https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 02: Vektorräume, Euklidische Geometrie

Lösung Optionale Aufgabe 1: Vektorraum der reellen Funktionen [2]

Wir müssen zeigen, dass die Vektorraumaxiome sind erfüllt sind. Erstens erfüllt $(F, \boldsymbol{+})$ in der Tat alle Eigenschaften eine abelsche Gruppe:

(i) Abgeschlossenheit: Die Summe zweier Funktionen aus F ist wieder in F. ✓

(ii,v) Kommutativität und Assoziativität folgen trivial aus den entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen. Z.B. Assoziativität:

$$\begin{aligned}\Big[f \boldsymbol{+} [g \boldsymbol{+} h]\Big](x) &= f(x) + [g \boldsymbol{+} h](x) = f(x) + \Big(g(x) + h(x)\Big) \\ &= \Big(f(x)+g(x)\Big)+h(x) = [f \boldsymbol{+} g](x) + h(x) = \Big[[f \boldsymbol{+} g] \boldsymbol{+} h\Big](x)\,. \checkmark\end{aligned}$$

(iii) Das neutrales Element ist die Nullfunktion f_{null}, definiert durch $f_{\text{null}} : x \mapsto f_{\text{null}}(x) \equiv 0$, denn $f \boldsymbol{+} f_{\text{null}} : x \mapsto f(x) + f_{\text{null}}(x) = f(x) + 0 = f(x)$. ✓

(iv) Das additive Inverse von f ist $-f$, definiert durch $-f : x \mapsto (-f)(x) \equiv -f(x)$, denn $f \boldsymbol{+} (-f) : x \mapsto f(x) + (-f(x)) = 0$. ✓

Auch die Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar in $(F, \boldsymbol{+}, \cdot)$ erfüllt alle für einen Vektorraum erforderlichen Eigenschaften. Abgeschlossenheit gilt per Definition. Ferner:

(vi) Multiplikation von einer Summe von Skalaren und einer Funktion ist distributiv:

$$\begin{aligned}\big[(\gamma+\lambda)\cdot f\big](x) &= (\gamma+\lambda)f(x) = \gamma f(x) + \lambda f(x) = \big[\gamma \cdot f\big](x) + \big[\lambda \cdot f\big](x) \\ &= \big[\gamma \cdot f \boldsymbol{+} \lambda \cdot f\big](x)\,. \checkmark\end{aligned}$$

(vii) Multiplikation von einem Skalar und einer Summe von Funktionen ist distributiv:

$$\begin{aligned}\big[\lambda \cdot (f+g)\big](x) &= \lambda\Big([f \boldsymbol{+} g](x)\Big) = \lambda\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \\ &= \big[\lambda \cdot f\big](x) + \big[\lambda \cdot g\big](x) = \big[\lambda \cdot f \boldsymbol{+} \lambda \cdot g\big](x)\,. \checkmark\end{aligned}$$

(viii) Multiplikation von einem Produkt von Skalaren und einer Funktion ist assoziativ:

$$\big[(\gamma\lambda)\cdot f\big](x) = (\gamma\lambda)f(x) = \gamma\Big(\lambda f(x)\Big) = \gamma\big[\lambda \cdot f\big](x) = \big[\gamma \cdot (\lambda \cdot f)\big](x)\,. \checkmark$$

(ix) Neutrales element: $\big[1 \cdot f\big](x) = 1f(x) = f(x)$. ✓

Folglich ist das Triple $(F, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösung Optionale Aufgabe 2: Vektorraum der Polynome von Grad n [3]

(a) Die Definition für Polynomaddition und die üblichen Additionsregeln in $\mathbb{R}$ liefern

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{a}}(x) + p_{\mathbf{b}}(x) &= a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots a_nx^n + b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots b_nx^n \\ &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \ldots (a_n + b_n)x^n = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(x) \ , \end{aligned}$$

denn $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0, \ldots, a_n + b_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Folglich gilt $\boxed{p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}}$. ✓

Die Definition für die Multiplikation eines Polynoms mit einem Skalar und die übliche Multiplikationsregeln in $\mathbb{R}$ liefern

$$cp_{\mathbf{a}}(x) = c(a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots a_nx^n) = ca_0x^0 + ca_1x^1 + \ldots ca_nx^n = p_{c\mathbf{a}}(x) \ ,$$

denn $c\mathbf{a} = (ca_0, \ldots, ca_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Folglich gilt $\boxed{c \boldsymbol{\cdot} p_{\mathbf{a}} = p_{c\mathbf{a}}}$. ✓

(b) Wir müssen zeigen, dass die Vektorraumaxiome sind erfüllt sind. Erstens erfüllt $(P_n, \boldsymbol{+})$ in der Tat alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe:

(i) Abgeschlossenheit: Die Summe zweier Polynome vom Grad n ist wieder ein Polynom und kann ebenfalls höchstens Grad n haben. ✓

(ii,v) Assoziativität und Kommutativität folgen trivial aus den entsprechenden Eigenschaften in $\mathbb{R}^{n+1}$. Zum Beispiel Assoziativität:

$$p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} (p_{\mathbf{b}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{c}}) = p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{b}+\mathbf{c}} = p_{\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})} = p_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{c}} = (p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{b}}) \boldsymbol{+} p_{\mathbf{c}}. \checkmark$$

(iii) Das neutrale Element ist das Nullpolynom $p_{\mathbf{0}}$, also ein Polynom bei dem alle Koeffizienten gleich 0 sind. ✓

(iv) Das additive Inverse von $p_{\mathbf{a}}$ ist $p_{-\mathbf{a}}$. ✓

Auch die Multiplikation eines Polynoms mit einem Skalar in $(P_n, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ erfüllt alle für einen Vektorraum erforderlichen Eigenschaften. Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, da $c \boldsymbol{\cdot} p_{\mathbf{a}} = p_{c\mathbf{a}}$ wieder ein Polynom vom Grad n ist. ✓ Alle weiteren Regeln für die Multiplikation mit einem Skalar folgen direkt aus den entsprechenden Regeln für $\mathbb{R}^{n+1}$. ✓

Jedes Element $p_{\mathbf{a}} \in P_n$ wird eindeutig durch das Element $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ identifiziert. Diese Identifikation ist eine Bijektion zwischen P_n und $\mathbb{R}^{n+1}$, folglich ist $(P_n, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ und hat Dimension $n + 1$. ✓

(c) Die Bijektion zwischen P_n und $\mathbb{R}^{n+1}$ assoziiert die Einheitsbasisvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$, nämlich $\mathbf{e}_k = (0, \ldots 1, \ldots, 0)^T$ (mit der 1 an Position k und $0 \leq k \leq n$), mit einer Basis im Vektorraum $(P_n, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$, nämlich $\{p_{\mathbf{e}_0}, \ldots, p_{\mathbf{e}_n}\}$, also den Monomen $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, denn $p_{\mathbf{e}_k}(x) = x^k$. Diese Aussage entspricht der offensichtlichen Tatsache, dass jedes Polynom vom Grad n als Linearkombination von Monomen mit Grad $\leq n$ geschrieben werden kann.

Lösung Optionale Aufgabe 3: Unkonventionelles inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ [2]

Alle definierenden Eigenschaften eines inneren Produktes sind erfüllt:

(i) Symmetrisch:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3 x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_1 + 3 y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \,. \checkmark$$

(ii,iii) Linear:

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= (\lambda x_1 + y_1) z_1 + (\lambda x_1 + y_1) z_2 + (\lambda x_2 + y_2) z_1 + 3(\lambda x_2 + y_2) z_2 \\ &= (\lambda x_1 z_1 + \lambda x_1 z_2 + \lambda x_2 z_1 + 3\lambda x_2 z_2) + (y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + 3 y_2 z_2) \\ &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \,. \checkmark\end{aligned}$$

(iii) Positiv semi-definit:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 3 x_2 x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2 x_2^2 \;\geq\; 0 \,. \checkmark$$

Falls $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, dann $\mathbf{x} = (0,0)^T$. ✓

Lösung Optionale Aufgabe 4: Inneres Produkt und Norm für Vektorraum stetiger Funktionen [3]

(a) Alle definierenden Eigenschaften eines inneren Produktes sind erfüllt:

(i) Symmetrisch: $$\langle f, g \rangle = \int_I \mathrm{d}x\, f(x) g(x) = \int_I \mathrm{d}x\, g(x) f(x) = \langle g, f \rangle \,. \checkmark$$

(ii,iii) Linear: $$\begin{aligned}\langle \lambda \cdot f + g, h \rangle &= \int_I \mathrm{d}x\, (\lambda f(x) + g(x)) h(x) \\ &= \lambda \int_I \mathrm{d}x\, f(x) h(x) + \int_I \mathrm{d}x\, g(x) h(x) = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \,. \checkmark\end{aligned}$$

(iv) Positiv semi-definit: $$\langle f, f \rangle = \int_I \mathrm{d}x f^2(x) \geq 0 \,.$$

Da der Integrand überall ≥ 0 ist, ist auch das Integral ≥ 0. ✓ Da f stetig ist, kann das Integral nur dann gleich 0 sein, wenn der Integrand überall verschwindet, also wenn $f(x) = 0$, d.h. wenn f die Null-Funktion ist. ✓

Optional: mathematische Begründung für letztere Aussage: Sei $f \neq 0$, dann gibt es ein $x_0 \in I$ mit $(f(x_0))^2 \neq 0$. Weil f stetig ist, ist $(f(x))^2$ in der Umgebung von x_0 ungleich 0, d.h., es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $|x_0 - x| < \delta$ gilt, dass $|(f(x))^2| > \frac{1}{2}|(f(x_0))^2|$. Folglich muss das Integral größer Null sein; z.B. lässt sich eine untere Schranke wie folgt finden: $\langle f, f \rangle = \int_I \mathrm{d}x\, (f(x))^2 \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{d}x\, (f(x))^2 > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}(f(x_0))^2 = \delta f(x_0)^2 > 0$. Ferner, für $f(x) \equiv 0$ ist $\langle f, f \rangle = \int_I \mathrm{d}x\, (f(x))^2 = \int_I \mathrm{d}x\, 0 = 0$. ✓

(b) $$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f_1(x) f_2(x) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) = \boxed{0} \,,$$

da der Integrand antisymmetrisch ist. Die beiden Funktionen sind also 'orthogonal' zueinander.

Explizit: die Substitution $u = \sin(x/\pi)$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \cos(x/\pi)/\pi$ liefert:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) = \pi \int_{-\sin\left(\frac{1}{\pi}\right)}^{\sin\left(\frac{1}{\pi}\right)} \mathrm{d}u \, u = \left.\frac{\pi u^2}{2}\right|_{-\sin\left(\frac{1}{\pi}\right)}^{\sin\left(\frac{1}{\pi}\right)} = 0 \; .$$

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 10]
