Blatt 11: Deltafunktion und Fourierreihen

Ausgabe: Mo 10.01.22 Zentralübung: Do 13.01.22 Abgabe: Do 20.01.22, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 1, 3(a), 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (C6.2.1), 5 (C6.3.5).

Beispielaufgabe 1: Integrale mit δ-Funktion [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](M); (d)[1](M); (e)[0.1](E).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$):

(a) $I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-\pi)\sin(ax)$

(b) $I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \|\mathbf{x}\|^2\,,$ mit $\mathbf{y} = (a,1,2)^T$

(c) $I_3(a) = \int_0^a \mathrm{d}x\, \delta(x-\pi) \dfrac{1}{a+\cos^2(x/2)}$

(d) $I_4(a) = \int_0^3 \mathrm{d}x\, \delta(x^2-6x+8)\sqrt{\mathrm{e}^{ax}}$

(e) $I_5(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2\, \delta(\mathbf{x}-a\mathbf{y})\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\,,$ mit $\mathbf{y} = (1,3)^T$. Anmerkung: $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)$.

[Kontrollergebnisse: $I_1(\frac{1}{2}) = 1$, $I_2(1) = 6$, $I_3(\pi) = \frac{1}{2\pi}$, $I_4(\ln 2) = 1$, $I_5(1) = 10$.]

Beispielaufgabe 2: Lorentz-Darstellung der Dirac-δ-Funktion [4]
Punkte: [4](M).

Erläutern Sie, warum die untenstehende Lorentz-Peakfunktion $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^\epsilon(x_\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\delta^\epsilon(0)$, $x_\mathrm{b} > 0$) und (iii) das Gewicht des Lorentz-Peaks. Wie verhalten sich diese Größen für $\epsilon \to 0^+$? Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \delta^\epsilon(x')$ und (v) $\delta'^\epsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^\epsilon(x)$. Skizzieren Sie Θ^ϵ, $\epsilon\delta^\epsilon$ und $\epsilon^2\delta'^\epsilon$ als Funktionen von x/ϵ in drei getrennten Skizzen (eine unter der anderen, mit y-Achsen in einer Linie und gleich skalierten x/ϵ-Achsen).

Lorentz-Peak: $\delta^\epsilon(x) = \dfrac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}\,.$

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $x = \epsilon \tan y$.
Anmerkung: Lorentz-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: das Energiespektrum eines diskreten Quantenzustands, der schwach an eine Umgebung gekoppelt ist, hat die Form eines Lorentz-Peaks, dessen Breite durch die Kopplungstärke an die Umgebung bestimmt wird. Geht die Kopplungstärke nach Null, ergibt sich ein δ-Peak.

Beispielaufgabe 3: Reihendarstellung von hyperbolischen Funktionen [3]
Punkte: [3](E).

Berechnen Sie die folgenden Reihen für $y \in \mathbb{R}^+$, indem Sie jede als geometrische Reihe in $\omega \equiv \mathrm{e}^{-y}$ ausdrücken.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y(n+1/2)}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-y(n+1/2)}$, (c) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-y|n|}$.

Beispielaufgabe 4: Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion [2]
Punkte: [2](M).

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, gegeben durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L} \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x} \tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L zu wählen? Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$, sowie die Summe der $n = 1$ und $n = -1$ Terme der Fourier-Reihe (d.h. der erste Term der entsprechenden Sinus-Reihe). [Kontrollergebnis: $\tilde{f}_6 = \frac{1}{3}\mathrm{i}\pi$.]

Beispielaufgabe 5: Parseval-Identität und Faltung [7]
Punkte: (a)[3](M); (b)[2](M); (c)[2](M).

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. In der Fourier-Darstellung $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tilde{f}_n$ lauten die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_0 = 0$, $\tilde{f}_{n \neq 0} = 2\pi\mathrm{i}(-1)^n/n$. (Siehe Beispielaufgabe 4.) Sei $g(x) = \sin x$.

(a) Überprüfen Sie an diesem konkreten Beispiel, dass die Parseval-Identität gilt, indem Sie sowohl das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, \overline{f}(x)\, g(x)$ als auch die Summe $(1/2\pi) \sum_n \overline{\tilde{f}}_n \tilde{g}_n$ explizit berechnen.

(b) Beweisen Sie die berühmte Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, indem Sie das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f^2(x)$ einerseits direkt berechnen und andererseits mittels der Parseval-Identität durch eine Summe über Fourier-Moden ausdrücken.

(c) Berechnen Sie die Faltung $(f * g)(x)$ sowohl durch direkte Berechnung des Faltungsintegrals als auch mittels des Faltungstheorems und der Summation von Fourier-Koeffizienten.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 19]

Hausaufgabe 1: Integrale mit δ-Funktion [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](M); (d)[1](M); (e)[1](A); (f)[0.5](E).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

(a) $I_1(a) = \int_1^4 \mathrm{d}x\, \delta(x-2)\,(a^x+3)$

(b) $I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(x^1+x^2)^2\, \mathrm{e}^{3-x^1}\,,$ mit $\mathbf{y} = (3, a)^T$

(c) $I_3(a) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{2+2x}\;\delta(ax-2)\,,$ mit $a \neq 0$

(d) $I_4(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(3^{-x}-9)(1-x^a)$

(e) $I_5(n) = \int_{-\pi/2}^{9\pi/2} \mathrm{d}x\, \cos(nx)\; \delta(\sin x)$

(f) $I_6(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\|\mathbf{x}\|^2}$, mit $\mathbf{y} = (a, -a)^T$

[Kontrollergebnisse: $I_1(3) = 12$, $I_2(-5) = 4$, $I_3(2) = \frac{1}{2}$, $I_4(3) = \frac{1}{\ln 3}$, $I_5(7) = 1$, $I_6(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathrm{e}$.]

Hausaufgabe 2: Darstellungen der Dirac-δ-Funktion [4]
Punkte: [4](M).

Erläutern Sie, warum die untenstehende Funktion $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^\epsilon(x_\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\delta^\epsilon(0)$, $x_\mathrm{b} > 0$) und (iii) das Gewicht des Peaks, und diskutieren Sie deren Verhalten im Limes $\epsilon \to 0^+$. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^\epsilon(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{d}x' \delta^\epsilon(x')$ und (v) $\delta'^\epsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^\epsilon(x)$. Skizzieren Sie Θ^ϵ, $\epsilon\delta^\epsilon$ und $\epsilon^2\delta'^\epsilon$ als Funktionen von x/ϵ in drei getrennten Skizzen (eine unter der anderen, mit y-Achsen in einer Linie und gleich skalierten x/ϵ-Achsen).

Ableitung der Fermi-Funktion: $\delta^\epsilon(x) = \dfrac{1}{4\epsilon} \dfrac{1}{\cosh^2[x/(2\epsilon)]}\,.$

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $y = \tanh[x/(2\epsilon)]$.
Anmerkung: In der Festkörperphysik und der Kernphysik spielt die Funktion $\delta^\epsilon(x)$ eine wichtige Rolle: sie erscheint als Ableitung der sogenannten **Fermi-Funktion**, $f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{E/k_\mathrm{B}T}+1} = \Theta^{k_\mathrm{B}T}(-E)$, mit $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E} f(E) = \delta^{k_\mathrm{B}T}(E)$, wobei $f(E)$ die Besetzungswahrscheinlichkeit eines fermionischer Einteilchenzustands mit Energie E als Funktion der Temperatur T des Systems angibt (k_B ist die sogenannte Boltzmann-Konstante). Im Limes Temperatur $\to 0$ entspricht die Ableitung der Fermi-Funktion somit einer δ-Funktion.

Hausaufgabe 3: Reihendarstellung der periodischen δ-Funktion [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[1.5](A); (d)[0.5](E); (e)[1](A); (f)[0.5](E); (g)[0.5](E)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta^\epsilon(x)$, definiert durch

$$\delta^\epsilon(x) = \frac{1}{L} \sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \epsilon|k|}\,, \quad k = 2\pi n/L, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \quad x, \epsilon, L \in \mathbb{R}\,, \quad 0 < \epsilon \ll L\,, \tag{1}$$

folgende Eigenschaften hat:

(a) $\delta^\epsilon(x) = \delta^\epsilon(x+L)$. (2)

(b) $\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \delta^\epsilon(x) = 1$. *Hinweis:* $k=0$ und $k \neq 0$ getrennt behandeln in $\sum_k$. (3)

(c) $$\delta^\epsilon(x) = \frac{1}{2L}\left[\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right] = \frac{1}{L}\frac{1-\mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L}}{1+\mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L} - 2\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon/L}\cos(2\pi x/L)}\ , \tag{4}$$

wobei $w = \mathrm{e}^{2\pi(\mathrm{i}x-\epsilon)/L}$ und $\overline{w} = \mathrm{e}^{2\pi(-\mathrm{i}x-\epsilon)/L}$.
Hinweis: Drücken Sie hierfür die Summe in Gl. (1) durch geometrische Reihen in Potenzen von w und $\overline{w}$ aus.

(d) $\lim_{\epsilon\to 0} \delta^\epsilon(x) = 0$ für $x \neq mL$, mit $m \in \mathbb{Z}$. *Hinweis:* Gehen Sie von Gl. (4) aus.

(e) $\delta^\epsilon(x) \simeq \dfrac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + x^2}$ für $|x|/L \ll 1$ und $\epsilon/L \ll 1$.

Hinweis: Taylor-entwickeln Sie hierfür den Zähler in Gl. (4) bis zur 1. Ordnung in $\tilde{\epsilon} = 2\pi\epsilon/L$, und den Nenner bis zur 2. Ordnung in $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{x} = 2\pi x/L$.

(f) Skizzieren Sie die Funktion $\delta^\epsilon(x)$ qualitativ für $\epsilon/L \ll 1$ und $x \in [-\frac{7}{2}L, \frac{7}{2}L]$.

(g) Folgern Sie, dass $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \to 0$ eine periodische δ-Funktion darstellt, mit

$$\delta^0(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - mL)\ .$$

Hausaufgabe 4: Fourier-Reihen [4]
Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen für folgende periodische Funktionen, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen? Skizzieren Sie zunächst die Funktionen.

(a) $f(x) = |\sin x|$, (b) $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{für} \quad -\pi \le x < 0\,, \\ 2x & \text{für} \quad 0 \le x < \pi\,, \end{cases}$ und $f(x+2\pi) = f(x)$.

[Kontrollergebnisse: (a) $\tilde{f}_3 = -\frac{2}{35}$, (b) $\tilde{f}_3 = \frac{2}{9}(2 - 9\mathrm{i}\pi)$.]

Hausaufgabe 5: Berechnung einer unendlichen Reihe mittels dem Faltungstheorem [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[2](A,Bonus)

Diese Aufgabe illustriert, wie sich eine komplizierte Summe mittels Faltungstheorem explizit berechnen lässt.
Betrachten Sie die Funktion $f_\gamma(t) = f_\gamma(0)\mathrm{e}^{\gamma t}$ für $t \in [0, \tau)$ und $f(t+\tau) = f(t)$ mit $f_\gamma(0) = 1/(\mathrm{e}^{\gamma\tau} - 1)$. Dabei seien γ und τ positiv, sodass $f_{\pm\gamma}(0) \gtrless 0$.

(a) Betrachten Sie eine Fourier-Reihendarstellung von $f_\gamma(t)$ mit folgender Form:

$$f_\gamma(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{\omega_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\tilde{f}_{\gamma,n}, \qquad \tilde{f}_{\gamma,n} = \int_0^\tau dt \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} f_\gamma(t), \quad \text{mit} \quad \omega_n = 2\pi n/\tau, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_{\gamma,n} = 1/(\mathrm{i}\omega_n + \gamma)$ gegeben sind.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis und das Faltungstheorem um folgende Reihe als Faltungsintegral von f_γ und $f_{-\gamma}$ auszudrücken:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}}{\omega_n^2 + \gamma^2} = -\tau \int_0^\tau dt' f_\gamma\left(t - t'\right) f_{-\gamma}\left(t'\right) . \tag{5}$$

(c) Skizzieren Sie die im Faltungsintegral (5) vorkommenden Funktionen $f_\gamma(t - t')$ und $f_{-\gamma}(t')$ als Funktionen von t', für $t' \in [-\tau, 2\tau]$. Zeigen Sie, für $0 \leq t \leq \tau$, dass das Faltungsintegral (5) durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$S(t) = \frac{\tau\big[\sinh\left(\gamma\left(t-\tau\right)\right) - \sinh\left(\gamma t\right)\big]}{2\gamma\big[1 - \cosh\left(\gamma\tau\right)\big]} .$$

Hinweis: Das Integral $\int_0^\tau \mathrm{d}t'$ enthält einen Bereich, in dem $t - t'$ außerhalb von $[0, \tau)$ liegt. Deswegen empfiehlt es sich, das Integral in zwei Teile aufzuteilen, mit $\int_0^t \mathrm{d}t'$ und $\int_t^\tau \mathrm{d}t'$.

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 18]
