Blatt 01: Mathematische Grundlagen

Lösung Beispielaufgabe 1: Verkettung von Abbildungen [2]

(a) A bildet $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ ab und B bildet $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}_0$ ab; $C = B \circ A$ bildet somit $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}_0$ ab. Das Bild von n ist $C(n) = B(A(n)) = B(n+1) = |n+1|$. Zusammengefasst:

$$\boxed{C : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto C(n) = |n+1|.}$$

(b) A, B und C sind alle surjektiv. A ist weiterhin injektiv und bijektiv. B ist nicht injektiv, da jedes positive $n \in \mathbb{N}_0$ das Bild *zweier* Punkte in $\mathbb{Z}$ ist, $B(n) = B(-n) = n$. Daher ist B auch nicht bijektiv. Folglich ist auch C nicht injektiv und somit nicht bijektiv.

Lösung Beispielaufgabe 2: Die Abelsche Gruppe $\mathbb{Z}_2$ [3]

(a) Aus der Additionstabelle gehen folgende Eigenschaften hervor:

$\boldsymbol{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

(i) Abgeschlossenheit: das Ergebnis jeder möglichen Addition ist aufgeführt und liegt offensichtlich wieder in der Menge $\{0, 1\}$. ✓

(i) Assoziativität:
$(1 \boldsymbol{+} 0) \boldsymbol{+} 0 = 1 \boldsymbol{+} 0 = 1 \stackrel{?}{=} 1 \boldsymbol{+} (0 \boldsymbol{+} 0) = 1 \boldsymbol{+} 0 = 1$ ✓
$(0 \boldsymbol{+} 1) \boldsymbol{+} 0 = 1 \boldsymbol{+} 0 = 1 \stackrel{?}{=} 0 \boldsymbol{+} (1 \boldsymbol{+} 0) = 0 \boldsymbol{+} 1 = 1$ ✓
$(1 \boldsymbol{+} 1) \boldsymbol{+} 0 = 0 \boldsymbol{+} 0 = 0 \stackrel{?}{=} 1 \boldsymbol{+} (1 \boldsymbol{+} 0) = 1 \boldsymbol{+} 1 = 0$ ✓
$(1 \boldsymbol{+} 0) \boldsymbol{+} 1 = 1 \boldsymbol{+} 1 = 0 \stackrel{?}{=} 1 \boldsymbol{+} (0 \boldsymbol{+} 1) = 1 \boldsymbol{+} 1 = 0$ ✓
$(0 \boldsymbol{+} 1) \boldsymbol{+} 1 = 1 \boldsymbol{+} 1 = 0 \stackrel{?}{=} 0 \boldsymbol{+} (1 \boldsymbol{+} 1) = 0 \boldsymbol{+} 0 = 0$ ✓
$(0 \boldsymbol{+} 0) \boldsymbol{+} 1 = 0 \boldsymbol{+} 1 = 1 \stackrel{?}{=} 0 \boldsymbol{+} (0 \boldsymbol{+} 1) = 0 \boldsymbol{+} 1 = 1$ ✓

(ii) Neutrales Element ist die 0, denn deren Addition liefert keine Änderung: $0 \boldsymbol{+} 0 = 0$, $0 \boldsymbol{+} 1 = 1$.

(iii) Zu jedem Element gibt es nach Tabelle auch genau ein Inverses, d.h. in der Tabelle steht in jeder Zeile genau eine 0.

(iv) Die Gruppe ist Abelsch, da die Tabelle symmetrisch zur Diagonalen ist.

(b) Die Gruppe $(\{+1, -1\}, \boldsymbol{\cdot})$ mit der üblichen Multiplikation als Gruppenoperation ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, da ihre Verknüpfungstabelle dieselbe Struktur wie die von $\mathbb{Z}_2$ hat.

$\boldsymbol{\cdot}$	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

Lösung Beispielaufgabe 3: Permutationsgruppen [4]

(a) Die Einträge der Verknüpfungstabelle ergeben sich durch Berechnung des Bildes von 123 unter P gefolgt von P'. Zum Beispiel folgt aus $123 \xmapsto{[213]} 213 \xmapsto{[321]} 231$ dass $[321] \circ [213] = [231]$.

$P' \circ P$	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[123]	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[231]	[231]	[312]	[123]	[321]	[132]	[213]
[312]	[312]	[123]	[231]	[132]	[213]	[321]
[213]	[213]	[132]	[321]	[123]	[312]	[231]
[321]	[321]	[213]	[132]	[231]	[123]	[312]
[132]	[132]	[321]	[213]	[312]	[231]	[123]

(b) Das neutrale Element ist die Permutation, die 'nichts tut', $\boxed{[123]}$. Jedes Element hat ein eindeutiges Inverses, da jede Zeile und Spalte das neutrale Element genau einmal enthält.

(c) Die Verknüpfungstabelle ist nicht symmetrisch, $P' \circ P \neq P \circ P'$, daher ist S_3 *keine* Abelsche Gruppe. Es gilt beispielsweise $[312] \circ [213] = [132]$, aber $[213] \circ [312] = [321]$.

Lösung Beispielaufgabe 4: Algebraische Manipulationen mit komplexen Zahlen [4]

(a) $$z + \bar{z} = x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = \boxed{2x} = 2\mathrm{Re}(z)\,,$$

(b) $$z - \bar{z} = x + \mathrm{i}y - (x - \mathrm{i}y) = \boxed{\mathrm{i}2y} = \mathrm{i}2\mathrm{Im}(z)\,,$$

(c) $$z \cdot \bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = \boxed{x^2 + y^2}\,,$$

(d) $$\frac{z}{\bar{z}} \overset{\text{(c)}}{=} \frac{z \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{(x + \mathrm{i}y)^2}{x^2 + y^2} = \boxed{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{x^2 + y^2}}\,,$$

(e) $$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} + z}{z \cdot \bar{z}} \overset{\text{(a),(c)}}{=} \boxed{\frac{2x}{x^2 + y^2}}\,,$$

(f) $$\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} - z}{z \cdot \bar{z}} \overset{\text{(b),(c)}}{=} \boxed{\mathrm{i}\frac{(-2y)}{x^2 + y^2}}\,,$$

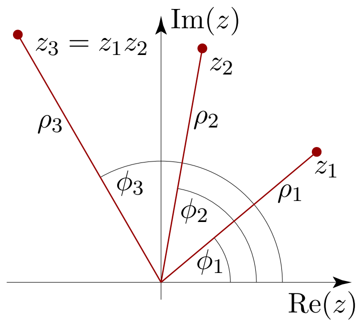
(g) $$z^2 + z = (x + \mathrm{i}y)^2 + (x + \mathrm{i}y) = \boxed{(x^2 - y^2 + x) + \mathrm{i}(2xy + y)}\,,$$

(h) $$z^3 = (x + \mathrm{i}y)^3 = (x^3 + 3x^2\mathrm{i}y + 3x(\mathrm{i}y)^2 + (\mathrm{i}y)^3 = \boxed{(x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)}\,.$$

Lösung Beispielaufgabe 5: Multiplikation komplexer Zahlen: geometrische Deutung [4]

(a) Mit $z_j = (\rho_j \cos\phi_j, \rho_j \sin\phi_j)$ und den angegebenen trigonometrischen Identitäten folgt

$$
\begin{aligned}
z_3 = z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1)\rho_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\sin\phi_2) \\
&= \rho_1\rho_2\,[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) \\
&\qquad + \mathrm{i}\,(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2)] \\
&= \rho_1\rho_2\,[\cos(\phi_1+\phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1+\phi_2)] \\
&\equiv \rho_3\,[\cos\phi_3 + \mathrm{i}\sin\phi_3]
\end{aligned}
$$



Wir lesen ab: $\rho_3 = \rho_1\rho_2$, $\phi_3 = (\phi_1+\phi_2) \bmod (2\pi)$. ✓

(b) Die komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ wird in der komplexen Ebene durch die Koordinaten $z \mapsto (x, y)$ dargestellt, mit Polarkoordinaten $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Diese Formel für den Winkel ϕ bestimmt ihn nur modulo π; um $\phi \in [0, 2\pi)$ eindeutig festzulegen, identifizieren wir das Quadrant, das den Punkt (x, y) enthält.

$$
\begin{array}{lll}
z_1 = \sqrt{3}+\mathrm{i} \mapsto (\sqrt{3}, 1) & \rho_1 = \sqrt{3+1} = 2 & \phi_1 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \\
z_2 = -2+2\sqrt{3}\mathrm{i} \mapsto (-2, 2\sqrt{3}) & \rho_2 = \sqrt{12+4} = 4 & \phi_2 = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \\
z_3 = z_1 z_2 = (\sqrt{3}+\mathrm{i})(-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}) & \rho_3 = \sqrt{16\cdot 3+16} = 8 & \phi_3 = \arctan\left(\frac{4}{-4\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6} \\
\quad = -4\sqrt{3}+4\mathrm{i} \mapsto (-4\sqrt{3}, 4) & & \\
z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})} & \rho_4 = \frac{1}{4}\sqrt{3+1} = \frac{1}{2} & \phi_4 = \arctan\left(\frac{-1/4}{\sqrt{3}/4}\right) = \frac{11\pi}{6} \\
\quad = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i} \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right) & & \\
z_5 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \mapsto (\sqrt{3}, -1) & \rho_5 = \sqrt{3+1} = 2 & \phi_5 = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}
\end{array}
$$

Wie erwartet gilt:

$\rho_3 = \rho_1\rho_2$

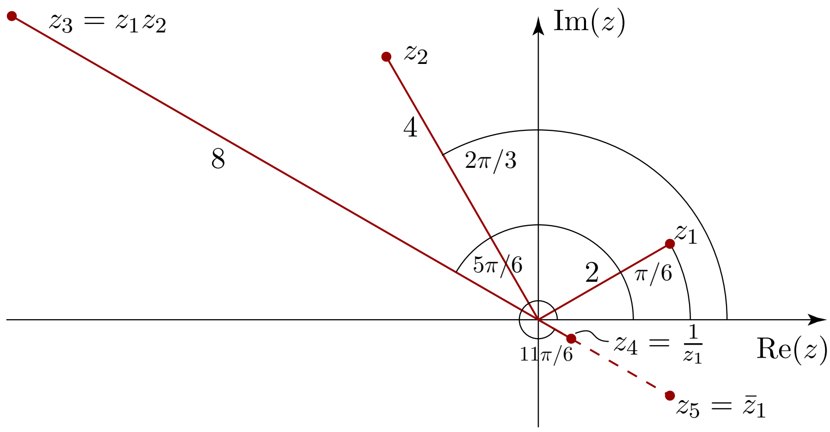
$\phi_3 = \phi_1+\phi_2$

$\rho_4 = 1/\rho_1$

$\phi_4 = -\phi_1 \bmod (2\pi)$

$\rho_5 = \rho_1$

$\phi_5 = -\phi_1 \bmod (2\pi)$



Lösung Beispielaufgabe 6: Ableitungen von trigonometrischen Funktionen [1]

Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$, und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, finden wir sofort

(a) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{1+\tan^2 x}, ✓$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\sec^2 x}. ✓$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \boxed{-1-\cot^2 x}, ✓$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = \boxed{-\csc^2 x}. ✓$$

Lösung Beispielaufgabe 7: Ableitungen: Produktregel und Kettenregel [2]

(a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}$

(b) $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}(x+1)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{(x+1)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}(x+1)^{3/2}}$

(c) $f'(x) = \mathrm{e}^x(2x-1)$

(d) $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\ln 3^x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x\ln 3} = \mathrm{e}^{x\ln 3}\ln 3 = 3^x \ln 3$

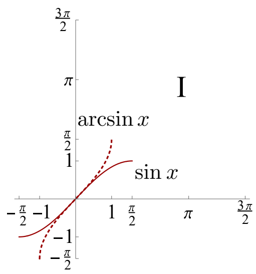
(e) $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$

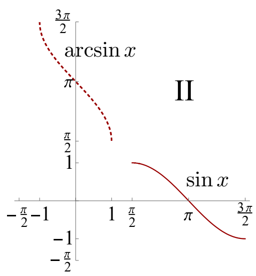
(f) $f'(x) = \ln(9x^2) + x\frac{1}{9x^2}18x = \ln(9x^2) + 2$

Lösung Beispielaufgabe 8: Ableitungen von inversen trigonometrischen Funktionen [4]

Die trigonometrischen Funktionen $f = \sin$, $\cos$ und $\tan$ sind alle periodisch, daher haben deren Umkehrfunktionen, $f^{-1} = \arcsin$, $\arccos$ und $\arctan$, jeweils unendlich viele Zweige, einen für jedes Invervall der x-Achse, auf welchem eine Bijektion definiert werden kann. Auf jedem Zweig hat die Steigung von f^{-1} stets dasselbe Vorzeichen wie die Steigung von f. Wir betrachten repräsentative Beispiele solcher Zweige, und berechnen jeweils die Ableitung von f^{-1} mittels $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$.

(a) $\arcsin$ ist die Umkehrfunktion von $\sin$, mit $\sin(\arcsin x) = x$. Wir betrachten zwei Zweige, in denen $\arcsin x$ eine positive bzw. negative Steigung hat.
I: Die Funktion $\sin\colon (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \to (-1, 1)$ hat eine positive Steigung $\sin' x = \cos x$, und die Umkehrfunktion $\arcsin\colon (-1,1) \to (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.
II: Die Funktion $\sin\colon (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) \to (1, -1)$ hat eine negative Steigung $\sin' x = \cos x$, und die Umkehrfunktion $\arcsin\colon (-1,1) \to (\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.
Mit dem oberen/unteren Vorzeichen für Zweig I/II erhalten wir

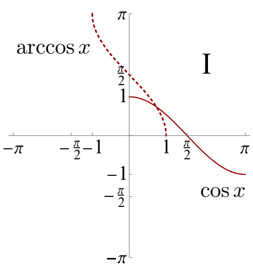




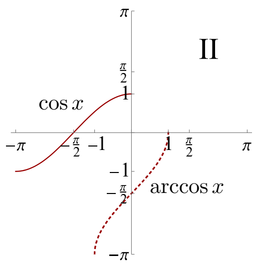
$$\begin{aligned}\arcsin' x &= \frac{1}{\sin'(y)|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \boxed{\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}}.\end{aligned}$$

Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet die Notation $\arcsin$ üblicherweise Zweig I.

(b) $\arccos$ ist die Umkehrfunktion von $\cos$, mit $\cos(\arccos x) = x$. Wir betrachten zwei Zweige, in denen $\arccos$ eine negative bzw. positive Steigung hat.
I: Die Funktion $\cos\colon (0, \pi) \to (1, -1)$ hat eine negative Steigung $\cos' x = -\sin x$, und die Umkehrfunktion $\arccos\colon (-1,1) \to (\pi, 0)$.
II: Die Funktion $\cos x\colon (-\pi, 0) \to (-1, 1)$ hat eine positive Steigung $\cos' x = -\sin x$, und die Umkehrfunktion $\arccos\colon (-1,1) \to (-\pi, 0)$.
Mit dem oberen/unteren Vorzeichen für Zweig I/II erhalten wir

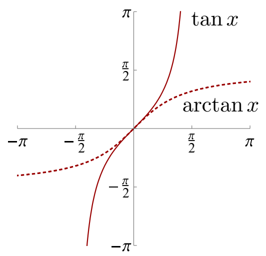


$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(y)|_{y=\arccos x}} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}$$
$$= \frac{\mp 1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \boxed{\frac{\mp 1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$



Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet die Notation $\arccos$ üblicherweise Zweig I.

(c) $\arctan$ ist die Umkehrfunktion von $\tan$, mit $\tan(\arctan x) = x$. Die Steigung von $\tan$, gegeben durch $\tan' x = \sec^2 x$, ist für jeden Zweig positiv. Wir betrachten nur den um null zentrierten Zweig, $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, mit der Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:



$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(y)|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}.$$

Lösung Beispielaufgabe 9: Partielle Integration [6]

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u}{x}\ \overset{v'}{\mathrm{e}^{2x}} = \Big[\overset{u}{x}\ \overset{v}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}} = \boxed{\tfrac{1}{2}z\mathrm{e}^{2z} - \tfrac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2z}-1\right]}$$
$$I'(z) = \left[\tfrac{1}{2}(1+2z) - \tfrac{1}{4}2\right]\mathrm{e}^{2z} \overset{\checkmark}{=} z\mathrm{e}^{2z} \qquad I(\tfrac{1}{2}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{4}$$

Beachten Sie das Kürzungsmuster: $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$. [Analog bei (c,d).]

(b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u}{x^2}\ \overset{v'}{\mathrm{e}^{2x}} = \Big[\overset{u}{x^2}\ \overset{v}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u'}{2x}\ \overset{v}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}$$

Das Integral rechts lässt sich durch nochmalige partielle Integration lösen, siehe (a):

$$I(z) \overset{\text{(a)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{2z} - \tfrac{1}{2}z\mathrm{e}^{2z} + \tfrac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2z}-1\right]}$$
$$I'(z) = \left[\tfrac{1}{2}(2z+2z^2) - \tfrac{1}{2}(1+2z) + \tfrac{1}{4}2\right]\mathrm{e}^{2z} \overset{\checkmark}{=} z^2\mathrm{e}^{2z} \qquad I(\tfrac{1}{2}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{\mathrm{e}}{8} - \tfrac{1}{4}$$

Da zweifach partiell integriert wurde, ist das Kürzungsmuster komplizierter als in (a).

(c) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u}{(\ln x)} \cdot \overset{v'}{1} = \Big[\overset{u}{(\ln x)}\ \overset{v}{x}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u'}{\tfrac{1}{x}}\ \overset{v}{x} = \boxed{(\ln z)z - z}$$
$$I'(z) = \tfrac{1}{z}z + \ln z - 1 \overset{\checkmark}{=} \ln z \qquad I(1) \overset{\checkmark}{=} -1$$

(d) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u}{(\ln x)} \cdot \overset{v'}{\tfrac{1}{\sqrt{x}}} = \Big[\overset{u}{(\ln x)}\ \overset{v}{2\sqrt{x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\ \overset{u'}{\tfrac{1}{x}}\ \overset{v}{2\sqrt{x}} = \boxed{(\ln z)2\sqrt{z} - 4\sqrt{z}}$$

Zur Auswertung von $[\ln(x)\sqrt{x}]_{x=0}$ wurde der Satz von L'Hôpital benutzt (siehe Blatt 01, optionale Aufgaben 3,4):

$$\left[(\ln x)\sqrt{x}\right]_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0}\left[-2x^{1/2}\right] = \boxed{0}.$$

Folglich divergiert $\ln(x)$ so langsam für $x \to 0$, dass $\sqrt{x}$ diese Divergenz unterdrückt.

$$I'(z) = 2\left[\tfrac{1}{z}\sqrt{z} + (\ln z)\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{z}}\right] - 4\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{z}} \overset{\checkmark}{=} (\ln z)\tfrac{1}{\sqrt{z}} \qquad I(1) \overset{\checkmark}{=} -4$$

(e) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{\sin x}\, \overset{v'}{\sin x} = \Big[\overset{u}{\sin x}\, \overset{v}{(-\cos x)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \underbrace{\overset{u'}{\cos x}\, \overset{v}{(-\cos x)}}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin z\cos z - I(z) + \int_0^z \mathrm{d}x\ 1\ ,$$ und lösen nach $I(z)$ auf:

$$I(z) = \boxed{\tfrac{1}{2}(-\sin z\cos z + z)}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1) \overset{\checkmark}{=} \sin^2 z \qquad I(\pi) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{\pi}{2}$$

(f) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u}{\sin^3 x}\, \overset{v'}{\sin x} = \Big[\overset{u}{\sin^3 x}\, \overset{v}{(-\cos x)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x\, \overset{u'}{\big(3\sin^2 x \cos x\big)}\, \underbrace{\overset{v}{(-\cos x)}}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin^3 z\cos z - 3\Big[I(z) - \int_0^z \mathrm{d}x \sin^2 x\Big]\ ,$$ lösen nach $I(z)$ auf, und nutzen (e):

$$I(z) \overset{\text{(e)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{4}\left[-\sin^3 z\cos z + \tfrac{3}{2}(-\sin z\cos z + z)\right]}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{4}\Big[-3\sin^2 z\underbrace{\cos^2 z}_{1-\sin^2 z} + \sin^4 z + \tfrac{3}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1)\Big] \overset{\checkmark}{=} \sin^4 z \qquad I(\pi) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{3\pi}{8}$$

Lösung Beispielaufgabe 10: Integration mittels Substitution [4]

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x\cos(x^2 + \pi) \qquad [y(x) = x^2,\ \mathrm{d}y = 2x\ \mathrm{d}x]$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \cos(y + \pi) = \tfrac{1}{2}\sin(y+\pi)\Big|_0^{z^2} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sin(z^2 + \pi)}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{2}\cos(z^2 + \pi)\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2 \overset{\checkmark}{=} \cos(z^2+\pi)\ z \qquad I\big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\big) \overset{\checkmark}{=} -\tfrac{1}{2}$$

(b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sin^3 x\cos x \qquad [y(x) = \sin x,\ \mathrm{d}y = \cos x\ \mathrm{d}x]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ y^3 = \tfrac{1}{4}y^4\Big|_0^{\sin z} = \boxed{\tfrac{1}{4}\sin^4 z}$$

$$I'(z) = \sin^3 z\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z \overset{\checkmark}{=} \sin^3 z\cos z \qquad I(\tfrac{\pi}{4}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{16}$$

(c) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sin^3 x = \int_0^z \mathrm{d}x \sin x\big[1 - \cos^2 x\big] \qquad [y(x) = \cos x,\ \mathrm{d}y = -\sin x\, \mathrm{d}x]$$

$$= -\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ (1-y^2) = -(y - \tfrac{1}{3}y^3)\Big|_1^{\cos z} = \boxed{-\cos z + \tfrac{1}{3}\cos^3 z + \tfrac{2}{3}}$$

$$I'(z) = \sin z + \cos^2 z(-\sin z) = \sin z(1-\cos^2 z) \stackrel{\checkmark}{=} \sin^3 z \qquad I(\tfrac{\pi}{3}) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{5}{24}$$

(d) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \cosh^3 x = \int_0^z \mathrm{d}x \cosh x\big[1+\sinh^2 x\big] \quad [y(x) = \sinh x,\ \mathrm{d}y = \cosh x \mathrm{d}x]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ (1+y^2) = (y + \tfrac{1}{3}y^3)\Big|_0^{\sinh z} = \boxed{\sinh z + \tfrac{1}{3}\sinh^3 z}$$

$$I'(z) = \cosh z + \sinh^2 z \cosh z = \cosh z(1+\sinh^2 z) \stackrel{\checkmark}{=} \cosh^3 z \qquad I(\ln 2) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{57}{64}$$

(e) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sqrt{1+\ln(x+1)}\ \tfrac{1}{x+1} \qquad \big[y(x) = \ln(x+1),\ \mathrm{d}y = \tfrac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x\big]$$

$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \sqrt{1+y} = \tfrac{2}{3}(1+y)^{3/2}\Big|_0^{\ln(z+1)} = \boxed{\tfrac{2}{3}\left[\big(1+\ln(z+1)\big)^{3/2} - 1\right]}$$

$$I'(z) = \big(1+\ln(z+1)\big)^{1/2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z+1) \stackrel{\checkmark}{=} \sqrt{1+\ln(z+1)}\ \tfrac{1}{z+1} \qquad I(\mathrm{e}^3-1) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{14}{3}$$

(f) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x^3 \mathrm{e}^{-x^4} \qquad [y(x) = x^4,\ \mathrm{d}y = 4x^3\ \mathrm{d}x]$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-y} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{z^4} = \boxed{\tfrac{1}{4}\left[1-\mathrm{e}^{-z^4}\right]}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-z^4}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^4 \stackrel{\checkmark}{=} \mathrm{e}^{-z^4}z^3 \qquad I(\sqrt[4]{\ln 2}) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{1}{8}$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 34]
