https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 01: Mathematische Grundlagen

Lösung Optionale Aufgabe 1: Gruppe der diskreten Translationen in einer Dimension [4]

(a) Wir betrachten die Gruppenaxiome:

(i) Abgeschlossenheit: Die ganzen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der üblichen Addition: $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$. Alle $x, y \in \mathbb{G}$ sind ganzahlige Vielfache von λ, also existieren $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ mit $x = \lambda n_x, y = \lambda n_y$. Folglich gilt $T(x, y) = \lambda \cdot n_x + \lambda \cdot n_y = \lambda \cdot (n_x + n_y) \in \lambda \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{G}$. ✓

(ii) Assoziativität: Die übliche Addition reeller Zahlen ist assoziativ: $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$. Für $x, y, z \in \mathbb{G}$ folgt somit: $T(T(x, y), z) = T(x + y, z) = (x + y) + z = x + (y + z) = T(x, y + z) = T(x, T(y, z))$. ✓

(iii) Neutrales Element: Das neutrale Element ist $0 = \lambda \cdot 0 \in \mathbb{G}$: Für alle $x \in \mathbb{G}$ gilt: $T(x, 0) = x + 0 = x$. ✓

(iv) Inverses Element: Das inverse Element von $n \in \mathbb{Z}$ ist $-n \in \mathbb{Z}$. Damit ist das inverse Element von $x = \lambda \cdot n \in \mathbb{G}$ gegeben durch $-x := \lambda \cdot (-n) \in \mathbb{G}$, denn $T(x, -x) = \lambda \cdot n + \lambda \cdot (-n) = \lambda \cdot (n + (-n)) = \lambda \cdot 0 = 0$. ✓

(v) Kommutativität (damit die Gruppe abelsch ist): Für alle $x, y \in \mathbb{G}$ gilt: $T(x, y) = x + y = y + x = T(y, x)$, da die übliche Addition von reellen Zahlen kommutativ ist. ✓

Da $(\mathbb{G}, T)$ die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt, ist es eine abelsche Gruppe. ✓
Anmerkung: Für $\lambda = 1$ ist $(\mathbb{G}, T)$ identisch zu $(\mathbb{Z}, +)$.

(b) Die Gruppenaxiome von $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ folgen direkt aus denen von $(\mathbb{G}, T)$:

(i) Abgeschlossenheit: $\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{T(x,y)} \in \mathbb{T}$, denn falls $x, y \in \mathbb{G}$, dann $T(x, y) \in \mathbb{G}$ [siehe (a)]. ✓

(ii) Assoziativität: Für $\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y, \mathcal{T}_z \in \mathbb{T}$ gilt: $(\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y) \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z = \mathcal{T}_{T(x,y)} \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z = \mathcal{T}_{T(T(x,y),z)} \overset{\text{(a)}}{=} \mathcal{T}_{T(x,T(y,z))} = \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_{T(y,z)} = \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} (\mathcal{T}_y \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z)$. ✓

(iii) Neutrales Element: Das neutrale Element ist $\mathcal{T}_0 \in \mathbb{T}$: Für alle $\mathcal{T}_x \in \mathbb{T}$ gilt: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{T(x,0)} = \mathcal{T}_{x+0} = \mathcal{T}_x$. ✓

(iv) Inverses Element: Das inverse Element von $\mathcal{T}_x \in \mathbb{T}$ ist $\mathcal{T}_{-x} \in \mathbb{T}$, wobei $-x$ das inverse Element von $x \in \mathbb{G}$ bezüglich T ist: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_{-x} = \mathcal{T}_{T(x,-x)} = \mathcal{T}_{x+(-x)} = \mathcal{T}_0$. ✓

(v) Kommutativität (damit die Gruppe abelsch ist): Für alle $x, y \in \mathbb{G}$ gilt: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{T(x,y)} = \mathcal{T}_{T(y,x)} = \mathcal{T}_y \boldsymbol{+} \mathcal{T}_x$, da die Verknüpfung T in $\mathbb{G}$ kommutativ ist. ✓

Da $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt, ist es eine abelsche Gruppe. ✓

Lösung Optionale Aufgabe 2: Gruppe der diskreten Translationen auf einem Ring [4]

(a) Wir betrachten die Gruppenaxiome:

(i) Abgeschlossenheit: Per Definition liefert Addition ganzer Zahlen modulo N eine ganze Zahl zwischen 0 und $N-1$ (beide inklusive): $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \bmod N \in \mathbb{Z} \bmod N$. Alle $x, y \in \mathbb{G}$ sind ganzahlige Vielfache ($\in [0, N-1]$) von λ, also existieren $n_x, n_y \in \mathbb{Z}\mathrm{mod}N$ mit $x = \lambda n_x, y = \lambda n_y$. Folglich gilt $T(x,y) = \lambda \cdot (n_x + n_y) \bmod N \in \lambda \cdot \mathbb{Z} \bmod N = \mathbb{G}$. ✓

(ii) Assoziativität: Die übliche Addition ganzer Zahlen ist assoziativ, $m, n, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m + n) + l = m + (n + l)$, und diese Eigenschaft bleibt auch für Addition modulo N erhalten. Für $x, y, z \in \mathbb{G}$ folgt somit: $T(T(x,y), z) = \lambda \cdot ((n_x + n_y) + n_z)(\bmod N) = \lambda \cdot (n_x + (n_y + n_z))(\bmod N) = T(x, T(y,z))$. ✓

(iii) Neutrales Element: Das neutrale Element ist $0 = \lambda \cdot 0 \in \mathbb{G}$: Für alle $x \in \mathbb{G}$ gilt: $T(x, 0) = \lambda \cdot (n_x + 0)(\bmod N) = x$. ✓

(iv) Inverses Element: Das inverse Element von $n \in \mathbb{Z} \bmod N$ ist $[N + (-n)] \bmod N \in \mathbb{Z} \bmod N$. Folglich ist das inverse Element von $x = \lambda \cdot n \in \mathbb{G}$ gegeben durch $-x := \lambda \cdot (N + (-n)) \in \mathbb{G}$, denn $T(x, -x) = \lambda \cdot (n + (N + (-n)))(\bmod N) = \lambda \cdot 0 (\bmod N) = 0$. ✓

(v) Kommutativität (damit die Gruppe abelsch ist): Für alle $x, y \in \mathbb{G}$ gilt: $T(x,y) = \lambda \cdot (n_x + n_y) \bmod N = \lambda \cdot (n_y + n_x) \bmod N = T(y,x)$, denn die übliche Addition von reellen Zahlen ist kommutativ, $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + n = n + m$, und diese Eigenschaft bleibt auch für Addition modulo N erhalten. ✓

Da $(\mathbb{G}, T)$ die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt, ist es eine abelsche Gruppe.

(b) Die Gruppenaxiome von $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ folgen direkt aus denen von $(\mathbb{G}, T)$:

(i) Abgeschlossenheit: $\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{T(x,y)} \in \mathbb{T}$, da $x, y \in \mathbb{G} \Rightarrow T(x,y) \in \mathbb{G}$ [siehe (a)]. ✓

(ii) Assoziativität: Für $\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y, \mathcal{T}_z \in \mathbb{T}$ gilt: $(\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y) \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z = \mathcal{T}_{T(x,y)} \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z = \mathcal{T}_{T(T(x,y),z)} \overset{\text{(a)}}{=} \mathcal{T}_{T(x,T(y,z))} = \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_{T(y,z)} = \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} (\mathcal{T}_y \boldsymbol{+} \mathcal{T}_z)$. ✓

(iii) Neutrales Element: Das neutrale Element ist $\mathcal{T}_0 \in \mathbb{T}$: Für alle $\mathcal{T}_x \in \mathbb{T}$ gilt: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{T(x,0)} = \mathcal{T}_{+0} = \mathcal{T}_x$. ✓

(iv) Inverses Element: Das inverse Element von $\mathcal{T}_x \in \mathbb{T}$ ist $\mathcal{T}_{-x} \in \mathbb{T}$, wobei $-x$ das inverse Element von $x \in \mathbb{G}$ bezüglich T ist: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_{-x} = \mathcal{T}_{T(x,-x)} = \mathcal{T}_{x+(-x)} = \mathcal{T}_0$. ✓

(v) Kommutativität (damit die Gruppe abelsch ist): Für alle $x, y \in \mathbb{G}$ gilt: $\mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{T(x,y)} = \mathcal{T}_{T(y,x)} = \mathcal{T}_y \boldsymbol{+} \mathcal{T}_x$, da die Verknüpfung T in $\mathbb{G}$ kommutativ ist. ✓

Da $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt, ist es eine abelsche Gruppe. ✓

Lösung Optionale Aufgabe 3: L'Hôpitalsche Regel [4]

Für (a,b) können wir die L'Hôpitalsche Regel in der Form $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ anwenden, da die gegebenen Funktionen f und g beide am Grenzpunkt x_0 verschwinden, während f' und g' dort endlich sind:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(a-1)x-a}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+(a-1)}{2x+2} = \dfrac{2+(a-1)}{2+2} = \boxed{\dfrac{a+1}{4}}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x+ax^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos(ax)}{1+2ax} = \boxed{a}.$

(c) Wir verwenden $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$, da nicht nur f und g, sondern auch f' und g' bei $x=0$ verschwinden.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\sin(ax)}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos(ax)]}{2[\cos^2 x-\sin^2 x]} = \boxed{\frac{a^2}{2}}.$$

(d) Wir wenden die L'Hôpitalsche Regel dreimal an, da $f^{(n)}(0)$ und $g^{(n)}(0)$ für $n=0,1,2$ alle verschwinden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin(ax)-ax} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{a\cos(ax)-a} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{-a^2\sin(ax)} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{-a^3\cos(ax)} = \boxed{\frac{-6}{a^3}}.$$

(e) Die naive Lösung, $\lim_{x\to 0}(x\ln x) \stackrel{?}{=} 0\cdot\infty$, ist nicht wohldefiniert, daher verwenden wir die L'Hôpitalsche Regel für den Fall $\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}|g(x)| = \infty$, mit $f(x)=\ln x$ und $g(x)=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0}-x = \boxed{0}.$$

Lösung Optionale Aufgabe 4: L'Hôpitalsche Regel [4]

Wir verwenden die L'Hôpitalsche Regel, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, einmal für (a,b), zweimal für (c), viermal für (d):

(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+(2-a)x-2a}{x^2-(a+1)x+a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x+(2-a)}{2x-(a+1)} = \dfrac{2a+(2-a)}{2a-(a+1)} = \boxed{\dfrac{a+2}{a-1}}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh(x)}{\tanh(ax)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh(x)}{a\,\mathrm{sech}^2(ax)} = \boxed{\dfrac{1}{a}}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{(\mathrm{e}^{ax}-1)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2a(\mathrm{e}^{ax}-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+2x)\mathrm{e}^{x^2}}{2a^2\mathrm{e}^{ax}} = \boxed{\dfrac{2}{a^2}}.$

(d)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(ax)+\cos(ax)-2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}a\frac{\sinh(ax)-\sin(ax)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}a^2\frac{\cosh(ax)-\cos(ax)}{4\cdot 3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}a^3\frac{\sinh(ax)+\sin(ax)}{4\cdot 3\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}a^4\frac{\cosh(ax)+\cos(ax)}{4\cdot 3\cdot 2} = a^4\frac{1+1}{24} = \boxed{\frac{a^4}{12}}.\end{aligned}$$

(e) Für $\alpha \leq 0$ ist die Aussage trivialerweise wahr, da dann sowohl $\ln^\alpha(x)$ als auch x^β für $x \to 0$ verschwinden. Wir betrachten daher den Fall $\alpha > 0$. Die naive Lösung, $\lim_{x\to 0}(x^\beta \ln^\alpha x) \stackrel{?}{=} 0 \cdot \infty$, ist nicht wohldefiniert, daher verwenden wir die L'Hôpitalsche Regel für den Fall $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} |g(x)| = \infty$, mit $f(x) = \ln^\alpha x$ und $g(x) = \frac{1}{x^{-\beta}}$:

$$\lim_{x\to 0}(x^\beta \ln^\alpha x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^\alpha x}{x^{-\beta}} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\frac{1}{x}}{-\beta x^{-\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}(x^\beta \ln^{\alpha-1} x).$$

Der letzte Ausdruck hat eine ähnliche Form wie der ursprüngliche, wobei aber die Potenz des Logarithmus um eins verringert wurde. Wiederholen wir dieses Vorgehen, erhalten wir $\lim_{x\to 0} \propto (x^\beta \ln^{\alpha-n} x)$ nach n Schritten. Dieser Ausdruck ist $\boxed{0}$, sobald n größer als α wird.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 16]
