des Volumens einer geriffelten Kugel mittels Satz von Gauß [1]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](A,Bonus).

Das Volumen eines Körpers kann mittels eines Flächenintegrals über die Oberfläche, S, des Körpers berechnet werden, $V = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \frac{1}{3}\mathbf{r}$, (vgl. die entsprechende Beispielaufgabe). Berechnen Sie mittels dieser Methode in Kugelkoordinaten

(a) das Volumen, V, einer Kugel mit Radius R, und

(b) das Volumen, $V(\epsilon, n)$, eines 'geriffelten Balls', dessen ϕ-abhängiger Radius durch die Funktion $r(\phi) = R\big[1 + \epsilon \sin(n\phi)\big]^{2/3}$ beschrieben ist, wobei $1 \le n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Riffel und $\epsilon < 1$ deren Tiefe bestimmt. [Kontrollergebnis: $V(\frac{1}{4}, 4) = \frac{33}{32}V(0,0)$.]

Hausaufgabe 3: Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace in Kugelkoordinaten [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](M); (e)[0.5](M); (f)[1](M); (g)[1](E)

Wir betrachten ein krummliniges *orthogonales* Koordinatensystem mit Koordinaten $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T \equiv (\eta, \mu, \nu)^T$, Ortsvektor $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(\eta, \mu, \nu)$ und Koordinatenbasisvektoren $\partial_\eta \mathbf{r} = \mathbf{e}_\eta n_\eta$, $\partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu n_\mu$, $\partial_\nu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\nu n_\nu$, mit $\|\mathbf{e}_j\| = 1$. Ferner sei $f(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\eta u^\eta + \mathbf{e}_\mu u^\mu + \mathbf{e}_\nu u^\nu$ ein Vektorfeld, dargestellt in der *lokalen Basis*. Dann sind Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator gegeben durch

$$\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\eta} \partial_\eta f \; + \; + \; ,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(n_\mu n_\nu u^\eta\right) \; + \; + \; ,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\mu n_\nu} \Big[\partial_\mu \left(n_\nu u^\nu\right) - \partial_\nu \left(n_\mu u^\mu\right)\Big] \; + \; + \; ,$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(\frac{n_\mu n_\nu}{n_\eta} \partial_\eta f \right) + \overset{\eta\ \ \mu}{\underset{\nu}{\circlearrowright}} + \overset{\eta\ \ \mu}{\underset{\nu}{\circlearrowright}} \,.$$

Betrachten Sie Kugelkoordinaten, $\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)^T$.

(a) Wie lauten $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ und n_r, n_θ, n_ϕ ?

Finden Sie, ausgehend von den oben angegebenen allgemeinen Formeln, explizite Formeln für

(b) ∇f, (c) $\nabla \cdot \mathbf{u}$, (d) $\nabla \times \mathbf{u}$, (e) $\nabla^2 f$.

(f) Überprüfen Sie explizit, dass $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, mittels den oben angegebenen Formeln für Divergenz und Rotation für allgemeine krummlinigen Koordinaten η, μ, ν (also nicht spezifisch für Kugelkoordinaten).

(g) Nutzen Sie Kugelkoordinaten zur Berechnung von ∇f, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ für die Felder $f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^2$ und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (0,0,z)^T$. [Kontrollergebnis: bei $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$ gilt $\nabla f = (2,2,2)^T$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 1$, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f = 6$.]

Hausaufgabe 4: Gradient, Divergenz, Rotation (Zylinderkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M)

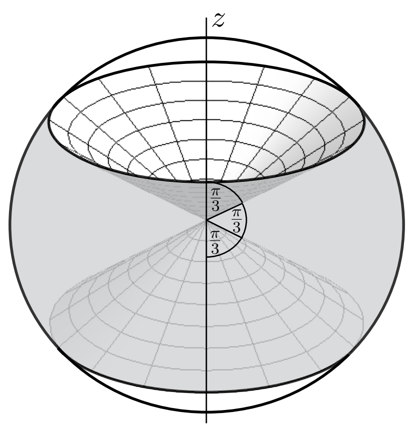
Gegeben sei ein Skalarfeld $f(\mathbf{r}) = z(x^2 + y^2)$ und ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (zx, zy, 0)^T$. Berechnen Sie ∇f, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ explizit, mittels

(a) kartesischen Koordinaten; (b) Zylinderkoordinaten.

Zeigen Sie, dass Ihre Ergebnisse aus (a) und (b) miteinander konsistent sind.

Hausaufgabe 5: Satz von Gauß – Keilring (Kugelkoordinaten) [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[2](A); (c)[1](M)

Der in der Skizze grau schattierte 'Keilring', K, wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch $r \in (0,R)$ und $\theta \in (\pi/3, 2\pi/3)$. (Solch ein ringartiges Objekt, mit keilförmigem Innenprofil und gerundetem Außenprofil, entsteht aus einer Kugel mit Radius R durch Herausschneiden eines um die z-Achse zentrierten Doppelkegels mit Öffnungswinkel $\pi/3$.) Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss Φ_K des Vektorfelds $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r r^2$ durch die Oberfläche ∂K des Keilrings, auf zwei verschiedene Arten:



(a) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int_{\partial K} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$. [Kontrollergebnis: falls $R = \frac{1}{2}$, dann $\Phi_K = \frac{\pi}{8}$.]

(b) Drücken Sie das Flussintegral mittels dem Satz von Gauß durch ein Volumenintegral über die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{u}$ aus, und berechnen Sie dieses Volumenintegral explizit.
Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 u^r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta \left(\sin\theta u^\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi u^\phi \,.$$

(c) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_\theta \cos\theta$ den nach außen gerichteten Fluss $\tilde{\Phi}_K = \int_{\partial K} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{w}$ durch die Oberfläche des Keilrings, entweder direkt oder mittels dem Satz von Gauß. [Kontollergebnis: falls $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann $\tilde{\Phi}_K = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.]

Hausaufgabe 6: Satz von Stokes – Zylinder (Zylinderkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

C sei ein Zylinder mit Radius R und Höhe aR^2, zentriert auf der z-Achse, mit Basis in der xy-Ebene, und $\mathbf{u} = \frac{x^2+y^2}{z}(-y, x, 0)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Flussintegral von dessen Rotation, $\Phi_D = \int_D \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})$, durch den Deckel, D, des Zylinders auf zwei verschiedene Weisen:

(a) direkt, mittels Zylinderkoordinaten;

(b) drücken Sie Φ_D mittels dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von $\mathbf{u}$ über den Rand ∂D des Zylinderdeckels aus, und berechnen Sie letzteres.

Hausaufgabe 7: Satz von Gauß – elektrisches Feld einer Punktladung (Kugelkoordinaten) [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M)

Das elektrische Feld einer Punktladung Q am Ursprung hat die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{e}_r \frac{Q}{r^2}\,, \qquad \text{mit} \quad r > 0, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ explizit für $r > 0$, mittels

(a) kartesischen Koordinaten; und

(b) Kugelkoordinaten. [Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b)!]

(c) Berechnen sie mittels Kugelkoordinaten den Fluss, $\Phi_S = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$, des elektrischen Feldes durch die Oberfäche S einer am Ursprung zentrierten Kugel mit Radius $R > 0$.

(d) Berechnen Sie mittels dem Satz von Gauß und dem Ergebnis aus (c) das Volumenintegral $\int_V \mathrm{d}V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})$ über das Volumen, V, der in (c) beschrieben Kugel.

(e) Folgern Sie aus Ihren Ergebnissen für $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ aus (a) und (d), dass die Divergenz des Feldes proportional zu einer drei-dimensionalen δ-Funktion ist, also die Form $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = C\,\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ hat, und finden Sie die Konstante C. [Hinweis: die Normierung von $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ ist durch das Volumenintegral $\int_V \mathrm{d}V\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 1$ gegeben, für ein beliebiges, den Ursprung einschließendes Volumen V.]

(f) Schreiben Sie Ihr Ergebnis aus (e) in die Form $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, und bestimmen Sie $\rho(\mathbf{r})$. Diese Gleichung ist das (physikalische) Gesetz von Gauß (eine der Maxwell-Gleichungen), wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte ist. Lässt sich Ihr Ergebnis für $\rho(\mathbf{r})$ entsprechend interpretieren?

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 20]
