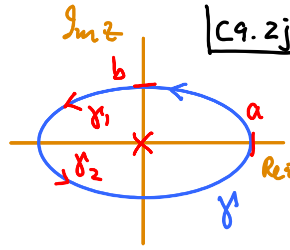
Beispiel 1: Wegverformung

C9.2j



Berechne: $I = \oint_\gamma dz\, f(z)$, mit $f(z) = \frac{1}{z}$ (1)

Lösung: $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ existiert für alle $z \neq 0$. (2)

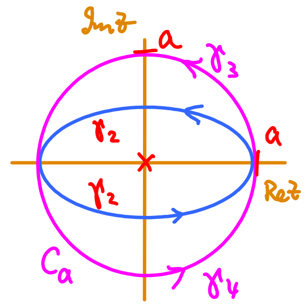
[Man sagt: $\frac{1}{z}$ hat eine 'Singularität' oder 'Pol' bei $z = 0$.]

Folglich ist $\frac{1}{z}$ analytisch auf $\boxed{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ (3)

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ (4)

$C_a = (\gamma_3, \gamma_4)$ (5)

Deswegen kann Wegunabhängigkeit (3c.2) genutzt werden,
um Integrationsweg zu einem Kreisweg zu "verformen",
für den das Integral aus (C9.2d.5a,b) bekannt ist:



$$I \overset{(1)\,(4)}{=} \oint_{(\gamma_1,\gamma_2)} dz\, f(z) \overset{(C9.2f.1)}{=} \int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2} dz\, f(z) \qquad (6)$$

Wegunabhängigkeit:
$$\overset{(C9.3c.2)}{=} \int_{\gamma_3} dz\, f(z) + \int_{\gamma_4} dz\, f(z) \qquad (7)$$

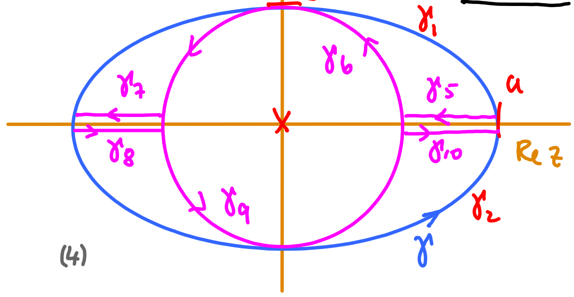
$$\overset{(C9.2f.1),\,(5)}{=} \oint_{C_a} dz\, \frac{1}{z} \overset{(C9.2d.3)}{=} I_{-1} \overset{(C9.2d.5a)}{=} \underline{2\pi i} \qquad (8)$$

(denn γ_1 und γ_3 haben denselben Anfangs- und Endpunkt, und auf dem Gebiet dazwischen ist f(z) analytisch. Ditto für γ_2 und γ_4 .

Kurzfassung: $\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = \oint_{C_a} dz\, \frac{1}{z} = 2\pi i}$ (9)

Beispiel 1: Wegverformung, Fortsetzung

C9.2k



Alternative Konturverformung:

$$\int_\gamma = \int_{(\tilde\gamma_1,\tilde\gamma_2)} \quad (1) \qquad \tilde\gamma_1 = (\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7) \quad (2)$$

$$\tilde\gamma_2 = (\gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}) \quad (3)$$

$$I = \oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(1),(C9.2f.1)}{=} \int_{\tilde\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\tilde\gamma_2} dz\, f(z) \qquad (4)$$

$$\overset{(2),(3),(C9.2f.1)}{=} \tilde\gamma_1 \rightarrow \left[\int_{\gamma_5} dz\, f(z) + \int_{\gamma_6} dz\, f(z) + \int_{\gamma_7} dz\, f(z)\right]$$

heben sich weg (6) — bilden Kreis — heben sich weg (7)

$$\tilde\gamma_2 \rightarrow + \left[\int_{\gamma_{10}} dz\, f(z) + \int_{\gamma_9} dz\, f(z) + \int_{\gamma_8} dz\, f(z)\right] \qquad (5)$$

Aber:

$$\int_{\gamma_5} dz\, f(z) = -\int_{\gamma_{10}} dz\, f(z) \qquad (6)$$

$$\int_{\gamma_7} dz\, f(z) = -\int_{\gamma_8} dz\, f(z) \qquad (7)$$

$$= 0 + \int_{C_b} dz\, f(z) + 0 \overset{(C9.2d.3)}{=} I_{-1} \overset{(C9.2d.5a)}{=} \boxed{2\pi i} \qquad (8)$$

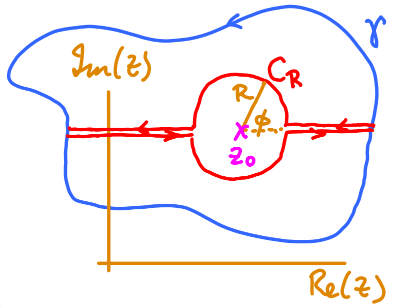
Kurzfassung: $\boxed{\oint_\gamma dz\, \frac{1}{z} = \oint_{C_b} dz\, \frac{1}{z} = 2\pi i}$ (9)

(9) gilt für jede geschlossene Kontur, die $z = 0$ umschliesst!

Beispiel 2: Geschlossener Weg γ um Pol bei $z_0 \neq 0$ $\quad (z_0 \in \mathbb{C})$

C9.2l

$$\boxed{I_n^{(+)} \equiv \oint_\gamma dz\, (z-z_0)^n \overset{(4)}{=} 2\pi i\, \delta_{n,-1}} \qquad (1)$$



Verforme Weg zu Kreis mit Radius R, Mittelpunkt z_0:

$$C_R \equiv \left\{ z(\phi) = z_0 + Re^{i\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi) \right\} \qquad (2)$$

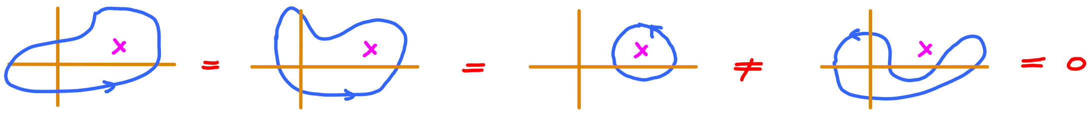
$$I_n^{(+)} \overset{(C9.2i.2)}{=} \oint_{C_R} dz\, (z-z_0)^n \overset{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{dz}{d\phi} \left(z(\phi) - z_0\right)^n \qquad (3)$$

Wegverformung

[analog zu Seite C9.2d] $\overset{(2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi\, iRe^{i\phi} \left(Re^{i\phi}\right)^n \overset{(C9.2d.6)}{=} 2\pi i\, \delta_{n,-1}$ (4)

Analog: $\boxed{I_n^{(-)} \equiv \oint_\gamma dz\, (z-z_0)^n \overset{(1)}{=} -2\pi i\, \delta_{n,-1}}$ (5) [extra Vorzeichen, wegen $\int_0^{-2\pi} d\phi$

Faustregel: Geschlossener Weg darf beliebig verformt werden, solange dabei keine Singularität überkreuzt wird!



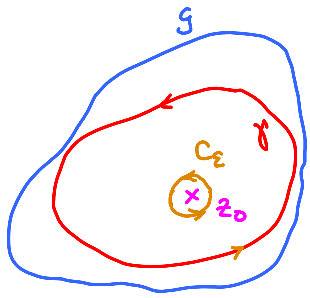
(6)

Satz: Cauchy's Integralformel (optional)

C9.2m

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\gamma \subset G$ ein 'einfach' geschlossener (d.h. Windungszahl = 1), positiv orientierter Weg, $f(z)$ eine Funktion, die auf G analytisch ist, und z_0 ein Punkt innerhalb γ. Dann gilt:

$$f(z_0) = \int_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \qquad (1)$$



Bemerkenswert: Das Verhalten einer analytischen Funktion im Inneren eines Gebiets (hier das von γ eingeschlossene) ist vollständig durch ihre Werte am Rand festgelegt !!

Begründung: Verforme γ zu einem infinitesimal kleinen Kreis mit Mittelpunkt z_0, Radius ε: $C_\varepsilon \equiv \left\{ z(\phi) = z_0 + \varepsilon e^{i\phi} \;\middle|\; \phi \in (0, 2\pi) \right\}$ (2)

$$\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \overset{(C9.2i.2)}{=} \oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \qquad (3)$$

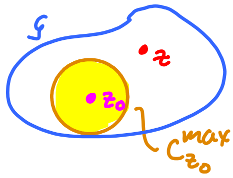
Wegverformung

denn für $\varepsilon \to 0$ gilt $f(z)\big|_{z \in C_\varepsilon} = f(z_0 + \varepsilon e^{i\phi}) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(z_0)$ (4)

kleiner Kreis: $\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{f(z_0)}{2\pi i} \underbrace{\left[\oint_{C_\varepsilon} dz \frac{1}{z - z_0} \right]}_{\overset{(I.4)}{=} 2\pi i} = f(z_0)$ (5)

C9.3 Reihenentwicklung einer analytischen Funktion

Sei $f(z)$ analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$, dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um einen Punkt $z_0 \subset \mathcal{G}$ die Form einer Taylor-Reihe:



n-fache Ableitung

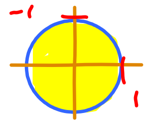
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,, \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad \text{(wie im Reellen)} \qquad (1)$$

[(1) konvergiert überall in $C^{max}_{z_0}$ (grösste offene Kreis $\subset \mathcal{G}$, mit Mittelpunkt z_0)]

Wichtige Potenzreihen (bereits bekannt im Reellen, gelten genauso im Komplexen):

Konvergenzgebiet:

- Exp: $$e^z \overset{(C5.2a.4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \,, \qquad \mathcal{G} = \mathbb{C} \qquad (2)$$
- Cos: $$\cos z \overset{(C5.2a.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \,, \qquad \mathcal{G} = \mathbb{C} \qquad (3)$$
- Sin: $$\sin z \overset{(C5.2a.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \,, \qquad \mathcal{G} = \mathbb{C} \qquad (4)$$
- Geometrische Reihe: $$\frac{1}{1-z} \overset{(C5.1g.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \mathcal{G} = \{|z|<1\}$$



Reihenentwicklung einer analytischen Funktion mit Singularität

Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $\mathcal{G} \setminus z_0$, mit einer isolierten Singularität (oder 'Pol') bei z_0, dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um z_0 die Form einer 'Laurent-Reihe', die auch negative Potenzen enthält: (2)

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad \text{denn} \quad \overset{(1)}{=} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{a_{n'}}{2\pi i} \underbrace{\oint \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1-n'}}}_{(C9.2d.6)\ 2\pi i\, \delta_{n,n'}} = a_n \qquad (2)$$

umschließt z_0

z_0 heisst 'Pol der Ordnung p ' falls $a_n = 0$ für alle $n < -p$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (3)$$

Beispiele: Laurent-Reihe v.

[Taylor-Reihe um $z_0 = 0$]

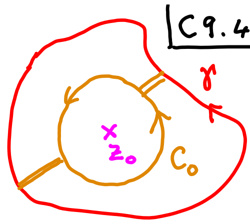
- $e^{1/z}$ bzgl. $z_0 = 0$: $$e^{1/z} \overset{(C5.2a.4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n \qquad (4)$$

[Taylor-Entwicklung des Zählers um $z_0 = 1$]

- $\frac{z^2}{(z-1)^2}$ bzgl. $z_0 = 1$: (Pol der Ordnung 2) $$\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{1 + 2(z-1) + (z-1)^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)} + 1 \qquad (5)$$

9.4 Residuensatz

C9.4a



Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $G\setminus z_0$, mit einem isolierten <u>Pol</u> bei z_0, und γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg, der z_0 umschliesst. Dann gilt

$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z)} \overset{(3b.1)}{\underset{\text{Laurent-Reihe}}{=}} \oint_\gamma dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \underset{\text{Verforme Weg zum Kreis}}{=} \oint_{C_0} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (1)$$

vertausche mutig Summe u. Integral:

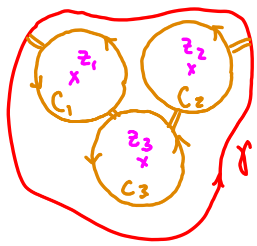
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\oint_{C_0} dz\,(z-z_0)^n}_{\overset{(C9.2d.6)}{=}\ 2\pi i\, \delta_{n,-1}} = \boxed{2\pi i \cdot a_{-1}} \overset{(3)}{=} \boxed{2\pi i \,\mathrm{Res}(f,z_0)} \qquad (2)$$

Offenbar trägt nur der $n = -1$ Term bei ! Der Koeffizient $a_{-1} \equiv \mathrm{Res}(f,z_0)$ (3)
spielt somit eine wichtige Rolle, und wird 'das <u>Residuum</u> v. f bei z_0' genannt:

Verallgemeinerung: $f(z)$ habe mehrere isolierte Pole,
und der Weg γ umschließe N Pole, bei $z_1, z_2, \dots, z_N$

<u>Residuensatz:</u>

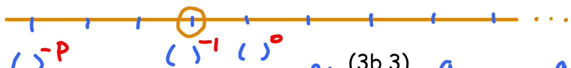
$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^{N} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_j)} \qquad (4)$$



<u>Residuenformel</u> $\mathrm{Res}(f,z_0) = \,?$ (Herleitung optional; Anwendung wichtig!)

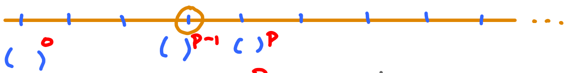
C9.4b

$f(z)$ sei (als Formel) gegeben, mit einem Pol der Ordnung p bei z_0.
Die Laurent-Entwicklung v. $f(z)$ bezüglich z_0 hat die allgemeine Form:

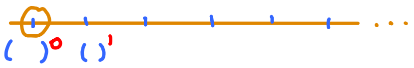


gesucht!

$$f(z) \overset{(3b.3)}{=} \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}^{\mathcal{O}(z-z_0)^{n\geq 0}} \qquad (1)$$



$$(z-z_0)^p f(z) \overset{(1)}{=} a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0)^1 + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + \mathcal{O}(z-z_0)^{n\geq p} \qquad (2)$$



$$\overbrace{\partial_z \dots \partial_z \partial_z}^{p-1} \left[(z-z_0)^p f(z)\right] \overset{(2)}{=} (p-1)(p-2)\dots(p-(p-1))\, a_{-1} \underbrace{(z-z_0)^{p-1\overbrace{-1-1\dots-1}^{-(p-1)}}}_{(z-z_0)^0 = 1} + \mathcal{O}(z-z_0)^{n\geq 1} \qquad (3)$$

$$\lim_{z\to z_0} \left[\partial_z^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]\right] \overset{(2)}{=} (p-1)!\, a_{-1} + \overbrace{\lim_{z\to z_0} \mathcal{O}(z-z_0)^{n\geq 1}}^{=0} \qquad (4)$$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(p-1)!}\partial_z^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]\right]} \qquad (5)$$

NÜTZLICH & WICHTIG!

In der Praxis kommt der Fall $p=1$ ('einfacher Pol') am häufigsten vor: C9.4c

$$\boxed{\mathrm{Res}_{p=1}(f,z_0)} \overset{(4b.5)}{=} \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(1-1)!}\partial_z^{1-1}\left[(z-z_0)^1\, f(z)\right]\right] = \boxed{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\, f(z)} \qquad (1)$$

(merken!)

<u>Beispiel 1: Pole d. Ordnung 1</u>

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \qquad (2)$$

hat Pol d. Ordnung $p=1$ bei $z_1 = i$
" " " " $z_2 = -i$

$$\mathrm{Res}(f,i) \overset{(1),(2)}{=} \lim_{z\to i}\left[\cancel{(z-i)}\,\frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)}\right] = \frac{1}{2i} \qquad (3)$$

$$\mathrm{Res}(f,-i) \overset{(1),(2)}{=} \lim_{z\to -i}\left[\cancel{(z-(-i))}\,\frac{1}{(z-i)\cancel{(z+i)}}\right] = \frac{1}{-2i} \qquad (4)$$

Faustregel: kürze Pol weg, setze $z = z_0$ im übrigen Faktor.

<u>Beispiel 2: Pol d. Ordnung 2</u>

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \qquad (4)$$

hat Pol d. Ordnung $p=2$ bei $z_0 = 1$

$$\mathrm{Res}_{p=2}(f,1) \overset{(4b.5)}{=} \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{(2-1)!}\partial_z^{2-1}\left[(z-1)^2\, f(z)\right]\right] = \lim_{z\to 1}\left[\partial_z\, \cancel{(z-1)^2}\,\frac{z^2}{\cancel{(z-1)^2}}\right] \qquad (5)$$

$$= 2z\Big|_{z=1} = \boxed{2} \qquad (6)$$

[konsistent mit (3b.5)] ✓

<u>Beispiel 3: Gewicht eines Lorentz-Peaks</u> C9.4d

$$\pi \overset{?!?}{=} I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{x^2+1} \equiv \lim_{R\to\infty} I_{\Gamma_0} \qquad (1)$$

$$I_{\Gamma_0} \equiv \int_{-R}^{R} dx\, \frac{1}{x^2+1} = \int_{\Gamma_0} dz\, \underbrace{\frac{1}{z^2+1}}_{\equiv f(z)} \qquad (2)$$

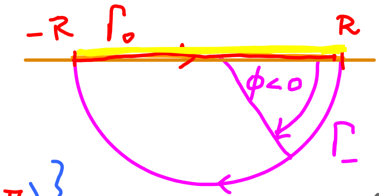
$$\Gamma_0 = \{z(x) = x\,,\ x \in (-R,R)\}$$

← 'analytische Fortsetzung von f(x) nach f(z)'

'Schließe' den Integrationsweg, um geschlossene Kontur zu erhalten (und Residuensatz zu nutzen):

Option 1:
in oberer
Halbebene:

Option 2:
in unterer
Halbebene:



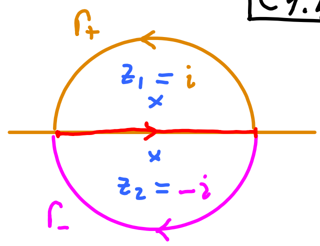
Parametrisierung der Halbkreise mit Radius R:

$$\Gamma_{\pm} = \{z(\phi) = Re^{i\phi},\ \phi \in (0, \pm\pi)\} \qquad (3)$$

Für beide Optionen ist das Linienintegral entlang Halbkreis gleich <u>Null</u> im Limes $R \to \infty$:

$$I_{\Gamma_\pm} \equiv \int_{\Gamma_\pm} dz\, f(z) \overset{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} d\phi\, \frac{dz}{d\phi}\, f(z(\phi)) = \int_0^{\pm\pi} d\phi\, \frac{iRe^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^2+1} \xrightarrow{R\gg 1} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad (4)$$

Also können wir die 'Kontur schließen': **C9.4e**



$$I \overset{(5d.4)}{=} \lim_{R\to\infty} \left[I_{\Gamma_0} + I_{\Gamma_+} \right] = \lim_{R\to\infty} \int_{(\Gamma_0,\Gamma_+)=\frown} dz\, f(z) \qquad (1)$$

oder: $(\Gamma_0, \Gamma_-) = \smile$

Finde Pole und Residuen von f(z):

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$ hat zwei Pole d. Ordnung 1, (2)

(siehe 4c.3): bei $z_1 = i$ mit $\mathrm{Res}(f, z_1) \overset{(4c.1)}{=} \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{i-(-i)} = \frac{1}{2i}$ (3)

(siehe 4c.d): und $z_2 = -i$ mit $\mathrm{Res}(f, z_2) \overset{(4c.1)}{=} \frac{1}{(z_2 - z_1)} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i}$ (4)

Laut Residuenzsatz liefert nur der von der Kontur <u>eingeschlossene</u> Pol einen Beitrag:

Option 1:

$$I \overset{(1)}{=} I_{\frown} = +2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_1) = +2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \boxed{\pi} \qquad (5)$$

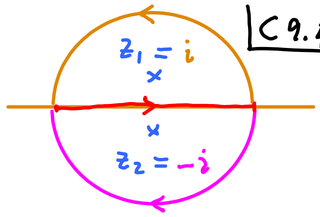
wegen <u>positiver</u>/<u>negativer</u> Integrationsrichtung, siehe (C9.3f.1 & 5)]

konsistent! ☺

Option 2:

$$I \overset{(1)}{=} I_{\smile} = -2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_2) = -2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = \boxed{\pi} \qquad (6)$$

<u>Kurzfassung für Erfahrene</u> **C9.4f**



$$I \overset{(C5.1l.2)}{=} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+1}} = \int_{\frown} dz\, f(z) = \int_{\smile} dz\, f(z) \qquad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$ hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei $z = \pm i$ (2)

$$\mathrm{Res}(f, i) \overset{(5c.1)}{=} \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}, \qquad \mathrm{Res}(f, -i) \overset{(5c.1)}{=} \frac{1}{-i-i} = -\frac{1}{2i} \qquad (3)$$

$$I \overset{(1)}{=} I_{\frown/\smile} = \pm 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, \pm i) = \pm 2\pi i \cdot \frac{1}{(\pm 2i)} = \boxed{\pi} \qquad (4)$$

Allgemeine Faustregel: schließen der Kontur entlang Halbkreis funktioniert, falls

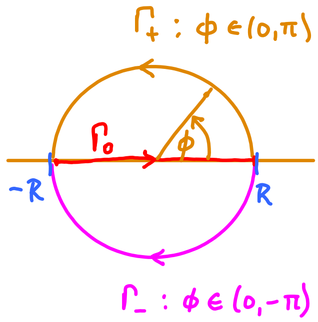
$$I_{\Gamma_+} \overset{(5d.4)}{=} \int_{\Gamma_+} dz\, f(z) \overset{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} d\phi \underbrace{\frac{dz}{d\phi}}_{iRe^{i\phi} = iz} f(z(\phi)) \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad (5)$$

also, falls: $\boxed{z\, f(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0}$ für $\phi \in (0, \pm\pi)$ (6)

Beispiel 4: Fourier-Transformation v. Lorenz-Peak

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, e^{-\gamma|t|} \overset{(C6.3c.6)}{=} \frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2} \quad (1) \quad \Longleftrightarrow \quad I(t) \equiv \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-it\omega}\,\frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2} \overset{?}{=} e^{-\gamma|t|}} \quad (2)$$

Berechne (2) mittels Wegintegral; unterscheide $\begin{cases} -|t| = t<0 \\ +|t| = t>0 \end{cases}$



$$I_\pm(t \lessgtr 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \underbrace{e^{-i(\mp|t|)\omega}\,\frac{\gamma/\pi}{\omega^2+\gamma^2}}_{\equiv f_\pm(\omega)} \quad (3)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_0} dz\, f_\pm(z), \quad (4) \qquad f_\pm(z) = \frac{e^{\pm i|t|z}\,\gamma/\pi}{z^2+\gamma^2} \quad (5)$$

Füge Halbkreis hinzu, um geschlossene Kontur zu erhalten:

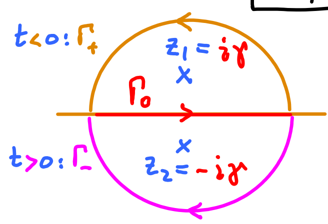
Es gibt zwei Optionen: $\Gamma_\pm = \left\{ z(\phi) = Re^{i\phi} = x(\phi) + iy(\phi),\ \phi \in (0, \pm\pi) \right\}$ (6)

$$\int_{\Gamma_\eta} dz\, \frac{e^{\pm i|t|z}}{z^2+\gamma^2} \overset{(C9.2b.2)}{\underset{(4d.4)}{=}} \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{\eta\pi} d\phi\, \frac{iRe^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^2+\gamma^2}\, \underbrace{e^{\pm i|t|x(\phi)}}_{\text{hat Betrag} = 1}\, e^{\pm i|t|\, i y(\phi)} \xrightarrow{R\gg 1} \sim \frac{e^{\mp|t|y(\phi)}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\ ? \quad (7)$$

($\eta = +$ oder $-$)

Für $t \lessgtr 0$ brauchen wir $\mp y(\phi) < 0$, also $y(\phi) \gtrless 0$, also $\Gamma_\pm$ (8)

Fazit: schließe Weg in oberen Halbebene für $-|t| = t<0$
in unteren Halbebene für $|t| = t>0$ (1)



$$\boxed{I_\pm(t \lessgtr 0) \overset{(i.4,\, i.6)}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{(\Gamma_0,\, \Gamma_\pm)} dz\, f_\pm(z)} \quad (2)$$

$$f_\pm(z) \overset{(i.5)}{=} \frac{\gamma/\pi\, e^{\pm i|t|z}}{(z-i\gamma)(z+i\gamma)} = \frac{\gamma/\pi\, e^{\pm i|t|z}}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad (3)$$

hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei $\begin{cases} z_1 = i\gamma \\ z_2 = -i\gamma \end{cases}$

Residuensatz: nur eingeschlossener Pol trägt bei, also brauchen wir nur:

$$\mathrm{Res}(f_+, z_1) \overset{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi}{(z_1 - z_2)}\, e^{+i|t|z_1} = \frac{\gamma/\pi\, e^{+i|t|i\gamma}}{i\gamma - (-i\gamma)} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{2\pi i} \quad (4)$$

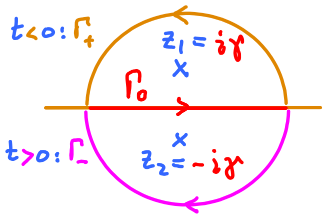
$$\mathrm{Res}(f_-, z_2) \overset{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi}{(z_2 - z_1)}\, e^{-i|t|z_2} = \frac{\gamma/\pi\, e^{-i|t|(-i\gamma)}}{-i\gamma - i\gamma} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{-2\pi i} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} I_+ &\overset{(2)}{=} +2\pi i\, \mathrm{Res}(f_+, z_1) \overset{(4)}{=} \frac{2\pi i}{2\pi i}\, e^{-|t|\gamma} \quad (6) \\ I_- &\overset{(2)}{=} -2\pi i\, \mathrm{Res}(f_-, z_2) \overset{(5)}{=} \frac{-2\pi i}{-2\pi i}\, e^{-|t|\gamma} \quad (7) \end{aligned}\right\} = \boxed{e^{-\gamma|t|}} \checkmark \overset{}{=} (i.2) \quad (8)$$

wegen Integrationsrichtung, siehe (C9.2l.1 & 5)]

Kurzfassung für Erfahrene

$$I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-it\omega}\, \frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2} \overset{?}{\underset{(5)}{=}} e^{-\gamma|t|} \qquad (1)$$



$$I_\pm(t \lessgtr 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \underbrace{e^{-i(\mp|t|)z}\, \frac{\gamma/\pi}{z^2+\gamma^2}}_{\equiv f_\pm(z)} = \int dz\, f_\pm(z) \qquad (2)$$

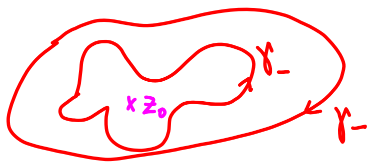
denn $\dfrac{e^{\pm i|t|z}}{R} \sim \dfrac{e^{\mp|t|\,\mathrm{Im}(z)}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ für $\mathrm{Im}(z) \to \gtrless 0$, also entlang $\Gamma_\pm$ ✓ (3)

$f_\pm(z) = \dfrac{\gamma/\pi \;\, e^{\pm i|t|z}}{(z-i\gamma)(z+i\gamma)}$ hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei $\pm i\gamma$ (4)

$$I_\pm(t \lessgtr 0) = I = \pm 2\pi i\, \mathrm{Res}(f_\pm, \pm i\gamma) = \pm 2\pi i\, \frac{\gamma/\pi \;\, e^{\pm i|t|(\pm i\gamma)}}{\pm 2 i\gamma} = \boxed{e^{-\gamma|t|}} \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C9.3-4 Analytische Funktionen II

$$I_n^{(\pm)} \equiv \oint_{\gamma_\pm} dz\, (z-z_0)^n = \pm 2\pi i\, \delta_{n,-1}$$



Reihenentwicklungen:

- wenn f analytisch ist: $f(z) \overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

- wenn f einen Pol der Ordnung p bei $z = z_0$ hat:

$$f(z) \overset{\text{Laurent}}{=} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{\overbrace{a_{-1}}^{\equiv \mathrm{Res}(f,z_0)}}{(z-z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

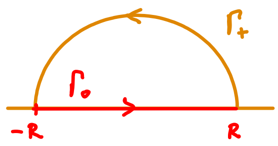
$f(z)$ habe mehrere isolierte Pole,

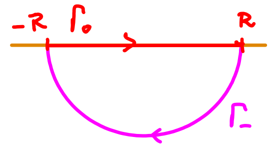
und der Weg γ umschließe N Pole, bei $z_1, z_2, \dots, z_N$

Residuensatz: $\displaystyle\oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^{N} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_j)$

Residuenformel: $\displaystyle\mathrm{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(p-1)!}\,\partial_z^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]\right]$

Kontur schließen: ZC 9.3-4b





$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_0} dz\, f(z) \qquad (1)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{(\Gamma_0,\Gamma_\pm)} dz\, f(z) \qquad (2) \qquad \text{falls} \quad \lim_{|z|\to\infty} \left[z\, f(z) \right] = 0$$

$$= \pm 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(f, z_j^\pm), \qquad (3) \qquad \left.\begin{matrix} z_j^+ \\ z_j^- \end{matrix}\right\} \text{Pole innerhalb } \Gamma_\pm$$

Diese Strategie funktioniert insbesondere für Integrale folgender Form:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j \qquad \text{falls:} \quad m \geq n+2 \qquad (4)$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{Q(\omega)} = \begin{cases} \oint dz\, \dfrac{e^{+iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls} \quad t < 0 \qquad (5) \\[2ex] \oint dz\, \dfrac{e^{-iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls} \quad t > 0 \qquad (6) \end{cases}$$

$$Q(\omega) = \sum_{j=2}^{m} q_j\, \omega^j$$