Beispiel für: Fourier-Integrale (C6.3), Green'sche Funktion (C7.5), Homogene + Partikuläre Lösung (C7.4), delta-Funktion (C6.1), komplexe Wegintegration (C9.2)

C7.5Bsp.a

Überdämpfter harmonischer Oszillator mit periodischem Antrieb:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x = f(t) \quad , \text{ überdämpft: } \gamma > \Omega \qquad (1)$$

$$\hat{L}(t)\, x = f(t), \qquad \hat{L}(t) = \left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \qquad (2)$$

Endziel: Finde x(t), mit Anfangsbedingung: $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$ (3)

für Antriebsfunktion $f(t)$ wird später angegeben (als $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$) (4)

Homogene Lösung: $\hat{L}(t)\, x_h(t) = 0$ (finde mittels exp-Ansatz) (5)

Allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ (6)

Finde mittels GF:
erst $\tilde{g}(\omega)$ mittels Fourier-Transf.
dann $g(t)$ mittels komplexem Wegintegral

Zusammenfassung: C7.5 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green

ZC7.5a

C7.5Bsp.b

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\hat{L}(d_t)} x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Kurznotation: $\hat{L}(d_t)\, x(t) = f(t)$ (2) $\qquad \hat{L}(d_t) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell}$

Fourier-transformiert: $x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\, \tilde{x}(\omega) \qquad \frac{d}{dt} x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) e^{-i\omega t}\, \tilde{x}(\omega)$ (3)

$\tilde{L}(-i\omega)\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ (4) mit $\tilde{L}(-i\omega) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (-i\omega)^\ell$ (5)

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{g}(\omega)\, \tilde{f}(\omega)$ (6) mit $\tilde{g}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)}$ (7)

Green'sche Funktion erfüllt: $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{= \tilde{\delta}(\omega)}$ (8) $\xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}}$ $\hat{L}(d_t)\, g(t) \overset{(1)}{=} \delta(t)$ (9)

[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, g(t-u) f(u)$ (10) allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

Vorschau, Zusammenfassung der Ergebnisse

C7.5 Bsp.c

Homogene Lösung: $$x_h(t) \overset{(d.6)}{=} A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \qquad (1)$$

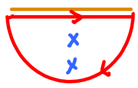
mit $$\lambda_\pm^2 + 2\gamma\lambda_\pm + \Omega^2 = 0. \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \qquad (2)$$

Partikuläre Lösung: $$x_p(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, g(t-u)\, f(u), \qquad f(t) = f_0 \cos\omega_0 t \qquad (3)$$

Green'sche Funktion: $$\tilde{G}(\omega) \overset{(f.5)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \qquad (4)$$

Fourier-Rücktransformation:

$t>0$:



$$g(t) \overset{(g.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \overset{(i.7)}{=} \theta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right] = \theta(t)\, x_h(t) \qquad (5)$$

mit $x_h(0) \overset{(i.8)}{=} 0,\ \dot{x}_h(0) \overset{(i.9)}{=} 1$

(5) in (3): $$x_p(t) \overset{(m.4)}{=} \mathrm{Re}\left[f_0 \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)}\right] \overset{(m.6)}{=} f_0 \frac{(-\omega_0^2 + \Omega^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \qquad (6)$$

Volle Lösung: $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \qquad (7)$$ + Anpassen der Konstanten: (o.8,9)

(a) Homogene Lösung: Exp-Ansatz

C7.5 Bsp.d

$$x_h(t) = A e^{\lambda t} \qquad (1)$$

Kurznotation:

eingesetzt in: $$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, x_h(t) \overset{(a.2)}{=} 0 \qquad (2) \qquad \hat{L}(d_t)\, x_h(t) = 0$$

$$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, A e^{\lambda t} = 0 \qquad (3) \qquad \hat{L}(d_t)\, A e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 = 0. \qquad (4) \Longleftarrow \qquad \tilde{L}(\lambda) = 0$$

für $\gamma > \Omega$

$$\boxed{\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \lambda_\pm < 0} \qquad (5)$$

(wichtig !!)

[vergleiche (C7.4m.6) und Blatt 9, Bsp.Aufgabe]

Allgemeine homogene Lösung:
$$x_h(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \qquad (6)$$
$$\dot{x}_h(t) = \lambda_+ A_+ e^{\lambda_+ t} + \lambda_- A_- e^{\lambda_- t} \qquad (7)$$

Konstanten A+ , A- werden festgelegt, wenn partikuläre Lösung bekannt ist.

Für späteren Gebrauch: $$\lambda_+ + \lambda_- = -2\gamma, \quad \lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \gamma_r \qquad (8)$$

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = (-\gamma + \sqrt{\ })(-\gamma - \sqrt{\ }) = \gamma^2 - \sqrt{\ }^2 = \Omega^2 \qquad (9)$$

(b) Partikuläre Lösung: mittels Greenscher Funktion

C7.5 Bsp. e

$$\boxed{x_p(t) \overset{(b.10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, G(t-u)\, f(u)} \quad : \qquad (1)$$

wobei $G(t)$ per Definition die Diff.Gl. mit delta-Antrieb erfüllt:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) G(t-u) \overset{(b.9)}{\equiv} \delta(t-u) \qquad (2)$$

Kurznotation:
$\hat{L}(d_t)\, G(t) = \delta(t)$

Check, dass (e.1) die Gl. (a.1) erfüllt: (Logik: siehe Seite b.)

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) x_p(t) = \qquad (3)$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \underbrace{\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) G(t-u)}_{\delta(t-u)} f(u) \qquad (4)$$

$$= f(t) \checkmark \qquad (5)$$

$$\hat{L}(d_t)\, x_p(t)$$

$$\overset{(1)}{=} \int du\, \underbrace{\hat{L}(d_t)\, G(t-u)}_{\delta(t-u)} f(u)$$

$$= f(t) \checkmark$$

(c) Bestimmung der Greenschen Funktion im Fourier-Raum

C7.5 Bsp. f

$$G(t) \overset{(ZC6.3b.1)}{=} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{G}(\omega) \qquad (1)$$

$$d_t \overset{(ZC6.3b.2)}{\longrightarrow} -i\omega \qquad (2)$$

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) G(t) \overset{(e.2)}{\equiv} \delta(t) \qquad (3)$$

Kurznotation:

$$\overset{(b.4)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\left((-i\omega)^2 + 2\gamma(-i\omega) + \Omega^2\right)}_{\equiv \tilde{L}(-i\omega)} \tilde{G}(\omega) = 1 \qquad \tilde{L}(-i\omega)\tilde{G}(\omega) = 1 \qquad (4)$$

$$\overset{(b.7)}{\Longrightarrow} \quad \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} = \boxed{\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}} \qquad \text{[vgl.: (C7.5a.6)]} \qquad (5)$$

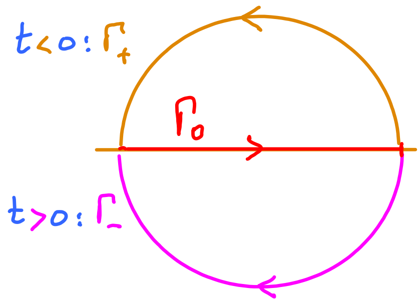
(d) Bestimmung v. G(t) mittels komplexer Wegintegration

C7.5 Bsp.g

[vergleiche (C8.3g-h) und Blatt 15, Bsp.Aufgabe 4 & Hausaufgabe 4]

Kurzüberlegung: $\omega = \pm iR \leftarrow e^{-i(\pm iR)t} = e^{\overbrace{\pm Rt}^{<0\,?}}$

$$G(t) \overset{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \qquad (1)$$



$$G(t \lessgtr 0) = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_0} dz \underbrace{\frac{e^{-iz(\mp|t|)}}{2\pi\, \tilde{L}(-iz)}}_{\equiv h_\pm(z)} \qquad (2)$$

$$\Gamma_0 : \{ z(s) = s,\ s \in (-R, R) \} \qquad (3)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_\pm)} dz\, h_\pm(z) \qquad (4)$$

Falls t < 0: Schließe Weg in oberer Halbebene,
 > unterer

entlang $\Gamma_\pm : \{ z(\phi) = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi) \mid \phi \in (0, \pm\pi) \}$ (5)

wähle: $\gtrless 0$

denn $e^{\pm iz|t|} = e^{\pm i z(\phi)|t|} = e^{\pm i|t|R\cos\phi}\, e^{\mp|t|R\sin\phi} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ ✓ (6)

C7.5 Bsp.h

Finde nun Pole von $h_\pm(z)$, d.h. die Nullstellen von:

$$\Omega^2 - z^2 - 2i\gamma z \overset{(f.5)}{=} \tilde{L}(-iz) = 0 \qquad (1)$$

⇒ Pole der Ordnung 1 bei:

$$\boxed{z_\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \Omega^2} = \boxed{i\left(-\gamma \pm \sqrt{+\gamma^2 - \Omega^2}\right) \overset{(d.5)}{=} i\overbrace{\lambda_\pm}^{<0}} \qquad (2)$$

Check: $(z - i\lambda_+)(z - i\lambda_-) = z^2 - iz(\lambda_+ + \lambda_-) - \lambda_+\lambda_-$

$$= z^2 + 2iz\gamma - [\gamma^2 - (\gamma^2 - \Omega^2)] \overset{(1)}{=} -\tilde{L}(-iz) \checkmark \qquad (3)$$

Übrigens:

$\lambda_\pm$ sind die in (d.5) gefundenen 'Eigenfrequenzen' für die homogene Lösung!

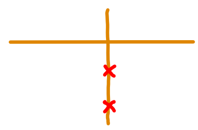
Das ist kein Zufall, denn die Gleichungen für $z_\pm$ und $\lambda_\pm$ sind analog:

Einerseits: $\tilde{L}(-iz) \overset{(h.1)}{=} 0$, andererseits $\tilde{L}(\lambda) \overset{(d.4)}{=} 0$ ⇒ konsistent mit (h.3) $-iz = \lambda$ ✓ (4)

Liegen die Pole in oberer oder unterer Halbebene?

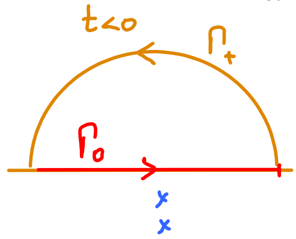
Es gilt: $\mathrm{Im}(z_\pm) \overset{(h.2)}{=} \mathrm{Im}(i\lambda_\pm) = \lambda_\pm < 0$ (5)

also liegen beide in unterer Halbebene!



C7.5 Bsp.i

$$\Rightarrow \quad h_\pm(z) \overset{(g.2)}{=} \frac{e^{\pm i z|t|}}{2\pi \tilde{L}(-iz)} \overset{(h.3)}{=} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \frac{e^{\pm i z|t|}}{(z-i\lambda_+)(z-i\lambda_-)} \qquad (1)$$



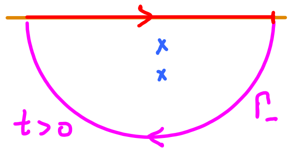
$$G(t<0) \overset{(g.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0,\Gamma_+)} dz\, h_+(z) \overset{(C9.2g.3)}{=} 0 \qquad (2)$$

Satz v. Cauchy

denn $h_+(z)$ ist analytisch in oberer Halbebene!

$$G(t>0) \overset{(g.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0,\Gamma_-)} dz\, h_-(z) \qquad (3)$$

$\{ -$ - Zeichen, weil (Γ_0, Γ_-) in math. negativer Richtung durchlaufen wird



(C9.4a.4) : Residuensatz

$$= -2\pi i \left[Res(h_-, \overset{(h.2)}{\overbrace{i\lambda_+}^{z_+}}) + Res(h_-, \overset{(h.2)}{\overbrace{i\lambda_-}^{z_-}}) \right] \qquad (4)$$

$$\overset{(1)}{=} (-2\pi i)\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\left[\frac{e^{-i(i\lambda_+)|t|}}{(i\lambda_+ - i\lambda_-)} + \frac{e^{-i(i\lambda_-)|t|}}{(i\lambda_- - i\lambda_+)} \right] \qquad (5)$$

$$\lambda_+ - \lambda_- \overset{(d.8)}{=} 2\sqrt{\gamma^2-\Omega^2} \equiv \gamma_r \qquad (6)$$

$$\boxed{G(t) = \overset{(2)}{\Theta(t)} \frac{1}{\gamma_r} \underbrace{\left[e^{+\lambda_+ t} - e^{+\lambda_- t}\right]}_{(d.7)\ \equiv\ x_h(t)} = \Theta(t)\, x_h(t)} \qquad (7)$$

(6) mit $A_\pm = \pm 1/\gamma_r$

mit $x_h(0) = 0$, (8) $\quad \dot{x}_h(t) = \frac{1}{\gamma_r}\left[\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}\right]$, $\dot{x}_h(0) = 1$ (9)

C7.5 Bsp.j

(e) Skizziere G(t)

$$G(0) = 0. \qquad (1)$$

$$G(t\to\infty) \longrightarrow 0^+ \qquad (2)$$

$\leftarrow$ {denn $|\lambda_+| < |\lambda_-|$, also dominiert der erste Term.}

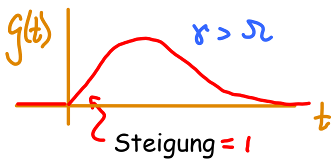
Steigung bei $t = 0^+$:

$$d_t G(t) \overset{(i.7)}{=} d_t\left[\Theta(t)\, x_h(t)\right] = \underbrace{\dot\Theta(t)}_{\delta(t)}\, \cancel{\underbrace{x_h(t)}_{x_h(0)}} + \Theta(t)\, \dot{x}_h(t) \qquad (2)$$

$\cancel{\delta(t)\, x_h(0)} \overset{(i.8)}{=} 0$

$$= \boxed{\Theta(t)\, \dot{x}_h(t)} \qquad (3)$$

$$\boxed{d_t G(t)\Big|_{t\to 0^+} = \dot{x}_h(0) = 1} \qquad (4)$$

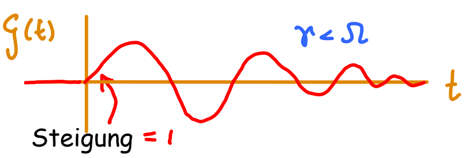


Vergleiche: Analoge Eigenschaft gilt für den unterdämpften Fall: $(\gamma < \Omega)$

$$G(t) = \Theta(t) \underbrace{\frac{1}{\Omega_r} \sin(\Omega_r t)\, e^{-\gamma t}}_{x_h(t)} \overset{(C7.5b.5)}{=} \chi(t) \qquad \Omega_r \overset{(C7.4j.1)}{=} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \qquad (5)$$

mit $x_h(0) = 0$, $\quad \dot{x}_h(t) = \left[\Omega_r \cos(\Omega_r t) + (-\gamma)\sin(\Omega_r t)\right] e^{-\gamma t}$, $\quad \dot{x}_h(0) = 1$ (6)

$$d_t G(t)\Big|_{t\to 0} \overset{(3)}{=} \Theta(t)\, \dot{x}_h(t)\Big|_{t\to 0} = 1 \qquad (7)$$



(f) Erfüllt G(t) die definierende Gleichung (e.2)? Allgemeines Argument

C7.5Bsp.k

Vergleiche Blatt 12, Bsp-Aufgabe 3, Hausaufgabe 3

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) \overset{?}{\equiv} \delta(t) \tag{1}$$

$$\boxed{G(t) \overset{(i.7)}{=} \Theta(t)\, x_h(t) \quad \text{mit} \quad x_h(0) \overset{(i.8)}{=} 0\,, \quad \dot{x}_h(0) \overset{(i.9)}{=} 1} \tag{2}$$

$$d_t G(t) \overset{(j.3)}{=} \cancel{\underbrace{\dot\Theta(t)}_{\delta(t)}\, \underbrace{x_h(t)}_{x_h(0) \overset{(i.8)}{=} 0}} + \Theta(t)\, \dot{x}_h(t) \tag{3}$$

$$d_t^2 G(t) \overset{(2)}{=} \underbrace{\dot\Theta(t)}_{\delta(t)}\, \underbrace{\dot{x}_h(t)}_{\dot{x}_h(0) \overset{(i.9)}{=} 1} + \Theta(t)\, \ddot{x}_h(t) = \delta(t) + \Theta(t)\, \ddot{x}_h(t) \tag{4}$$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) = \overbrace{\delta(t)}^{(4)} + \Theta(t) \underbrace{\left[d_t^2 + 2\gamma \overset{(3)}{d_t} + \overset{(2)}{\Omega^2 \cdot 1}\right] x_h(t)}_{(d.2)\; =\; 0} \tag{5}$$

$$= \delta(t) \;\checkmark \qquad \text{[wie gefordert in (e.2)]} \tag{6}$$

(f) Erfüllt G(t) die definierende Gleichung (e.2) ? Explizite Rechnung

C7.5Bsp.k′

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) \overset{?}{\equiv} \delta(t) \tag{1}$$

$$G(t) \overset{(i.7)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} \right] \tag{2}$$

$$d_t G(t) \overset{(j.3)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t} \right] \tag{3}$$

$$d_t^2 G(t) \overset{(2)}{=} \delta(t) \frac{1}{\cancel{\gamma_r}} \underbrace{\left[\lambda_+ e^{\cancel{\lambda_+ t}^{\,0}} - \lambda_- e^{\cancel{\lambda_- t}^{\,0}} \right]}_{= \lambda_+ - \lambda_- \overset{(d.8)}{=} \cancel{\gamma_r}} \tag{4a}$$

$$+ \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r} \left[\lambda_+^2 e^{\lambda_+ t} - \lambda_-^2 e^{\lambda_- t} \right] \tag{4b}$$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) = \overset{(4a)}{\delta(t)} + \Theta(t) \left[\lambda_+^2 + 2\gamma\lambda_+ + \Omega^2\right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_+ t} \tag{4}$$

$$\underbrace{}_{(d.4)\; =\; 0}$$

$$- \left[\lambda_-^2 + 2\gamma\lambda_- + \Omega^2\right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_- t}$$

$$= \delta(t) \;\checkmark \qquad \text{[wie gefordert in (e.2)]} \tag{5}$$

(g) Partikuläre Lösung: Für periodischen Antrieb

C7.5Bsp.l

mittels G(t):

$$\boxed{x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, G(t-u)\, f(u) \overset{s=t-u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, G(s)\, f(t-s)} \qquad (1)$$

Substitution empfiehlt sich, da f einfacher ist als G

$$\overset{(i.7)}{=} \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} ds\, \overbrace{\Theta(s)}^{=1}\, \frac{1}{\gamma_r}\left[e^{\lambda_+ s} - e^{\lambda_- s}\right] f(t-s) \qquad (2)$$

$$\equiv x_+(t) - x_-(t) \qquad (3)$$

$$x_\pm(t) \overset{(3)}{=} \frac{1}{\gamma_r}\int_0^\infty ds\, e^{\lambda_\pm s}\, f(t-s) \qquad (4)$$

Beispiel: Periodischer Antrieb:

$$\boxed{f(t) = f_0 \cos\omega_0 t = f_0\, \mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0 t}\right]} \qquad (5)$$

$$x_\pm(t) \overset{(3)}{=} \frac{f_0}{\gamma_r}\int_0^\infty ds\, e^{\lambda_\pm s}\, \mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0(t-s)}\right] \qquad (6)$$

C7.5Bsp.m

$$\boxed{x_\pm(t)} = \frac{f_0}{\gamma_r}\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0 t}\left.\frac{e^{s(\lambda_\pm + i\omega_0)}}{\lambda_\pm + i\omega_0}\right|_0^\infty\right] \overset{\lambda_\pm<0\ (d.6)}{=} -\frac{f_0}{\gamma_r}\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{i\omega_0+\lambda_\pm}\right] \qquad (1)$$

Volle partikuläre Lösung:

$$x_p(t) \overset{(l.4)}{=} x_+ - x_- \overset{(2)}{=} -\mathrm{Re}\left(\frac{f_0}{\gamma_r}e^{-i\omega_0 t}\left[\frac{1}{i\omega_0+\lambda_+} - \frac{1}{i\omega_0+\lambda_-}\right]\right) \qquad (2)$$

$$= -\mathrm{Re}\left[\frac{f_0}{\gamma_r}e^{-i\omega_0 t}\frac{(i\omega_0+\lambda_-)-(i\omega_0+\lambda_+)}{(i\omega_0+\lambda_+)(i\omega_0+\lambda_-)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{f_0}{\cancel{\gamma_r}}e^{-i\omega_0 t}\frac{\overbrace{\lambda_+-\lambda_-}^{\gamma_r\ (d.8)}}{-\omega_0^2+i\omega_0\underbrace{(\lambda_++\lambda_-)}_{(d.8)\ -2\gamma}+\underbrace{\lambda_+\lambda_-}_{(d.9)\ \Omega^2}}\right] \qquad (3)$$

$$= \boxed{\mathrm{Re}\left[f_0 e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{-\omega_0^2+\Omega^2-2i\omega_0\gamma}\right]} = \mathrm{Re}\left[\frac{f_0 e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)}\right] \qquad (4)$$

bequemste Form, weil $\sim e^{-i\omega_0 t}$.

kein Zufall - siehe (h.3)

$$= \mathrm{Re}\left\{f_0(\cos\omega_0 - i\sin\omega_0 t)\left[\frac{-\omega_0^2+\Omega^2+2i\gamma\omega_0}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2}\right]\right\} \qquad (5)$$

$$\boxed{x_p(t) = f_0\frac{(-\omega_0^2+\Omega^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0\sin\omega_0 t}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2}} \ ✓ \qquad (6)$$

Check: erfüllt $x_p(t)$ die Gl. (a.1), mit $f(t) \overset{(l.5)}{=} f_0 \cos(\omega_0 t)$

$$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, x_p(t) \overset{?}{=} f_0 \cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

Ausgangspunkt: $\boxed{x_p(t) \overset{(m.4)}{=} \mathrm{Re}\left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega_0)} \right]}$ (2)

(2) in (1): $(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, \mathrm{Re}\left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega_0)} \right]$ (3)

$$= \mathrm{Re}\left[\underbrace{\cancel{\left((-i\omega_0)^2 - 2\gamma i\omega_0 + \Omega^2\right)}}_{\tilde{L}(-i\omega_0)} f_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\cancel{\tilde{L}(-i\omega_0)}} \right] . \tag{4}$$

$$= \mathrm{Re}\left[f_0 e^{-i\omega_0 t} \right] = f_0 \cos(\omega_0 t) = (1) \checkmark \tag{5}$$

(h) Bestimme jetzt Anfangsbedingungen

Allgemeine Lösung: $x(t) \overset{(a.5)}{=} x_h(t) + x_p(t)$ (1)

$x_h(0) \overset{(d.6)}{=} A_+ + A_-$, (2) $\quad \dot{x}_h(0) \overset{(d.7)}{=} \lambda_+ A_+ + \lambda_- A_-$ (3)

$$x_p(t) \overset{(m.6)}{=} f_0 \frac{(-\omega_0^2 + \Omega^2)\cos(\omega_0 t) + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \tag{4}$$

$$x_p(0) \overset{(4)}{=} f_0 \frac{-\omega_0^2 + \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \tag{5}$$

$$\dot{x}_p(t) \overset{(4)}{=} f_0 \frac{-(-\omega_0^2 + \Omega^2)\,\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2\gamma\omega_0\, \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \tag{6}$$

$$\dot{x}_p(0) \overset{(6)}{=} f_0 \frac{2\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \tag{7}$$

Wähle A+ und A- so, dass $x(0) = x_0 = x_p(0) + x_h(0)$ (8)

$\dot{x}(0) = v_0 = \dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0)$ (9)

(i) Abkürzung bei Berechnung v. $x_p(t)$

$$x_p(t) \overset{(\ell.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \underline{g(t-u)}\, \underline{f(u)} \qquad (1) \qquad\qquad \underline{f(u) \overset{(\ell.5)}{=} f_0 \cos(\omega_0 u)} \qquad (2)$$

$$\underline{g(t)} \overset{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega) \overset{(f.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \qquad (3) \qquad\qquad \tilde{L}(-i\omega) \overset{(f.4)}{=} \Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega \qquad (4)$$

(2), (3) in (1):

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \underline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-u)}}{\tilde{L}(-i\omega)}}\; \underline{\frac{f_0}{2}\left[e^{-i\omega_0 u} + e^{+i\omega_0 u}\right]} \qquad (5)$$

vertausche Integrale:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f_0}{2i} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{L}(-i\omega)} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-iu(\omega_0-\omega)}}_{\delta(\omega_0-\omega)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{iu(\omega_0+\omega)}}_{\delta(\omega_0+\omega)} \right\} \qquad (6)$$

$\delta(\omega_0-\omega) \leftarrow$ (C6.3b.2) $\rightarrow \delta(\omega_0+\omega)$

$$= \frac{f_0}{2} \left\{ \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)} + \frac{e^{+i\omega_0 t}}{\tilde{L}(+i\omega_0)} \right\} \overset{(4)}{=} \mathrm{Re}\left[\frac{f_0\, e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{L}(-i\omega_0)} \right] = \boxed{\mathrm{Re}\left[f_0 \frac{e^{-i\omega_0 t}}{(-\omega_0^2 + \Omega^2 - 2i\gamma\omega_0)} \right]} \qquad (7)$$

$= (m.4)$