https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 07: Matrizen II: Inverse, Basistransformation

Ausgabe: Mo 29.11.21 Zentralübung: Do 02.12.21 Abgabe: Do 09.12.21, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 4, 6.
Videos existieren für Beispielaufgaben 1 (L5.4.1), 5 (V2.5.1). Siehe auch Tutorvideos zu "Basistransformationen".

Beispielaufgabe 1: Gauß-Algorithmus und Matrix-Inversion [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M); (c)[1](M); (d)[1](M)

Der Gauß-Algorithmus ist ein nützliches Standardverfahren, um ein lineares Gleichungssystem der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zu lösen. Betrachten wir beispielsweise das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A^1{}_1\, x^1 + A^1{}_2\, x^2 + A^1{}_3\, x^3 &= b^1\,, \\ A^2{}_1\, x^1 + A^2{}_2\, x^2 + A^2{}_3\, x^3 &= b^2\,, \\ A^3{}_1\, x^1 + A^3{}_2\, x^2 + A^3{}_3\, x^3 &= b^3\,. \end{aligned}$$

Dieses System kann durch eine Folge von Umformungsschritten gelöst werden, wobei in jedem Schritt eine Zeile durch eine Linearkombination von Zeilen ersetzt wird, welche so gewählt wird, dass das System schließlich folgende Form annimmt,

$$\begin{aligned} 1\, x^1 + 0\, x^2 + 0\, x^3 &= c^1\,, \\ 0\, x^1 + 1\, x^2 + 0\, x^3 &= c^2\,, \\ 0\, x^1 + 0\, x^2 + 1\, x^3 &= c^3\,. \end{aligned}$$

Die Lösung kann dann von der rechten Seite abgelesen werden, $(x^1, x^2, x^3)^T = (c^1, c^2, c^3)^T$.

Bei diesen Umformungen kann man Zeit und Tinte sparen, indem man darauf verzichtet, die x^i's jedes Mal hinzuschreiben. Stattdessen genügt es, das lineare Gleichungssystem durch eine erweiterte Matrix darzustellen, welche die Koeffizienten in Matrix-Form enthält, mit einer vertikalen Linie statt der Gleichheitszeichen. Diese erweiterte Matrix muss dann in einer Folge von Schritten umgeformt werden, wobei in jedem Schritt eine Zeile durch eine Linearkombination von Zeilen ersetzt wird, welche so gewählt wird, dass die linke Seite schließlich die Form einer Einheitsmatrix annimmt. Die rechte Spalte enthält dann die gewünschte Lösung für $(x^1, x^2, x^3)^T$.

$$\begin{array}{ccc|c} x^1 & x^2 & x^3 & \\ \hline A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 & b^1 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 & b^2 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 & b^3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x^1 & x^2 & x^3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & c^1 \\ 0 & 1 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 1 & c^3 \end{array}$$

Der Gauß-Algorithmus ist auch nützlich für die Matrixinversion. Die Inverse von A hat die Form $A^{-1} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, wobei die $j$te Spalte die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j$

ist. Die Berechnung aller n Vektoren $\mathbf{a}_j$ kann simultan durchgeführt werden, indem eine erweiterte Matrix mit n Spalten auf der rechten Seite aufgestellt wird, wovon jede ein $\mathbf{e}_j$ enthält. Wird die erweiterte Matrix so umgeformt, dass die linke Seite die Einheitsmatrix ist, enthalten die Spalten der rechten Seite die gewünschten Vektoren $\mathbf{a}_j$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 & 1 & 0 & 0 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 & 0 & 1 & 0 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ 0 & 1 & 0 & a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ 0 & 0 & 1 & a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x^1 & + & 2x^2 & - & x^3 & = & 1, \\ 2x^1 & - & 2x^2 & + & 4x^3 & = & -2, \\ -x^1 & + & \frac{1}{2}x^2 & - & x^3 & = & 0. \end{array}$$

[Kontrollergebnis: der Betrag von $\mathbf{x}$ ist $\|\mathbf{x}\| = 3$.]

(b) Wie lautet die Lösung des Gleichungssystems, wenn man die unterste Gleichung herausnimmt?

(c) Und wenn man die unterste Gleichung durch $-x^1 + \frac{2}{7}x^2 - x^3 = 0$ ersetzt?

(d) Das Gleichungssystem aus (a) kann man auch in die Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bringen. Berechnen Sie das Inverse A^{-1} der 3×3 Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, und verifizieren Sie mittels $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ Ihr Ergebnis aus (a).

Beispielaufgabe 2: Zwei-dimensionale Rotationsmatrizen [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Eine Rotation in zwei Dimensionen ist eine lineare Abbildung, $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Vektor um einen vorgegebenen Winkel um den Ursprung dreht, ohne seine Länge zu ändern.

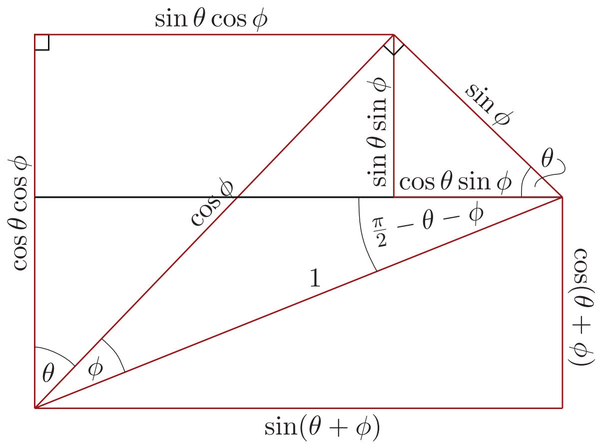
(a) R_θ sei die (2×2)-dimensionale Rotationsmatrix welche eine Drehung mit dem Winkel θ beschreibt, definiert durch $\mathbf{e}_j \xrightarrow{R_\theta} \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_i (R_\theta)^i{}_j$. Bestimmen Sie R_θ wie folgt: Machen Sie eine Skizze, die die Wirkung, $\mathbf{e}_j \overset{R_\theta}{\longmapsto} \mathbf{e}'_j$, der Rotation auf die beiden Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2)$ veranschaulicht (z.B. für $\theta = \frac{\pi}{6}$). Die Bildvektoren $\mathbf{e}'_j$ der Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ liefern die Spalten der Matrix R_θ.

(b) Geben Sie die Matrix R_{θ_i} für die Winkel $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/2$ und $\theta_4 = \pi$ an. Berechnen Sie die Wirkung der R_{θ_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf $\mathbf{a} = (1, 0)^T$ und $\mathbf{b} = (0, 1)^T$ und veranschaulichen Sie diese in einer Skizze.

(c) Die Verknüpfung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$. *Hinweis:* Nutzen Sie die 'Additionstheoreme'

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\,,$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi\,.$$

Anmerkung: Ein geometrischer Beweis dieser Theoreme (hier nicht verlangt) erfolgt mittels der Skizze durch Betrachtung der drei rechtwinkligen Dreiecke mit Diagonalen der Seitenlängen 1, $\cos\phi$ und $\sin\phi$.



(d) Zeigen Sie, dass die Drehung eines beliebigen Vektors $\mathbf{r} = (x,y)^T$ um den Winkel θ seine Länge nicht ändert, also dass $R_\theta\mathbf{r}$ den gleichen Betrag hat wie $\mathbf{r}$.

Beispielaufgabe 3: Basistransformation und lineare Abbildung in $\mathbb{E}^2$ [4]

Punkte: (a)[0.5](M); (b)[0.5](M); (c)[0.5](E); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M); (g)[0.5](E); (h)[0.5](E)

Anmerkung zur Notation: In dieser Aufgabe werden Vektoren im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^2$ durch Hütchen gekennzeichnet (z.B. $\hat{\mathbf{v}}_j$, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}^2$). Die Komponenten dieser Vektoren bezüglich einer gegebenen Basis sind Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und tragen keine Hütchen (z.B. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$).

Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{E}^2$ habe zwei Basen, eine alte, $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$, und eine neue, $\{\hat{\mathbf{v}}'_i\}$, mit

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \tfrac{3}{4}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \tfrac{1}{3}\hat{\mathbf{v}}'_2\,, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = -\tfrac{1}{8}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{v}}'_2\,.$$

(a) Die Relation $\hat{\mathbf{v}}_j = \hat{\mathbf{v}}'_i T^i{}_j$ drückt die alte durch die neue Basis aus. Finden Sie die Transformationsmatrix $T = \{T^i{}_j\}$. [Kontrollergebnis: $\sum_j T^1{}_j = \frac{5}{8}$.]

(b) Finden Sie die Matrix T^{-1}, und drücken Sie mittels der Rücktransformation $\hat{\mathbf{v}}'_i = \hat{\mathbf{v}}_j (T^{-1})^j{}_i$ die neue durch die alte Basis aus. [Kontrollergebnis: $\hat{\mathbf{v}}'_1 - 4\hat{\mathbf{v}}'_2 = -8\hat{\mathbf{v}}_2$.]

(c) Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ habe Komponenten $\mathbf{x} = (1,2)^T$ in der alten Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{x}'$ in der neuen Basis? [Kontrollergebnis: $\sum_i x'^i = \frac{11}{6}$.]

(d) Der Vektor $\hat{\mathbf{y}}$ habe Komponenten $\mathbf{y}' = (\frac{3}{4}, \frac{1}{3})^T$ in der neuen Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{y}$ in der alten Basis? [Kontrollergebnis: $\sum_j y^j = 1$.]

(e) Die lineare Abbildung $\hat{A}$ sei definiert durch $\hat{\mathbf{v}}'_1 \overset{\hat{A}}{\mapsto} 2\hat{\mathbf{v}}'_1$ und $\hat{\mathbf{v}}'_2 \overset{\hat{A}}{\mapsto} \hat{\mathbf{v}}'_2$. Finden Sie zunächst ihre Matrixdarstellung A' in der neuen Basis, und dann mittels einer Basistransformation ihre Matrixdarstellung A in der alten Basis. [Kontrollergebnis: $(A)^2{}_1 = -\frac{3}{5}$.]

(f) $\hat{\mathbf{z}}$ sei der Bildvektor, auf den $\hat{A}$ den Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ abbildet: $\hat{A} : \hat{\mathbf{x}} \mapsto \hat{\mathbf{z}}$. Finden Sie mittels A' seine Komponenten $\mathbf{z}'$ bezüglich der neuen Basis, und mittels A seine Komponenten $\mathbf{z}$ bezüglich der alten Basis. Sind Ihre Ergebnisse für $\mathbf{z}'$ und $\mathbf{z}$ konsistent? [Kontrollergebnis: $\mathbf{z}' = (1, \frac{4}{3})^T$.]

(g) Wählen Sie nun für die alte Basis $\hat{\mathbf{v}}_1 = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{3}{2}\hat{\mathbf{e}}_2$, wobei $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0)^T$ und $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1)^T$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{E}^2$ sind. Wie lauten $\hat{\mathbf{v}}'_1$, $\hat{\mathbf{v}}'_2$, $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ in der Standardbasis von $\mathbb{E}^2$? [Kontrollergebnis: $\|\hat{\mathbf{v}}'_1\| = 4$, $\|\hat{\mathbf{v}}'_2\| = 3$, $\|\hat{\mathbf{x}}\| = 2\sqrt{5}$, $\|\hat{\mathbf{z}}\| = 4\sqrt{2}$.]

(h) Machen Sie eine Skizze (mit $\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{e}}_2$ als Einheitsvektoren in die horizontale bzw. vertikale Richtung), die die alten und neuen Basisvektoren zeigt, sowie die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$. Sind die in (c) und (f) diskutierten Koordinaten dieser Vektoren bezüglich beider Basen mit Ihrer Skizze konsistent?

Beispielaufgabe 4: Berechnung von Determinanten [2]
Punkte: [2](E)

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen durch Entwickeln nach einer beliebigen Zeile oder Spalte. *Hinweis*: je mehr Nullen die Zeile oder Spalte enthält, je einfacher die Rechnung.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & a & a & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ a & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

[Kontrollergebnis: für $a = 1$, $b = 2$ gilt $\det C = -4$.]

Beispielaufgabe 5: Jacobi-Determinante für Zylinderkoordinaten [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](E).

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)}$, für die Transformation, welche kartesische durch Zylinderkoordinaten ausdrückt.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J^{-1} = \frac{\partial(\rho,\phi,z)}{\partial(x,y,z)}$ für die Rücktransformation, welche Zylinder- durch kartesischen Koordinaten ausdrückt [Ergebniskontrolle: Überprüfen Sie, dass $JJ^{-1} = \mathbb{1}$.]

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Determinanten $\det(J)$ und $\det(J^{-1})$. [Ergebniskontrolle: ist ihr Produkt gleich 1?]

Beispielaufgabe 6: Dreifach-Gauß-Integral per Variablentransformation [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie folgendes dreifach-Gauß-Integral (mit $a, b, c > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\left[a^2(x+y)^2 + b^2(z-y)^2 + c^2(x-z)^2\right]}.$$

Hinweise: Nutzen Sie dazu die Variablentransformation $u = a(x+y)$, $v = b(z-y)$, $w = c(x-z)$ und berechnen Sie die Jacobi-Determinante mittels $J = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1}$. Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
[Kontrollergebnis: für $a = b = c = \sqrt{\pi}$ gilt $I = \frac{1}{2}$.]

Beispielaufgabe 7: Variablentransformation für zweidimensionales Integral [Bonus]
Punkte: (a)[1](E,Bonus); (b)[1](M,Bonus); (c)[1](M,Bonus).

(a) Betrachten Sie die Variablentransformation $x = \frac{1}{2}(X+Y)$, $y = \frac{1}{2}(X-Y)$. Invertieren Sie diese, um $X(x,y)$ und $Y(x,y)$ zu finden. Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}$ und $J^{-1} = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$, sowie ihre Determinanten. [Ergebniskontrolle: Überprüfen Sie, dass $JJ^{-1} = \mathbb{1}$ und $(\det J)(\det J^{-1}) = 1$.]

Verwenden Sie die Transformation aus (a), um die folgenden Integrale als $\int \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$ zu berechnen:

(b) $I_1 = \int_Q \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, integriert über das Quadrat $Q = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

(c) $I_2(n) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, |x-y|^n$, integriert über das Dreieck $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$. [Ergebniskontrolle: $I_2(1) = \frac{1}{6}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 18]

Hausaufgabe 1: Gauß-Algorithmus und Matrix-Inversion [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 8-3a & 2-6a & 2 \\ 2-6a & 5 & -4+6a \\ 2 & -4+6a & 5+3a \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{3}$ die inverse Matrix A^{-1} mittels des Gauß-Algorithmus. (*Anmerkung:* Es empfiehlt sich, das Auftreten von Brüchen möglichst so lange zu vermeiden, bis die linke Seite in 'Zeilen-Stufen-Form' gebracht worden ist.) Nutzen Sie das Ergebnis, um die Lösung $\mathbf{x}$ für $\mathbf{b} = (4,1,1)^T$ zu ermitteln. [Kontrollergebnis: der Betrag von $\mathbf{x}$ ist $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{117}/18$.]

(b) Für welche Werte von a ist die Matrix A *nicht* invertierbar?

(c) Falls A invertierbar ist, hat das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung, nämlich $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Falls A nicht invertierbar ist, ist die Lösung entweder nicht eindeutig, oder es existiert gar keine Lösung – welcher dieser beiden Fälle auftritt, hängt von $\mathbf{b}$ ab. Entscheiden Sie dies für $\mathbf{b} = (4,1,1)^T$ und die in (b) gefundenden Werte von a, und bestimmen Sie $\mathbf{x}$, falls möglich.

Hausaufgabe 2: Drehmatrizen in 3 Dimensionen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[0,5]; (e)[0,5](E); (f)[2](Bonus,A)

Rotationen in drei Dimensionen werden durch (3×3)-dimensionale Matrizen dargestellt. $R_\theta(\mathbf{n})$ sei die Drehmatrix, die eine Drehung mit dem Winkel θ um eine Drehachse beschreibt, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ gegeben ist. Ihre Elemente sind definiert durch $\mathbf{e}_j \overset{R_\theta(\mathbf{n})}{\longrightarrow} \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_l (R_\theta(\mathbf{n}))^l{}_j$.

(a) Finden Sie die drei Drehmatrizen $R_\theta(\mathbf{e}_i)$ für Drehungen um die drei kartesischen Koordinatenachsen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$, indem Sie wie folgt vorgehen: Veranschaulichen Sie mittels drei Skizzen, je eine für $i = 1,2,3$, die Wirkung, $\mathbf{e}_j \overset{R_\theta(\mathbf{e}_i)}{\longrightarrow} \mathbf{e}'_j$, der Rotation um die i-Achse auf die drei Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ $(j = 1,2,3)$ (z.B. für $\theta = \frac{\pi}{6}$). Die Bildvektoren $\mathbf{e}'_j$ der Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ liefern die Spalten von $R_\theta(\mathbf{e}_i)$.

(b) Es kann gezeigt werden, dass für eine allgemeine Richtung $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ der Drehachse die Matrixelemente der Drehmatrix wie folgt lauten:

$$(R_\theta(\mathbf{n}))^i{}_j = \delta_{ij}\cos\theta + n_i n_j(1-\cos\theta) - \epsilon_{ijk}\, n_k \sin\theta \qquad (\epsilon_{ijk} = \text{Levi-Civita-Symbol})\,.$$

Finden Sie mittels dieser Formel die drei Drehmatrizen $R_\theta(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1,2,3)$. Sind Ihre Ergebnisse konsistent mit denen aus (a)?

(c) Bestimmen Sie folgende Drehmatrizen explizit, und berechnen und skizzieren Sie deren Wirkung auf den Vektor $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$:

(i) $A = R_\pi(\mathbf{e}_3)$, (ii) $B = R_{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1))$.

(d) Rotationsmatrizen bilden eine Gruppe. Zeigen Sie anhand von A und B aus (c), dass diese Gruppe nicht kommutativ ist (im Gegensatz zum zwei-dimensionalen Fall!).

(e) Zeigen Sie, dass für die allgemeine Drehmatrix R die Beziehung $\mathrm{Tr}(R) = 1 + 2\cos\theta$ gilt, wobei die 'Spur' (Englisch: 'Trace') einer Matrix R definiert ist durch $\mathrm{Tr}(R) = \sum_i (R)^i{}_i$.

(f) Das Produkt zweier Rotationsmatrizen liefert wieder eine Rotationsmatrix. Bestimmen Sie für das Produkt $C = AB$ der Matrizen aus (c) den zugehörigen Einheitsvektor $\mathbf{n}$ und Drehwinkel θ. *Hinweis:* diese sind nur bis auf ein beliebiges Vorzeichen eindeutig bestimmt, denn $R_\theta(\mathbf{n})$ und $R_{-\theta}(-\mathbf{n})$ beschreiben dieselbe Rotation. (Um das Vorzeichen konkretheitshalber festzulegen, wählen Sie die Komponente n_2 positiv.) $|\theta|$ und $|n_i|$ werden durch die Spur bzw. die Diagonalelemente der Drehmatrix festgelegt; ihre relativen Vorzeichen durch die Nicht-Diagonalelemente. [Kontrollergebnis: $n_2 = 1/\sqrt{3}$.]

Hausaufgabe 3: Basistransformation und lineare Abbildung in $\mathbb{E}^2$ [4]

Punkte: (a)[0.5](M); (b)[0.5](M); (c)[0.5](E); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M); (g)[0.5](E); (h)[0.5](E)

Anmerkung zur Notation: In dieser Aufgabe werden Vektoren im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^2$ durch Hütchen gekennzeichnet (z.B. $\hat{\mathbf{v}}_j$, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}^2$). Die Komponten dieser Vektoren bezüglich einer gegebenen Basis sind Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und tragen keine Hütchen (z.B. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$).

Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{E}^2$ habe zwei Basen, eine alte, $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$, und eine neue, $\{\hat{\mathbf{v}}'_i\}$, mit

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \tfrac{1}{5}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \tfrac{3}{5}\hat{\mathbf{v}}'_2\,, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = -\tfrac{6}{5}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \tfrac{2}{5}\hat{\mathbf{v}}'_2\,.$$

(a) Die Relation $\hat{\mathbf{v}}_j = \hat{\mathbf{v}}'_i T^i{}_j$ drückt die alte durch die neue Basis aus. Finden Sie die Transformationsmatrix $T = \{T^i{}_j\}$. [Kontrollergebnis: $\sum_j T^2{}_j = 1$.]

(b) Finden Sie die Matrix T^{-1}, und drücken Sie mittels der Rücktransformation $\hat{\mathbf{v}}'_i = \hat{\mathbf{v}}_j (T^{-1})^j{}_i$ die neue durch die alte Basis aus. [Kontrollergebnis: $\hat{\mathbf{v}}'_1 + 3\hat{\mathbf{v}}'_2 = 5\hat{\mathbf{v}}_1$.]

(c) Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ habe Komponenten $\mathbf{x} = (2, -\frac{1}{2})^T$ in der alten Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{x}'$ in der neuen Basis? [Kontrollergebnis: $\sum_i x'^i = 2$.]

(d) Der Vektor $\hat{\mathbf{y}}$ habe Komponenten $\mathbf{y}' = (-3, 1)^T$ in der neuen Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{y}$ in der alten Basis? [Kontrollergebnis: $\sum_j y^j = \frac{5}{2}$.]

(e) Die lineare Abbildung $\hat{A}$ sei definiert durch $\hat{\mathbf{v}}_1 \overset{\hat{A}}{\mapsto} \frac{1}{3}(\hat{\mathbf{v}}_1 - 2\hat{\mathbf{v}}_2)$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 \overset{\hat{A}}{\mapsto} -\frac{1}{3}(4\hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2)$. Finden Sie zunächst ihre Matrixdarstellung A in der alten Basis, und dann mittels einer Basistransformation ihre Matrixdarstellung A' in der neuen Basis. [Kontrollergebnis: $(A')^2{}_1 = \frac{2}{3}$.]

(f) $\hat{\mathbf{z}}$ sei der Bildvektor, auf den $\hat{A}$ den Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ abbildet: $\hat{\mathbf{x}} \overset{\hat{A}}{\mapsto} \hat{\mathbf{z}}$. Finden Sie mittels A seine Komponenten $\mathbf{z}$ bezüglich der alten Basis, und mittels A' seine Komponenten $\mathbf{z}'$ bezüglich der neuen Basis. Sind Ihre Ergebnisse für $\mathbf{z}$ und $\mathbf{z}'$ konsistent? [Kontrollergebnis: $\mathbf{z}' = \frac{1}{3}(5,1)^T$.]

(g) Wählen Sie nun für die alte Basis $\hat{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 = 2\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$, wobei $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0)^T$ und $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1)^T$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{E}^2$ sind. Wie lauten $\hat{\mathbf{v}}'_1$, $\hat{\mathbf{v}}'_2$, $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ in der Standardbasis von $\mathbb{E}^2$? [Kontrollergebnis: $\|\hat{\mathbf{v}}'_1\| = \frac{\sqrt{41}}{4}$, $\|\hat{\mathbf{v}}'_2\| = \frac{\sqrt{89}}{4}$, $\|\hat{\mathbf{x}}\| = \|\hat{\mathbf{z}}\| = \frac{\sqrt{29}}{2}$.]

(h) Machen Sie eine Skizze (mit $\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{e}}_2$ als Einheitsvektoren in die horizontale bzw. vertikale Richtung), die die alten und neuen Basisvektoren zeigt, sowie die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$. Sind die in (c) und (f) diskutierten Koordinaten dieser Vektoren bezüglich beider Basen mit Ihrer Skizze konsistent?

Hausaufgabe 4: Berechnung von Determinanten [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1,5](E); (c)[1,5](E)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ d & 2 & 3 \\ 2 & 2 & e \end{pmatrix}$.

[Kontrollergebnis: für $c = 1$, $d = 3$, $e = 2$ gilt $\det C = -2$.]

(i) Welche Werte müssen c und d haben, damit $\det D = 0$ für alle Werte von e?

(ii) Welche Werte müssen d und e haben, damit $\det D = 0$ für alle Werte von c?

Hätten Sie die Ergebnisse von (i,ii) auch finden können, *ohne* $\det D$ explizit zu berechnen?

Betrachten Sie nun die zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \\ -2 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie das Produkt AB, sowie dessen Determinante $\det(AB)$ und Inverse $(AB)^{-1}$.

(c) Berechnen Sie das Produkt BA, sowie dessen Determinante $\det(BA)$ und Inverse $(BA)^{-1}$.

Ist es möglich, auch die Determinante und die Inverse von A und B zu berechnen?

Hausaufgabe 5: Jacobi-Determinante für Kugelkoordinaten [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](E).

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ für die Transformation von kartesischen zu Kugelkoordinaten.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J^{-1} = \frac{\partial(r,\theta,\phi)}{\partial(x,y,z)}$ für die Rücktransformation von Kugel- zu kartesischen Koordinaten. [Ergebniskontrolle: Überprüfen Sie, dass $JJ^{-1} = \mathbb{1}$.]

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Determinanten $\det(J)$ und $\det(J^{-1})$. [Ergebniskontrolle: ist ihr Produkt gleich 1?]

Hausaufgabe 6: Dreifach-Lorentz-Integral per Variablentransformation [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie folgendes dreifach-Lorentz-Integral (mit $a, b, c, d > 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

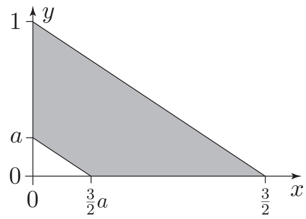
$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{1}{[(xd+y)^2+a^2]}\cdot\frac{1}{[(y+z-x)^2+b^2]}\cdot\frac{1}{[(y-z)^2+c^2]}\,.$$

Hinweise: Nutzen Sie die Variablentransformation $u = (xd+y)/a$, $v = (y+z-x)/b$, $w = (y-z)/c$ und berechnen Sie die Jacobi-Determinante mittels $J = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1}$. Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x(x^2+1)^{-1} = \pi$. [Kontrollergebnis: für $a = b = c = \pi$, $d = 2$, gilt $I = \frac{1}{5}$.]

Hausaufgabe 7: Variablentransformation für zweidimensionales Integral [Bonus]
Punkte: (a)[1](E,Bonus); (b)[1](M,Bonus).

(a) Betrachten Sie die Variablentransformation $x = \frac{3}{5}X + \frac{3}{5}Y$ und $y = \frac{3}{5}X - \frac{2}{5}Y$. Invertieren Sie diese, um $X(x,y)$ und $Y(x,y)$ zu finden. Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}$ und $J^{-1} = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$, sowie ihre Determinanten. [Ergebniskontrolle: Überprüfen Sie, dass $JJ^{-1} = \mathbb{1}$ und $(\det J)(\det J^{-1}) = 1$.]

(b) Berechnen Sie das Integral $I(a) = \int_{T_a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\cos\left[\pi(\frac{2}{3}x+y)^3\right](x-y)$ über das Trapez T_a, das durch die Geraden $x = 0$, $y = 1 - \frac{2}{3}x$, $y = 0$ und $y = a - \frac{2}{3}x$ eingeschlossen wird, mit $a \in (0,1)$. *Hinweis:* Drücken Sie $I(a)$ als ein Integral $\int \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$ aus, indem Sie die Transformation aus (a) verwenden.
[Ergebniskontrolle: $I(2^{-1/3}) = -\frac{1}{8\pi}$.]



[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 19]