Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2021/22
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Anxiang Ge, Nepomuk Ritz

https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 06: Felder II. Matrizen I

Ausgabe: Mo 22.11.21 Zentralübung: Do 25.11.21 Abgabe: Do 02.12.21, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 4, 5(bii), 1.
Videos existieren für Beispielaufgaben 1 (V3.4.1), 5 (V3.7.3).

Beispielaufgabe 1: Potential eines Vektorfeldes [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](E);(e)[1](M)

Gegeben sei ein Vektorfeld, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)^T$.

(a) Berechnen Sie das Linienintegral $I_1 = \int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$ von $\mathbf{0} = (0,0,0)^T$ bis $\mathbf{b} = (1,1,1)^T$, entlang des Weges $\gamma_1 = \{\mathbf{r}(t) = (t,t,t)^T \mid 0 < t < 1\}$.

(b) Hängt das Linienintegral von der Form des Weges ab?

(c) Berechnen Sie das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ des Vektorfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, mittels dem Linienintegral, $\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\gamma_\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$, entlang eines geeignet parametrisierten Weges $\gamma_\mathbf{r}$ von $\mathbf{0}$ nach $\mathbf{r} = (x,y,z)^T$.

(d) Konsistenzcheck: Überprüfen Sie explizit, dass Ihr Ergebnis für $\varphi(\mathbf{r})$ die Gleichung $\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ erfüllt.

(e) Berechnen Sie jetzt das Integral I_1 aus Aufgabenteil (a) über das Vektorfeld als Differenz des Potentials $\varphi(\mathbf{r})$ (der Stammfunktion!) an den Integrationsgrenzen $\mathbf{b}$ und $\mathbf{0}$. Konsistenzcheck: bekommen Sie dasselbe Ergebnis wie in Aufgabenteil (a)?

Beispielaufgabe 2: Divergenz [1]
Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Divergenz, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, des Vektorfelds $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2, z^3)^T$.
[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$ ist $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 6$.]

(b) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ sei ein konstanter Vektor und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \mapsto f(r)$ eine skalare Funktion von $r = \|\mathbf{r}\|$. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\mathbf{a} f(r)] = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r} f'(r).$$

Faustregel: $\boldsymbol{\nabla}$ angewendet auf $f(r)$ erzeugt $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ mal die Ableitung $f'(r)$.

Beispielaufgabe 3: Rotation [1]
Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Rotation, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, des Vektorfelds $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2, z^2)^T$.

[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (3,2,1)^T$ ist $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = (0,6,-3)^T$.]

(b) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ sei ein konstanter Vektor und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \mapsto f(r)$ eine skalare Funktion von $r = \|\mathbf{r}\|$. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{\nabla} \times [\mathbf{a} f(r)] = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{r} f'(r).$$

Faustregel: $\boldsymbol{\nabla}$ angewendet auf $f(r)$ erzeugt $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ mal die Ableitung $f'(r)$.

Beispielaufgabe 4: Rotation eines Gradientenfelds [1]
Punkte: [1](M)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei ein glattes Skalarfeld. Zeigen Sie, dass die Rotation des Gradienten verschwindet:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}.$$

Empfehlung: Nutzen Sie kartesische Koordinaten, für die kontra- und kovariante Komponenten gleich sind, $\partial^i = \partial_i$, und schreiben Sie alle Indizes unten.

Beispielaufgabe 5: Nabla-Identitäten [7]
Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M); (c)[3](E)

(a) Gegeben seien die Skalarfelder $f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{-x^2}$ und $g(x,y,z) = yz^{-1}$, sowie die Vektorfelder $\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{e}_x x^2 y$ und $\mathbf{w}(x,y,z) = (x^2 + y^3)\mathbf{e}_x$. Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} f$, $\boldsymbol{\nabla} g$, $\boldsymbol{\nabla}^2 f$, $\boldsymbol{\nabla}^2 g$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}$. [Kontrollergebnis: am Punkt $(x,y,z)^T = (1,1,1)^T$ gilt: $\boldsymbol{\nabla} f = (-2\mathrm{e}^{-1}, 0, \mathrm{e}^{-1})^T$, $\boldsymbol{\nabla} g = (0,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{2}{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\nabla}^2 g = 2$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 2$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w} = 2$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w} = -3\mathbf{e}_z$.]

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für *allgemeine* glatte Skalar- und Vektorfelder $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ und $\mathbf{u}(x,y,z)$, $\mathbf{w}(x,y,z)$. Stellen Sie $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ und $\boldsymbol{\nabla}$ *nicht* als Spaltenvektoren dar; nutzen Sie stattdessen Indexnotation. *Empfehlung:* Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

(i) $\boldsymbol{\nabla}(fg) = f(\boldsymbol{\nabla} g) + g(\boldsymbol{\nabla} f)$

(ii) $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$

(iii) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{u}) = f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)$

(c) Überprüfen Sie die Identitäten aus (b) explizit für die Felder aus (a).

[Kontrollergebnis: am Punkt $(x,y,z)^T = (1,-1,1)^T$ gilt: $\boldsymbol{\nabla}(fg) = \mathrm{e}^{-1}(2,1,0)^T$, $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = (-2,-3,0)^T$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{u}) = 0$.]

Beispielaufgabe 6: Linienintegral: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](M); (d)[1](E)

Diese Aufgabe illustriert, dass aus $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$ nicht notwendigerweise auch $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt.

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters hat die Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$ gilt, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis K mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\mathbf{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_R] = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg γ_R entlang den Kanten des Rechtecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)^T$, $(2, 0, 0)^T$, $(2, 3, 0)^T$ und $(1, 3, 0)^T$.

(d) Inwiefern sind die Ergebnisse aus (a) bis (c) miteinander konsistent? Erläutern Sie!

Beispielaufgabe 7: Vektorfelder skizzieren [Bonus]
Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus)

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder in zwei Dimensionen, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$:

(a) $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\cos y, 0)^T.$

(b) $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, -y)^T.$

Die Skizze sollte für einige ausgewählte Punkte $\mathbf{r}$ aus der Definitionsmenge der Vektorfeldabbildung (z.B. $\mathbf{u}$) die entsprechenden $\mathbf{u}(\mathbf{r})$-Vektoren aus der Bildmenge der Abbildung zeigen. Dazu wird für einen ausgewählten Punkt $\mathbf{r}$ ein Pfeil mit Mittelpunkt bei $\mathbf{r}$ gemalt, dessen Richtung und Länge den Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ darstellen. Für Vektoren, $\mathbf{r}$, aus der Definitionsmenge und Vektoren, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, aus der Bildmenge können *verschiedene* Längeneinheiten benutzt werden, um Pfeilüberlappungen zu vermeiden und somit die Übersichtlichkeit der Skizze zu verbessern (z.B. indem $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$-Einheitsvektoren kürzer gezeichnet werden als $\hat{\mathbf{r}}$-Einheitsvektoren). Für die visuelle Darstellung von Bildvektoren sind ohnehin meist nur deren Richtungen und *relativen* Längen von Interesse, nicht die absoluten Längen.

Beispielaufgabe 8: Matrixmultiplikation [2]
Punkte: [2](E)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

[Kontrollergebnis: die Summe aller Elemente der ersten Spalte folgender Matrixprodukte lautet: $\sum_i (PQ)^i{}_1 = 14$, $\sum_i (PR)^i{}_1 = 14$, $\sum_i (QR)^i{}_1 = 16$, $\sum_i (RP)^i{}_1 = 12$, $\sum_i (QQ)^i{}_1 = 16$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

Hausaufgabe 1: Linienintegral eines Vektorfeldes [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ des drei-dimensionalen Vektorfelds $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x\mathrm{e}^{yz}, y\mathrm{e}^{xz}, z\mathrm{e}^{xy})^T$ entlang der geraden Strecke γ vom Punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\mathbf{b} = b(1,2,1)^T$, mit $b \in \mathbb{R}$. [Kontrollergebnis: für $b^2 = \ln 2$ ist $W[\gamma] = 7/2$.] Hängt das Linienintegral vom Weg ab?

Hausaufgabe 2: Divergenz [1]
Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Divergenz, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, des Vektorfelds

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, z^2y^2, z^3y)^T.$$

[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$ ist $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 6$.]

(b) $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien konstante Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\nabla} \cdot [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Faustregel: $\boldsymbol{\nabla}$ 'vernichtet' das $\mathbf{r}$ so, dass ein sinnvolles Skalarprodukt übrig bleibt.

Hausaufgabe 3: Rotation [1]
Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Rotation, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, des Vektorfelds $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2z^2, xyz^3)^T$.
[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (3,2,1)^T$ ist $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = (-5,4,-3)^T$.]

(b) $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien konstante Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\nabla} \times [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Faustregel: $\boldsymbol{\nabla}$ 'vernichtet' das $\mathbf{r}$ so, dass ein sinnvolles Kreuzprodukt übrig bleibt.

Hausaufgabe 4: Ableitungen von Wirbelfeldern [1]
Punkte: (a)[1](M), (b)[0,5](M,Bonus), (c)[0,5](E,Bonus).

$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei ein glattes Vektorfeld. Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = 0$. (b) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}$.

Empfehlung: Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

(c) Prüfen Sie beide Identitäten für das Vektorfeld $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)^T$.

Hausaufgabe 5: Nabla-Identitäten [5]
Punkte: (a)[2](E); (bi,ii)[2](M); (biii)[0,5](M,Bonus); (ci,ii)[1](E); (ciii)[0,5](E,Bonus).

(a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(x,y,z) = y^{-1}\cos(z)$ und die Vektorfelder $\mathbf{u}(x,y,z) = (-y,x,z^2)^T$ und $\mathbf{w}(x,y,z) = (x,0,1)^T$. Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} f$, $\boldsymbol{\nabla}^2 f$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}$. [Kontrollergebnis: am Punkt $(x,y,z)^T = (1,1,0)^T$ gilt: $\boldsymbol{\nabla} f = -\mathbf{e}_y$, $\boldsymbol{\nabla}^2 f = 1$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 2\mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w} = 1$, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.]

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für *allgemeine* glatte Skalar- und Vektorfelder $f(x, y, z)$, $\mathbf{u}(x, y, z)$ und $\mathbf{w}(x, y, z)$. Stellen Sie $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ und $\boldsymbol{\nabla}$ *nicht* als Spaltenvektoren dar; nutzen Sie stattdessen Indexnotation. *Empfehlung:* Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

   (i) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w})$

   (ii) $\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{u}) = f\,(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} f)$

   (iii) $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{w} + \mathbf{u}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})$

(c) Überprüfen Sie die Idenditäten aus (b) explizit für die Felder aus (a).

   [Kontrollergebnis: am Punkt $(x, y, z)^T = (1, 1, 0)^T$ gilt: $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = 2$, $\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{u}) = (0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (0, 2, 0)^T$.]

Hausaufgabe 6: Linienintegral eines Vektorfelds auf einem nicht-einfachzusammenhängenden Definitionsbereich [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](A,Bonus)

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -yx^n \\ x^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welchen Wert des Exponenten n gilt $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$?

Benutzen Sie im Folgenden den in (a) gefundenen Wert von n.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \oint_{\gamma_K} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis K mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\mathbf{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Was ist der Wert des Linienintegrals $W[\gamma_D] = \oint_{\gamma_D} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg γ_D entlang den Kanten des Dreiecks mit Eckpunkten $(-1, -1, 0)^T$, $(1, -1, 0)^T$ und $(a, 1, 0)^T$, mit $a \in \mathbb{R}$? Skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von $a \in [-2, 2]$. *Hinweis:* Das Ergebnis kann ohne weitere Rechnung hingeschrieben werden, sollte aber begründet werden.

Hausaufgabe 7: Vektorfelder skizzieren [Bonus]
Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus)

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder in zwei Dimensionen, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$:

(a) $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\cos x, 0)^T.$

(b) $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}) = (2y, -x)^T.$

Hausaufgabe 8: Matrixmultiplikation [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Kontrollergebnis: die Summe aller Elemente der ersten Spalte folgender Matrixprodukte lautet: $\sum_i (PQ)^i{}_1 = 25$, $\sum_i (PR)^i{}_1 = -44$, $\sum_i (RQ)^i{}_1 = -5$, $\sum_i (RR)^i{}_1 = 8$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 15]
