https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 01: Mathematische Grundlagen

Lösung Hausaufgabe 1: Verkettung von Abbildungen [2]

(a) Da $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$, $(\pm 2)^2 = 4$, ist das Bild von S unter A gleich $T = A(S) = \boxed{\{0,1,4\}}$.

(b) Da $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, ist das Bild von T unter B gleich $U = B(T) = \boxed{\{0,1,2\}}$.

(c) Die verkettete Abbildung $C = B \circ A$ ist gegeben durch $\boxed{C : S \to U, \quad n \mapsto C(n) = \sqrt{n^2} = |n|}$.

(d) A, B und C sind alle surjektiv. B ist injektiv und folglich auch bijektiv. A und C sind nicht injektiv, da beispielsweise die Elemente $+2$ und -2 dasselbe Bild unter A haben, mit $A(\pm 2) = 4$, und entsprechend $C(\pm 2) = 2$. Daher sind A und C auch nicht bijektiv.

Lösung Hausaufgabe 2: Die Gruppen der Addition modulo 5 und der Rotationen um Vielfache von $72°$ [3]

(a)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Das neutrale Element ist 0. Das inverse Element von $n \in \mathbb{Z}_5$ ist $5 - n$.

(b)

$\bullet$	$r(0)$	$r(72)$	$r(144)$	$r(216)$	$r(288)$
$r(0)$	$r(0)$	$r(72)$	$r(144)$	$r(216)$	$r(288)$
$r(72)$	$r(72)$	$r(144)$	$r(216)$	$r(288)$	$r(0)$
$r(144)$	$r(144)$	$r(216)$	$r(288)$	$r(0)$	$r(72)$
$r(216)$	$r(216)$	$r(288)$	$r(0)$	$r(72)$	$r(144)$
$r(288)$	$r(288)$	$r(0)$	$r(72)$	$r(144)$	$r(216)$

Das neutrale Element ist $r(0)$.
Das inverse Element von $r(\phi)$ ist $r(360 - \phi)$.

(c) Die Gruppen $(\mathbb{Z}_5, +)$ und $(\mathcal{R}_{72}, \bullet)$ sind isomorph, da ihre Verknüpfungstabellen identisch sind, wenn wir das Element n aus $\mathbb{Z}_5$ mit dem Element $r(72n)$ aus $\mathcal{R}_{72}$ identifizieren.

(d) Die Gruppe $(\mathcal{R}_{360/n}, \bullet)$ der Rotationen um Vielfache von $360°/n$ ist isomorph zu der Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ der ganzzahligen Addition modulo n.

Lösung Hausaufgabe 3: Zerlegung von Permutationen in Sequenzen von Paarpermutationen [2]

(a) Die Permutation $[132]$ ist selbst eine Paarpermutation, da nur die Elemente 2 und 3 vertauscht werden. Ihre Parität ist daher ungerade.

(b) Um $123 \xmapsto{[231]} 231$ durch Paarpermutationen zu erhalten, bringen wir erst die 2 an die erste Stelle, dann die 3 an die zweite Stelle: $123 \xmapsto{[213]} 213 \xmapsto{[321]} 231$, daher $[231] = [321] \circ [213]$, mit gerader Parität.

Im Folgenden gehen wir analog vor: wir bringen die natürlich geordnete Zahlenfolge durch Paarpermutationen in die gewünschte Reihenfolge, wobei wir von vorne nach hinten vorgehen:

(c) $1234 \xmapsto{[3214]} 3214 \xmapsto{[1432]} 3412 \quad \Rightarrow \quad [3412] = [1432] \circ [3214]$ gerade

(d) $1234 \xmapsto{[3214]} 3214 \xmapsto{[1432]} 3412 \xmapsto{[2134]} 3421 \quad \Rightarrow \quad [3421] = [2134] \circ [1432] \circ [3214]$ ungerade

(e) $12345 \xmapsto{[15342]} 15342 \xmapsto{[13245]} 15243 \xmapsto{[12435]} 15234 \Rightarrow [15234] = [12435] \circ [13245] \circ [15342]$ ungerade

(f) $12345 \xmapsto{[32145]} 32145 \xmapsto{[21345]} 31245 \xmapsto{[15342]} 31542 \Rightarrow [31542] = [15342] \circ [21345] \circ [32145]$ ungerade

Lösung Hausaufgabe 4: Algebraische Manipulationen mit komplexen Zahlen [3]

(a) $(z + \mathrm{i})^2 = (x + \mathrm{i}(y+1))^2 = \boxed{x^2 - (y+1)^2 + \mathrm{i}2x(y+1)}$,

(b)
$$\begin{aligned} \frac{z}{z+1} &= \frac{z}{z+1} \cdot \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1} = \frac{(x+\mathrm{i}y)}{(x+1+\mathrm{i}y)} \cdot \frac{(x+1-\mathrm{i}y)}{(x+1-\mathrm{i}y)} \\ &= \frac{x(x+1)+y^2+\mathrm{i}(y(x+1)-xy)}{(x+1)^2+y^2} = \boxed{\frac{x(x+1)+y^2+\mathrm{i}y}{(x+1)^2+y^2}}, \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{z-\mathrm{i}} &= \frac{\bar{z}}{z-\mathrm{i}} \cdot \frac{\bar{z}+\mathrm{i}}{\bar{z}+\mathrm{i}} = \frac{(x-\mathrm{i}y)}{(x+\mathrm{i}(y-1))} \cdot \frac{(x+\mathrm{i}(1-y))}{(x-\mathrm{i}(y-1))} \\ &= \frac{x^2+y(1-y)+\mathrm{i}(x(1-y)-yx)}{x^2+(y-1)^2} = \boxed{\frac{x^2+y(1-y)+\mathrm{i}x(1-2y)}{x^2+(y-1)^2}}. \end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 5: Multiplikation komplexer Zahlen: geometrische Deutung [2]

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i} \mapsto (\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ $\qquad \rho_1 = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ $\qquad \phi_1 = \arctan\big(1\big) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \mapsto (\sqrt{3}, -1)$ $\qquad \rho_2 = \sqrt{3+1} = 2$ $\qquad \phi_2 = \arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = \frac{11\pi}{6}$

$z_3 = z_1 z_2 = (\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})$ $\qquad \rho_3 = \sqrt{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = 1$ $\qquad \phi_3 = \arctan\big(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\big) = \frac{\pi}{12}$

$= \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}} + (\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}})\mathrm{i} \mapsto (\sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}})$

$z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{\sqrt{8}}{1+\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{8}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$ $\qquad \rho_4 = \sqrt{2+2} = 2$ $\qquad \phi_4 = \arctan\big(-1\big) = \frac{7\pi}{4}$

$= \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} \mapsto (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$z_5 = \bar{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i} \mapsto (\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}})$ $\quad \rho_5 = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ $\quad \phi_5 = \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4}$

Wie erwartet gilt:

$\rho_3 = \rho_1\rho_2$

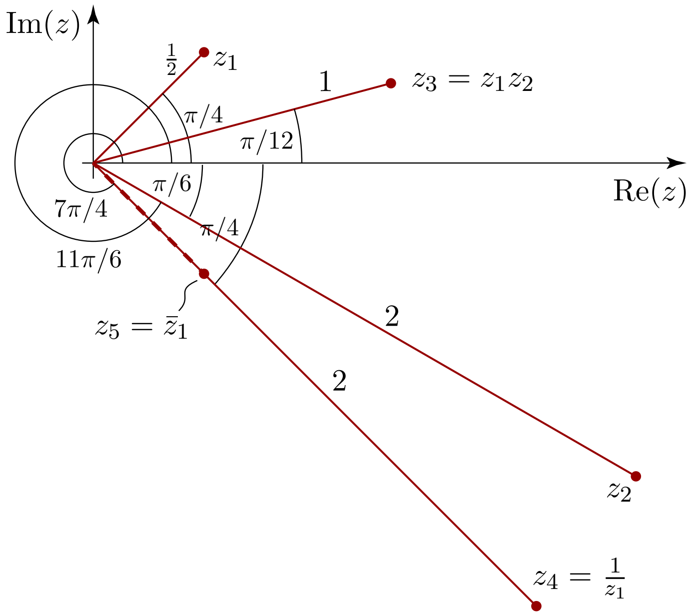
$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$

$\rho_4 = 1/\rho_1$

$\phi_4 = -\phi_1$

$\rho_5 = \rho_1$

$\phi_5 = -\phi_1$



Lösung Hausaufgabe 6: Ableitungen von hyperbolischen Funktionen [2]

(a) $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}) = \boxed{1}\,. \checkmark$$

(b) $$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \boxed{\cosh x}\,. \checkmark$$

(c) $$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \boxed{\sinh x}\,. \checkmark$$

(d) $$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{\cosh x}{\cosh x} - \tfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \boxed{1 - \tanh^2 x}\,, \checkmark$$
$$= \tfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \tfrac{1}{\cosh^2 x} = \boxed{\operatorname{sech}^2 x}\,. \checkmark$$

(e) $$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth x = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tfrac{\cosh x}{\sinh x} = \tfrac{\sinh x}{\sinh x} - \tfrac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \boxed{1 - \coth^2 x}\,, \checkmark$$
$$= \tfrac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\tfrac{1}{\sinh^2 x} = \boxed{-\operatorname{csch}^2 x}\,. \checkmark$$

Lösung Hausaufgabe 7: Ableitungen: Produktregel und Kettenregel [2]

(a) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x \cdot 2x}{(x^2+1)^{3/2}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$

(c) $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{1-x^2}$

(d) $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\ln 2^{x^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x^2 \ln 2} = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2} 2x \ln 2 = 2^{x^2} 2x \ln 2$

(e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}\dfrac{1}{x^2} - 2\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x^2}$

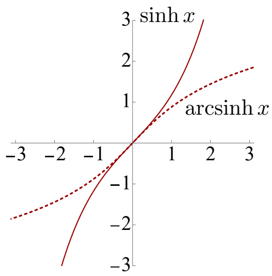
(f) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2+1}$

Lösung Hausaufgabe 8: Ableitungen von inversen hyperbolischen Funktionen [2]

Die hyperbolischen Funktionen $f = \sinh$ und $\tanh$ sind monoton, daher gilt dasselbe für ihre

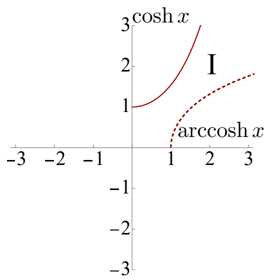
Umkehrfunktionen, $f^{-1} = \operatorname{arcsinh}$ und $\operatorname{arctanh}$. Hingegen ist $\cosh(x)$ nicht monoton, mit positiver/negativer Steigung für $x \gtrless 0$. Daher hat seine Umkehrfunktion, $\operatorname{arccosh}$, zwei Zweige, welche wir getrennt betrachten. Wir berechnen jeweils die Ableitung von f^{-1} mittels $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$.

(a) $\operatorname{arcsinh}$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh$, mit $\sinh(\operatorname{arcsinh} x) = x$. Die Steigung von $\sinh$, gegeben durch $\sinh' x = \cosh x$, ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, und ebenso seine Umkehrfunktion, $\operatorname{arcsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

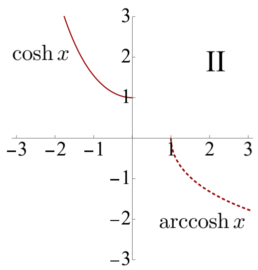


$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}' x &= \frac{1}{\sinh'(y)|_{y=\operatorname{arcsinh} x}} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsinh} x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.\end{aligned}$$

(b) $\operatorname{arccosh}$ ist die Umkehrfunktion von $\cosh$, mit $\cosh(\operatorname{arccosh} x) = x$. Wir betrachten die beiden Zweige von $\operatorname{arccosh}$ mit positiver bzw. negativer Steigung getrennt.
I: Die Funktion $\cosh\colon (0,\infty) \to (1,\infty)$ hat eine positive Steigung $\cosh' x = \sinh x$, und die Umkehrfunktion
$\operatorname{arccosh}\colon (1,\infty) \to (0,\infty)$.
II: Die Funktion $\cosh\colon (-\infty,0) \to (\infty,1)$ hat eine negative Steigung $\cosh' x = \sinh x$, und die Umkehrfunktion
$\operatorname{arccosh}\colon (1,\infty) \to (0,-\infty)$.
Mit dem oberen/unteren Vorzeichen für Zweig I/II erhalten wir

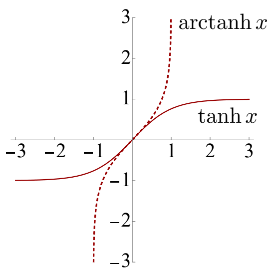


$$\begin{aligned}\operatorname{arccosh}' x &= \frac{1}{\cosh'(y)|_{y=\operatorname{arccosh} x}} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh} x)} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arccosh} x) - 1}} = \boxed{\frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}}.\end{aligned}$$



Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet die Notation $\operatorname{arccosh}$ üblicherweise Zweig I.

(c) $\operatorname{arctanh}$ ist die Umkehrfunktion von $\tanh$, mit $\tanh(\operatorname{arctanh} x) = x$. Die Steigung von $\tanh$, gegeben durch $\tanh' x = \operatorname{sech}^2 x$, ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ monoton, und ebenso seine Umkehrfunktion, $\operatorname{arctanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$.



$$\begin{aligned}\operatorname{arctanh}' x &= \frac{1}{\tanh'(y)|_{y=\operatorname{arctanh} x}} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(\operatorname{arctanh} x)} \\ &= \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{arctanh} x)} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 9: Partielle Integration [4]

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{x}\, \overset{v'}{\sin(2x)} = \Big[\overset{u}{x}\, \overset{v}{\left(-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\left(-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)}$$
$$= \boxed{-\tfrac{1}{2} z\cos(2z) + \tfrac{1}{4}\sin(2z)}$$
$$I'(z) = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(2z) - z2\sin(2z)\right] + \tfrac{1}{4}2\cos(2z) \overset{\checkmark}{=} z\sin(2z) \qquad I(\tfrac{\pi}{2}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{\pi}{4}$$

(b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{x^2}\, \overset{v'}{\cos(2x)} = \Big[\overset{u}{x^2}\, \overset{v}{\tfrac{1}{2}\sin(2x)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u'}{2x}\, \overset{v}{\tfrac{1}{2}\sin(2x)}\,, \quad \text{(a) nutzen:}$$
$$\overset{\text{(a)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{2}z^2\sin(2z) + \tfrac{1}{2}z\cos(2z) - \tfrac{1}{4}\sin(2z)} \qquad I(\tfrac{\pi}{2}) \overset{\checkmark}{=} -\tfrac{\pi}{4}$$
$$I'(z) = z\sin(2z) + z^2\cos(2z) + \tfrac{1}{2}\cos(2z) - z\sin(2z) - \tfrac{1}{2}\cos(2z) \overset{\checkmark}{=} z^2\cos(2z)$$

(c) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{(\ln x)}\, \overset{v'}{x} = \Big[\overset{u}{(\ln x)}\, \overset{v}{\tfrac{1}{2}x^2}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u'}{\tfrac{1}{x}}\, \overset{v}{\tfrac{1}{2}x^2} = \boxed{(\ln z)\tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{4}z^2}$$
$$I'(z) = \tfrac{1}{z}\tfrac{1}{2}z^2 + (\ln z)z - \tfrac{1}{2}z \overset{\checkmark}{=} (\ln z)z \qquad I(1) \overset{\checkmark}{=} -\tfrac{1}{4}$$

(d) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{(\ln x)}\, \overset{v'}{x^n} = \Big[\overset{u}{(\ln x)}\, \overset{v}{\tfrac{1}{n+1}x^{n+1}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u'}{\tfrac{1}{x}}\, \overset{v}{\tfrac{1}{n+1}x^{n+1}}$$
$$= \boxed{(\ln z)\tfrac{1}{n+1}z^{n+1} - \tfrac{1}{(n+1)^2}z^{n+1}} \qquad [\text{für } n > -1]$$

Zur Bestimmung von $[\ln(x)x^{n+1}]_{x=0}$ (mit $m = n+1 > 0$) liefert der Satz von L'Hôpital (siehe Blatt 01, optionale Aufgaben 3,4):

$$[\ln(x)x^m]_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-m}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-m}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-mx^{-(m+1)}} = -\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^m}{m}\right] \overset{m>0}{=} \boxed{0}\,.$$

Die Divergenz von $\ln(x)$ für $x \to 0$ ist so schwach, dass jede positive Potenz von x sie unterdrückt.

$$I'(z) = \tfrac{1}{z}\tfrac{1}{n+1}z^{n+1} + (\ln z)z^n - \tfrac{1}{n+1}z^n \overset{\checkmark}{=} (\ln z)z^n \qquad I(1) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{-1}{(n+1)^2}$$

(e) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{\cos x}\, \overset{v'}{\cos x} = \Big[\overset{u}{\cos x}\, \overset{v}{\sin x}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \underbrace{(\overset{u'}{-\sin x}\, \overset{v}{\sin x})}_{\cos^2 x - 1}$$
$$= \cos z\sin z - I(z) + \int_0^z \mathrm{d}x\, 1\,, \qquad \text{nach } I(z) \text{ auflösen:}$$
$$I(z) = \boxed{\tfrac{1}{2}(\cos z\sin z + z)}$$
$$I'(z) = \tfrac{1}{2}(-\sin^2 z + \cos^2 z + 1) \overset{\checkmark}{=} \cos^2 z \qquad I(\pi) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{\pi}{2}$$

(f) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u}{\cos^3 x}\ \overset{v'}{\cos x} = \Big[\overset{u}{\cos^3 x}\ \overset{v}{\sin x}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\ \big(\overset{u'}{-3\cos^2 x \sin x}\big)\ \underbrace{\overset{v}{\sin x}}_{1-\cos^2 x}$$

$$= \cos^3 z \sin z - 3\Big[I(z) - \int_0^z \mathrm{d}x\ \cos^2 x\Big]\ ,$$ nach $I(z)$ auflösen, (e) nutzen:

$$I(z) \overset{\text{(e)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{4}\left[\cos^3 z \sin z + \tfrac{3}{2}(\cos z \sin z + z)\right]} \qquad I(\pi) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{3\pi}{8}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{4}\Big[-3\cos^2 z \underbrace{\sin^2 z}_{1-\cos^2 z} + \cos^4 z + \tfrac{3}{2}(-\sin^2 z + \cos^2 z + 1)\Big] \overset{\checkmark}{=} \cos^4 z$$

Lösung Hausaufgabe 10: Integration mittels Substitution [3]

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x^2\ \sqrt{x^3+1} \qquad [y(x) = x^3+1,\ \mathrm{d}y = 3x^2\ \mathrm{d}x]$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \sqrt{y} = \tfrac{2}{9}y^{3/2}\Big|_1^{z^3+1} = \boxed{\tfrac{2}{9}\left[(z^3+1)^{3/2} - 1\right]}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{3}(z^3+1)^{1/2}\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^3 \overset{\checkmark}{=} \sqrt{z^3+1}\ z^2 \qquad I(2) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{52}{9}$$

(b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sin x\ \mathrm{e}^{\cos x} \qquad [y(x) = \cos x,\ \mathrm{d}y = -\sin x\ \mathrm{d}x]$$

$$= -\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^y = -\mathrm{e}^y\Big|_1^{\cos z} = \boxed{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\cos z}}$$

$$I'(z) = -\mathrm{e}^{\cos z}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z \overset{\checkmark}{=} \mathrm{e}^{\cos z}\sin z \qquad I(\tfrac{\pi}{3}) \overset{\checkmark}{=} \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$$

(c) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \cos^3 x = \int_0^z \mathrm{d}x \cos x\big[1 - \sin^2 x\big] \qquad [y(x) = \sin x,\ \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ (1-y^2) = (y - \tfrac{1}{3}y^3)\Big|_0^{\sin z} = \boxed{\sin z - \tfrac{1}{3}\sin^3 z}$$

$$I'(z) = \cos z - \sin^2 z \cos z = \cos z(1 - \sin^2 z) \overset{\checkmark}{=} \cos^3 z \qquad I(\tfrac{\pi}{4}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{5}{6\sqrt{2}}$$

(d) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sinh^3 x = \int_0^z \mathrm{d}x \sinh x\big[\cosh^2 x - 1\big] \quad [y(x) = \cosh x,\ \mathrm{d}y = \sinh x \mathrm{d}x]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ (y^2 - 1) = (\tfrac{1}{3}y^3 - y)\Big|_1^{\cosh z} = \boxed{\tfrac{1}{3}\cosh^3 z - \cosh z + \tfrac{2}{3}}$$

$$I'(z) = \cosh^2 z \sinh z - \sinh z = (\cosh^2 z - 1)\sinh z \overset{\checkmark}{=} \sinh^3 z \qquad I(\ln 3) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{44}{81}$$

(e) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sin\sqrt{\pi x}\tfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad \Big[y(x) = \sqrt{\pi x},\ \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/x}\ \mathrm{d}x\Big]$$

$$= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \sin y = -\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos y\Big|_0^{\sqrt{\pi z}} = \boxed{\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \cos\sqrt{\pi z}\right]}$$

$$I'(z) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\sqrt{\pi z}\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sqrt{\pi z} \overset{\checkmark}{=} \sin\sqrt{\pi z}\tfrac{1}{\sqrt{z}} \qquad I(\tfrac{\pi}{9}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}$$

(f) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sqrt{x}\ \mathrm{e}^{\sqrt{x^3}} \qquad \big[y(x) = x^{3/2},\ \mathrm{d}y = \tfrac{3}{2}x^{1/2}\ \mathrm{d}x\big]$$

$$= \frac{2}{3}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{y} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{y}\Big|_{0}^{z^{3/2}} = \boxed{\frac{2}{3}\left[\mathrm{e}^{z^{3/2}} - 1\right]}$$

$$I'(z) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{z^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{3/2} \overset{\checkmark}{=} \mathrm{e}^{z^{3/2}}z^{1/2} \qquad I\left((\ln 4)^{2/3}\right) \overset{\checkmark}{=} 2$$

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 25]
