

<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

## Blatt 01: Mathematische Grundlagen

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll  
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 9, 10, 4, 3.  
Videos existieren für Beispielaufgaben 9 (C2.3.1), 10 (C2.3.3).

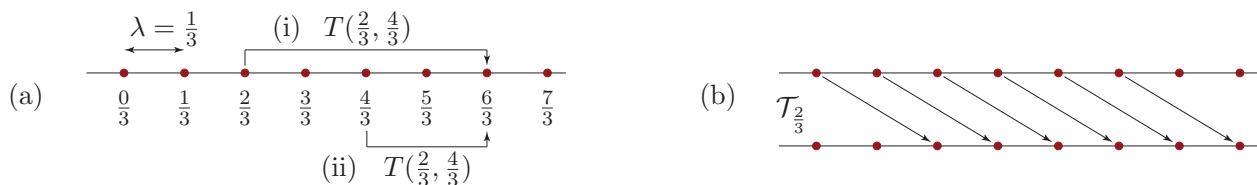
### Optionale Aufgabe 1: Gruppe der diskreten Translationen in einer Dimension [4]

Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M)

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass diskrete Translationen auf einem unendlichen, ein-dimensionalen Gitter eine Gruppe bilden. Die Gitterkonstante, d.h. der konstante Abstand zwischen benachbarten Gitterpunkten, bezeichnen wir mit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  (eine positive, reelle Zahl). Das Gitter  $\mathbb{G}$  ist dann die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von  $\lambda$ ,  $\mathbb{G} \equiv \lambda\mathbb{Z} \equiv \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{Z} : x = \lambda \cdot n\}$ , wobei  $\cdot$  die übliche Multiplikation in  $\mathbb{R}$  ist. Beachten Sie, dass  $n$  zu gegebenem  $x \in \mathbb{G}$  eindeutig festgelegt ist. Auf diesem Gitter definieren wir 'Translation' durch die Gruppenregel

$$T : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad (x, y) \mapsto T(x, y) \equiv x + y,$$

wobei  $+$  die übliche Addition auf den reellen Zahlen ist. Da die Gruppenregel symmetrisch definiert ist, läßt sie sich auf zwei äquivalente Weisen visualisieren:  $T(x, y)$  beschreibt (i) eine 'Verschiebung' oder 'Translation' des Gitterpunkts  $x$  um den Abstand  $y$ , oder (ii) eine Translation des Gitterpunkts  $y$  um den Abstand  $x$ . [Skizze (a), wo  $\lambda = \frac{1}{3}$ , zeigt beide Visualisierungen der Translation  $T(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ .]



(a) Zeigen Sie zunächst, dass  $(\mathbb{G}, T)$  eine abelsche Gruppe ist.

(b) Für ein gegebenes  $y \in \mathbb{G}$  definieren wir nun, entsprechend der Visualisierung (i), eine 'Translation' des Gitters um  $y$ , d.h. jeder Gitterpunkt  $x$  wird um  $y$  'verschoben':

$$\mathcal{T}_y : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad x \mapsto \mathcal{T}_y(x) \equiv T(x, y).$$

[Skizze (b), wo  $\lambda = \frac{1}{3}$ , zeigt die Translation  $\mathcal{T}_{\frac{2}{3}}$ .] Nun betrachten wir die Menge aller solcher Translationen,  $\mathbb{T} \equiv \{\mathcal{T}_y, y \in \mathbb{G}\}$ . Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{T}, \oplus)$  eine abelsche Gruppe ist, wobei  $\oplus$  definiert ist durch

$$\oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad (\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) \mapsto \mathcal{T}_x \oplus \mathcal{T}_y \equiv \mathcal{T}_{T(x,y)}.$$

Anmerkung: die dieser Gruppe zugrundeliegende Menge  $\mathbb{T}$  besteht aus Abbildungen (nämlich Translationen), ein Beispiel dafür, dass die zugrundeliegende Menge nicht immer 'einfach' ist.

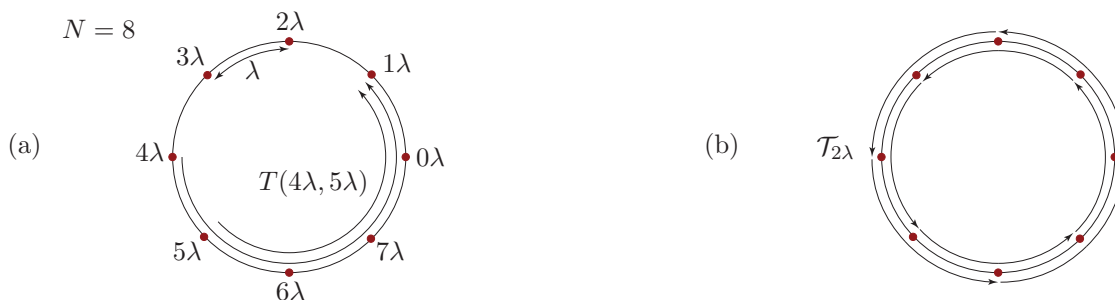
## Optionale Aufgabe 2: Gruppe der diskreten Translationen auf einem Ring [4]

Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M)

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass diskrete Translationen auf einem endlichen, ein-dimensionalen Gitter mit periodischen Randbedingungen eine Gruppe bilden. Wir betrachten ein Gitter auf einem Ring mit Radius  $0 < R \in \mathbb{R}$  und Gitterkonstante  $\lambda = 2\pi R/N$  mit  $N \in \mathbb{N}$ , also  $\mathbb{G} \equiv \lambda(\mathbb{Z} \bmod N) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \{0, 1, \dots, N-1\} : x = \lambda \cdot n\}$ , wobei  $\cdot$  die übliche Multiplikation in  $\mathbb{R}$  ist. Beachten Sie, dass  $n$  zu gegebenem  $x \in \mathbb{G}$  eindeutig festgelegt ist. Der Ring bildet eine 'periodische' Struktur: werden die Gitterplätze abgezählt, beschreiben  $0\lambda$  und  $N\lambda$  denselben Gitterplatz, dasselbe gilt für  $1\lambda$  und  $(1+N)\lambda$ , sowie  $2\lambda$  und  $(2+N)\lambda$ , usw. Auf diesem Gitter definieren wir eine Gruppenregel 'Translation' mittels Addition modulo  $N$ :

$$T : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad (x, y) = (\lambda \cdot n_x, \lambda \cdot n_y) \mapsto T(x, y) \equiv \lambda \cdot ((n_x + n_y) \bmod N).$$

Dabei ist  $+$  die übliche Addition auf den ganzen Zahlen, und  $n \bmod N$  (sprich ' $n \bmod N$ ') ist definiert als der ganzzahlige Rest nach Division von  $n$  durch  $N$  (z.B.  $9 \bmod 8 = 1$ ). [Für  $N = 8$  zeigt Skizze (a) zwei Visualisierungen der Translation  $T(4\lambda, 5\lambda)$ : als Verschiebung des Gitterpunkts  $4\lambda$  um den Abstand  $5\lambda$  entlang des Rings, oder des Gitterpunkts  $5\lambda$  um den Abstand  $4\lambda$ .]



(a) Zeigen Sie zunächst, dass  $(\mathbb{G}, T)$  eine abelsche Gruppe ist.

(b) Für ein gegebenes  $y \in \mathbb{G}$  definieren wir eine 'Translation' des Gitters um  $y$  durch

$$\mathcal{T}_y : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad x \mapsto \mathcal{T}_y(x) \equiv T(x, y)$$

d.h. jeder Gitterpunkt  $x$  wird um  $y$  entlang des Rings 'verschoben'. [Für  $N = 8$  zeigt Skizze (b) die Translation  $\mathcal{T}_{2\lambda}$ ]. Nun betrachten wir die Menge aller solcher Translationen,  $\mathbb{T} \equiv \{\mathcal{T}_y, y \in \mathbb{G}\}$ . Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{T}, +)$  eine abelsche Gruppe ist, wobei die Gruppenregel  $+$  definiert ist durch

$$+ : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad (\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) \mapsto \mathcal{T}_x + \mathcal{T}_y \equiv \mathcal{T}_{T(x,y)}.$$

## Optionale Aufgabe 3: L'Hôpital'sche Regel [4]

Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](M)

Betrachten Sie die folgende Fragestellung: Was ist der Grenzwert des Verhältnisses,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , wenn die Funktionen  $f$  und  $g$  beide am Punkt  $x_0$  verschwinden? Die naive Antwort,  $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \stackrel{?}{=} \frac{0}{0}$ , ist nicht wohldefiniert. Wenn jedoch beide Funktionen eine endliche Steigung bei  $x_0$  haben, können wir für beide eine lineare Näherung verwenden,  $f(x_0 + \delta) \simeq 0 + \delta f'(x_0)$  und  $g(x_0 + \delta) \simeq 0 + \delta g'(x_0)$ , und erhalten  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ . Dieses Ergebnis ist ein Spezialfall der L'Hôpital'schen Regel.

Die allgemeine Formulierung der L'Hôpital'schen Regel ist: Wenn entweder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ , und der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1)$$

Der Beweis dieser allgemeinen Aussage ist nicht-trivial, aber ein Standardthema in Lehrbüchern.

Verwenden Sie die L'Hôpital'sche Regel, um die folgenden Grenzwerte als Funktion der reellen Zahl  $a$  zu bestimmen: [Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an:  $[a, b]$  bedeutet, dass der Grenzwert  $L(a) = b$ .]

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x^2 + 2x - 3} \quad [3, 1] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x + ax^2} \quad [2, 2]$$

Wenn nicht nur  $f$  und  $g$ , sondern auch  $f'$  und  $g'$  alle bei  $x_0$  verschwinden, kann der Grenzwert auf der rechten Seite der L'Hôpital'schen Regel ausgewertet werden, indem die Regel ein zweites Mal angewendet wird (oder  $n+1$  mal, wenn die Ableitungen bis  $f^{(n)}$  und  $g^{(n)}$  alle bei  $x_0$  verschwinden). Verwenden Sie dieses Vorgehen, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin^2 x}, \quad [4, 8] \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin(ax) - ax}. \quad [2, -\frac{3}{4}]$$

(e) Verwenden Sie die L'Hôpital'sche Regel um zu zeigen, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$  (mit  $x > 0$ ). Dieses Ergebnis impliziert, dass für  $x \rightarrow 0$ , ' $x$  schneller verschwindet als  $\ln(x)$  divergiert', d.h. 'linear schlägt log'.

#### Optionale Aufgabe 4: L'Hôpital'sche Regel [4]

Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](M)

Verwenden Sie die L'Hôpital'sche Regel (wenn nötig mehrfach), um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen (wobei  $a$  eine reelle, positive Zahl ist): [Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an:  $[a, b]$  bedeutet, dass der Grenzwert  $L(a) = b$ .]

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (2-a)x - 2a}{x^2 - (a+1)x + a} \quad [2, 4] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{\tanh(ax)} \quad [2, \frac{1}{2}]$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(e^{ax} - 1)^2} \quad [2, \frac{1}{2}] \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(ax) + \cos(ax) - 2}{x^4} \quad [2, \frac{4}{3}]$$

(e) Verwenden Sie die L'Hôpital'sche Regel um zu zeigen, dass für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $0 < \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^\beta \ln^\alpha x) = 0 \quad (\text{mit } x > 0),$$

d.h. 'jede positive Potenz schlägt jede beliebige Potenz von log'.

---

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 16]

---