C9: Komplexe Analysis (KA)

Saff & Snyder, Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall, 1976.

C9.1a

Cauchy

Motivation: Differenzieren und Integrieren in der komplexen Ebene

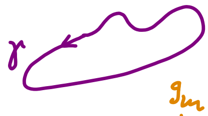
Vorschau: Eine komplexe Funktion $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei nur von der Kombination

$z = x + iy$ abhängig, $(x,y) \mapsto f(z) = f(x+iy) \equiv \underbrace{u(x,y)}_{\text{Realteil}} + i\,\underbrace{v(x,y)}_{\text{Imaginärteil}}$ (1)

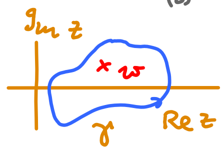
und 'komplex differenzierbar' ($\frac{df}{dz}$ existiert) in $\mathcal{U}$. Dann gelten (u.a.):

- Cauchy-Riemann-Gleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (2)

- Geschlossene Linienintegrale in $\mathbb{C}$ liefern 0: $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$ (3)



- Integralsatz von Cauchy: $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz\, \frac{f(z)}{z-w}$ (4)



- 'Residuen-Satz': Sei $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n$ (5) (verallgmeinerte Taylor-Reihe, mit Divergenz bei w)

dann: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz\, g(z) = a_{-1}$ (6)

Wichtige Anwendung der KA in der Physik: als Hilfsmittel beim Berechnen von Integralen. Besonders wichtig für 'konforme Feldtheorie' & Stringtheorie

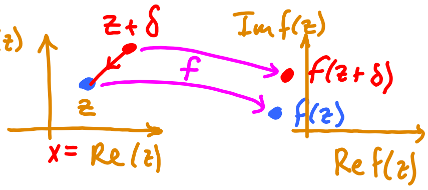
C9.1 Komplexe Differenzierbarkeit

C9.1b

Definition: Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ einer komplexen Variable $z \equiv x + iy$,

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ [$\mathcal{U}$ offen] (wichtig!) (1)

$z \mapsto f(z)$

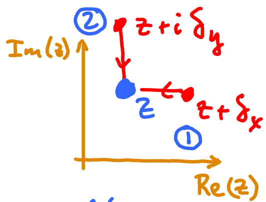


heißt 'komplex differenzierbar' an der Stelle $z \in \mathcal{U}$ falls folgender Limes existiert:

$$\boxed{\lim_{\mathbb{C} \ni \delta \to 0} \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} \equiv f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz}} \quad (2)$$

(beachte Notation: totale Ableitung nach z)

Anmerkung: Der Limes (2) muss unabhängig von der Richtung sein, entlang der δ nach Null strebt. Das ist gewährleistet, wenn f von x und y nur in der Kombination $x+iy$ abhängt.



①: $\delta = \delta_x$:
$$\lim_{\delta_x \to 0} \frac{\overbrace{f(z+\delta_x)}^{f(x+\delta_x+iy)} - f(z)}{\delta_x} = \frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial x} = f'(z)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1} = f'(z) \quad (3)$$

Kettenregel

②: $\delta = i\delta_y$:
$$\lim_{i\delta_y \to 0} \frac{\overbrace{f(z+i\delta_y)}^{f(x+i(y+\delta_y))} - f(z)}{i\delta_y} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{i}}\, f'(z)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=\cancel{i}} = f'(z) \quad (4)$$

Definition: Jeder Punkt z bei dem $f'(z)$ nicht existiert, ist eine 'Singularität' von $f(z)$

Definition: f heisst 'analytisch' auf $\mathcal{U}$, falls f in ganz $\mathcal{U}$ komplex differenzierbar ist. C9.1c (1)

Anmerkung zur Nomenklatur: Manche Autoren nennen eine Funktion 'holomorph' in $\mathcal{U}$ falls sie (1) erfüllt, und 'analytisch' in $\mathcal{U}$ falls ihre Taylor-Entwicklung überall in $\mathcal{U}$ konvergiert. Man kann zeigen, dass eine komplexe Funktion genau dann holomorph ist, wenn sie analytisch ist. Deswegen verzichten wir hier auf eine Unterscheidung.

Beispiele für analytische Funktionen:

- z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$ sind analytisch auf $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ (2)
- $\frac{1}{z - z_0}$ ist analytisch auf $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus z_0$ [das ganze $\mathbb{C}$, ausser z_0] (3)

Beispiele für nicht-analytische Funktionen:

- $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ hängt nicht nur von $x+iy$ ab, sondern auch von $x-iy$ (4)
- $\bar{z} = x - iy$ ist nicht eine analytische Funktion von $z = x+iy$ (5)

denn Limes ist nicht eindeutig: $\lim_{\delta \to 0} \frac{\left(\overline{z+\delta} - \bar{z}\right)}{\delta} = \frac{\bar{\delta}}{\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta = \delta_x = \bar{\delta} \\ -1 & \text{falls } \delta = i\delta_y = -\bar{\delta} \end{cases}$ (6)

C9.1d

Ableitungsregeln für analytische Funktionen (wie im Reellen):

(i) Linearität: $\frac{d}{dz}\left[\lambda f(z) + \mu g(z)\right] = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$ (1)

(ii) Produktregel: $\frac{d}{dz}\left[f(z)\, g(z)\right] = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)$ (2)

Folgerung: $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ [Abl. v. Polynomen wie im Reellen] (3)

(iii) Quotientenregel: $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}$ falls $g(z) \neq 0$ (4)

(iii) Kettenregel: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))\, g'(z)$ (5)

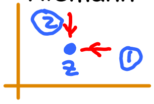
Komplexe Differenzierbarkeit ist viel stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit. Wir diskutieren nur einige ihrer weitreichenden Folgen für analytische Funktionen.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Cq.1e

Cauchy

Riemann



Schreibe $\quad z \equiv x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$ (1)

$$f(z) = f(x+iy) \equiv u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad (u, v \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

Also: $\quad u \equiv \mathrm{Re}\, f(z) , \qquad v \equiv \mathrm{Im}\, f(z)$ (3)

$f(z)$ sei komplex differenzierbar, dann gilt:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \overset{(b.3)}{=} \partial_x f(z) \overset{(b.4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z) \tag{4}$$

Aber aus (2) folgt:

$$f'(z) \overset{(4)}{=} \partial_x f(z) \overset{(2)}{=} \partial_x u(x,y) + i\, \partial_x v(x,y) \tag{5}$$

und auch:

$$f'(z) \overset{(4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z) \overset{(2)}{=} \frac{1}{i} \partial_y u(x,y) + i \frac{1}{i} \partial_y v(x,y) \tag{6}$$

Laut (4) ist (5) = (6):

$$\partial_x u + i\, \partial_x v \overset{(5)}{=} f'(z) \overset{(6)}{=} -i\, \partial_y u + \partial_y v \tag{7}$$

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\boxed{\overset{\mathrm{Re}(7)}{\partial_x u = \partial_y v}} , \quad (8) \qquad \boxed{\overset{\mathrm{Im}(7)}{\partial_x v = -\partial_y u}} \quad (9)$$

Folgerung: komplexe Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Cauchy-Riemann-Gleichungen (CRG)

Beispiel:

Cq.1e'

$$f(z) = (1 + iz)^2 = 1 + 2iz - z^2 \tag{1}$$

$$= 1 + 2i(x+iy) - (x+iy)^2 \tag{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2(-y) - (x^2 - y^2)} + i \underbrace{(2x - 2xy)} \tag{3}$$

$$= u(x,y) + i\, v(x,y) \tag{4}$$

$$u(x,y) = 1 - 2y - x^2 + y^2 , \qquad v(x,y) = 2x - 2xy \tag{5}$$

Gelten CRG?

$$\partial_x u = -2x , \qquad \partial_x v = 2 - 2y = -\partial_y u \quad \checkmark$$ [also gilt (e.9)] (6)

$$\partial_y u = -2 + 2y , \qquad \partial_y v = -2x = \partial_x u \quad \checkmark$$ [also gilt (e.8)] (7)

Umkehrschluss gilt auch: Cauchy-Riemann-Gl. $\Rightarrow$ komplexe Differenzierbarkeit: C9.1f

Satz: Sei $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Abbildung, mit $f = u + iv$ d.h. (1)

$$u(x,y) \equiv \mathrm{Re}\, f(x+iy), \qquad v(x,y) \equiv \mathrm{Im}\, f(x+iy) \tag{2}$$

Falls u, v stetig differenzierbar sind für $z \in \mathcal{U}$ und die Cauchy-Riemann-Gl. erfüllen, ist f komplex differenzierbar an der Stelle z.

Begründung: (Optional) Schreibe $\delta = \delta_x + i\delta_y$, mit $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{R}$ (3)

Taylor für u: $$u(x+\delta_x, y+\delta_y) \overset{(C5.5b.1)}{=} u(x,y) + \delta_x \partial_x u(x,y) + \delta_y \partial_y u(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{4}$$

Taylor für v: $$i v(x+\delta_y, y+\delta_y) \overset{(C5.5b.1)}{=} iv(x,y) + i\,\delta_x \partial_x v(x,y) + i\,\delta_y \partial_y v(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{5}$$

(4+5)
-(4+5)$|_{\delta=0}$: $$f(z+\delta) - f(z) = \delta_x \partial_x u + i\,\delta_x \partial_x v + \delta_y \partial_y u + \delta_y i \partial_y v + \mathcal{O}(|\delta^2|) \tag{6}$$

Nutze CRG, um ∂_y durch $_x\partial$ zu ersetzen: C9.1g

(f.6): $$f(z+\delta) - f(z) = \delta_x \overset{①}{\partial_x} u + i\,\delta_x \overset{②}{\partial_x} v + \delta_y \underbrace{\overset{③}{\partial_y} u}_{-\partial_x v} + \delta_y i \underbrace{\overset{④}{\partial_y} v}_{\partial_x u} + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{1}$$

CRG: (e.9) ... (e.8)

$$= (\underbrace{\overset{①}{\delta_x} + i\overset{④}{\delta_y}}_{\delta})\partial_x u + (\underbrace{\overset{②}{\delta_x} + i\overset{③}{\delta_y}}_{\delta}) i \partial_x v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{2}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(z+\delta) - f(z)\right] = \partial_x (u + iv) = \boxed{\partial_x f(z)} \overset{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \tag{3}$$

Es geht auch anders herum: nutze CRG, um ∂_x durch ∂_y zu ersetzen:

(f.6): $$f(z+\delta) - f(z) = \delta_x \underbrace{\overset{①}{\partial_x} u}_{\partial_y v} + i\,\delta_x \underbrace{\overset{②}{\partial_x} v}_{-\partial_y u} + \delta_y \overset{③}{\partial_y} u + \delta_y i \overset{④}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{4}$$

CRG: (e.8) ... (e.9)

$$= -i(\underbrace{\overset{②}{\delta_x} + i\overset{③}{\delta_y}}_{\delta})\partial_y u + -i(\underbrace{\overset{①}{\delta_x} + i\overset{④}{\delta_y}}_{\delta}) i \partial_y v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \tag{5}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(z+\delta) - f(z)\right] = \frac{1}{i}\partial_y (u + iv) = \boxed{\frac{1}{i}\partial_y f(z)} \overset{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \tag{6}$$

Fazit: f ist komplex differenzbierbar in z !! $\square$

Anmerkung: $\left.\begin{array}{l}(x,y) \mapsto u(x,y) \equiv \mathrm{Re}\, f(x+iy) \\ (x,y) \mapsto v(x,y) \equiv \mathrm{Im}\, f(x+iy)\end{array}\right\}$ sind beide Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C9.1h (1)

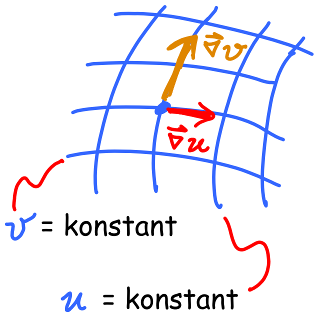
Folgerung aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen:
Die Höhenlinien dieser Abbildungen (1) sind orthogonal zu einander: (2)

Begründung:

(V3.2f.7)

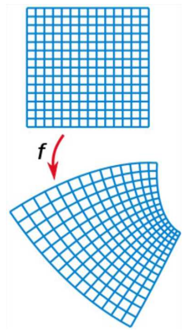
Höhenlinien von u sind $\perp$ $\vec\nabla u = \begin{pmatrix}\partial_x u \\ \partial_y u\end{pmatrix}$ (3)
($u(x,y)$ = konstant):

Höhenlinien von v sind $\perp$ $\vec\nabla v = \begin{pmatrix}\partial_x v \\ \partial_y v\end{pmatrix}$ (4)
($v(x,y)$ = konstant):



$$\vec\nabla u \cdot \vec\nabla v = (\partial_x u)(\underbrace{\partial_x v}_{-\partial_y u}) + (\partial_y u)(\underbrace{\partial_y v}_{\partial_x u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec\nabla u \perp \vec\nabla v} \quad \square \qquad (5)$$

CRG: (e.9) (e.8)



Weitere Folgerung: eine analytische Funktion f definiert [via (1)]
eine 'konforme' ('winkeltreue') Abbildung zwischen den
Koordinatensystemen (x,y) und $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ (6)

C9.2 Integration im Komplexen

C9.2a

Hauptsatz der Analysis für komplexe Funktionen einer reellen Variable:

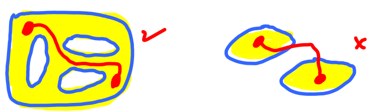
Sei $f(t) : (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige, stetige Funktion einer reellen Variable t, mit Stammfunktion $F(t)$, d.h. $F'(t) = f(t) \quad \forall\ t \in (t_0, t_1)$, dann

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} dt\, f(t) = F(t_1) - F(t_0)} \qquad \text{[genau wie im Reellen]} \qquad (1)$$

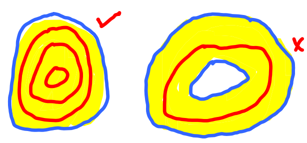
Triviales Beispiel: $\int_{t_0}^{t_1} dt\, [\sin t + i \cos t] = [-\cos t + i \sin t]_{t_0}^{t_1}$ (2)

Integration einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen, $z = x + iy$, entspricht einem Linienintegral in der komplexen Ebene. Dafür benötigen wir folgende Begriffe:

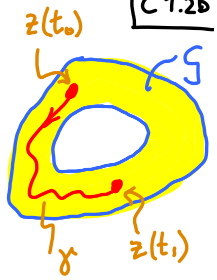
Definition: Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ (oder auch $G \subset \mathbb{R}^n$) heißt 'Gebiet' falls (3)
$G \neq \emptyset$ (nicht leer) und 'zusammenhängend' ist (d.h. je zwei Punkte können durch eine stetige Kurve verbunden werden, welche das Gebiet nicht verläßt).



Definition: ein Gebiet ist 'einfach zusammenhängend', falls sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen lässt. (4)



Definition: Komplexes Wegintegral (oder 'Kontur-Integral')



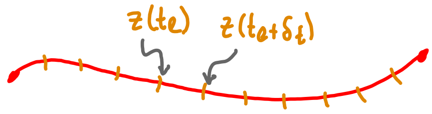
Sei γ eine glatte, gerichtete Kurve in einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, parametrisiert durch die reelle Variable $t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$.

$$\gamma: (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \to G \subset \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (1)$$

Ferner sei $f: G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet G.

Das 'komplexe Wegintegral ('Konturintegral') von $f(z)$ entlang γ ' ist wie folgt definiert:

$$\boxed{\int_\gamma dz\, f(z) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{dz(t)}{dt}\, f(z(t))} \qquad (2)$$



Interpretation als Riemann-Summe:

$$= \lim_{\delta_t \to 0} \delta_t \sum_\ell \frac{dz(t_\ell)}{dt}\, f(z(t_\ell)) = \lim_{\delta_t \to 0} \sum_\ell \big(z(t_\ell + \delta_t) - z(t_\ell)\big)\, f(z(t_\ell)) \qquad (3)$$

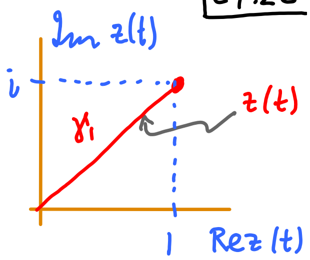
Analog zu Linienintegral eines 2d-Vektorfeldes, $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r} \mapsto \vec{u}(\vec{r})$ (4)

$$\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \overset{(V1m.6)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{u}(\vec{r}(t)) \overset{(V1m.2)}{=} \lim_{\delta_t \to 0} \sum_\ell \big(\vec{r}(t_\ell + \delta_t) - \vec{r}(t_\ell)\big) \cdot \vec{u}(\vec{r}(t_\ell)) \qquad (5)$$

Kann gezeigt werden: Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung (d.h. eine andere Parametrisierung des selben Weges liefert dasselbe Ergebnis).

Einfaches Beispiel 1

$$f(z) = z, \qquad \gamma_1 = \{ z(t) = (1+i)t, \quad t \in (0,1) \} \qquad (1)$$

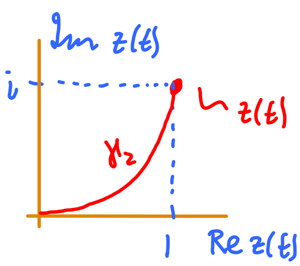


$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt\, \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{(1):\ 1+i}\, \overbrace{\big((1+i)t\big)}^{f(z(t)) = z(t)} \qquad (2)$$

$$= (1+i)^2 \int_0^1 dt\, t = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i \qquad (3)$$

Einfaches Beispiel 2

$$f(z) = z, \qquad \gamma_2 = \{ z(t) = t + it^2, \quad t \in (0,1) \} \qquad (4)$$



$$\int_{\gamma_2} dz\, z \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt\, \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{(5):\ (1+2it)}\, \overbrace{(t + it^2)}^{f(z(t)) = z(t)} \qquad (5)$$

$$= \int_0^1 dt\, \big[t + (2i + i)t^2 - 2t^3 \big] = \frac{1}{2} + 3i \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} = i \overset{!!}{=} (3)$$

kein Zufall, siehe Seite C9.2e !

Schnellster Rechenweg, mittels Gl. (C9.2e.5):

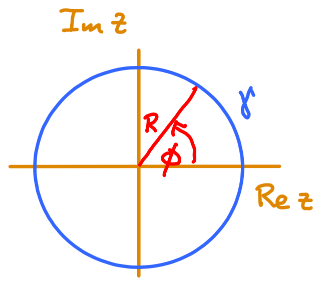
$$\int_\gamma dz\, z = \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z(0)}^{z(1)} = \frac{1}{2}(1+i)^2 - 0 = (3) \ ✓$$

Wichtiges Beispiel: Kreisintegral v. z^n $(n \in \mathbb{Z})$ um den Ursprung herum

C9.2d

γ sei Kreis in $\mathbb{C}$, mit Radius R, Mittelpunkt bei $z = 0$:

$$\gamma : \{ z(\phi) = R e^{i\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi) \} \qquad (1)$$



Substitution: γ : $\quad z(\phi) = Re^{i\phi}$ (2)

$$\boxed{I_n \equiv \oint_\gamma dz\, z^n} \overset{(b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{\frac{dz}{d\phi}}_{} \left(z(\phi) \right)^n \qquad (3)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi\, \overbrace{iRe^{i\phi}}^{(2)} \left(Re^{i\phi} \right)^n \qquad (4)$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\phi(1+n)} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \quad (5a) \\ \dfrac{iR^{n+1}}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)\phi} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{falls } n \neq -1 \quad (5b) \end{cases}$$

$$= \boxed{2\pi i\, \delta_{n,-1}} \qquad (6)$$

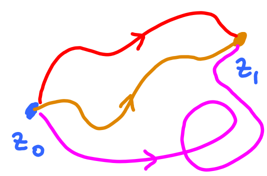
Wegunabhängigkeit

C9.2e

Satz: $f(z) : G \to \mathbb{C}$ sei stetig und dessen Stammfunktion $F(z)$ existiere überall in G, d.h. $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$. (1)

Dann gilt für jede glatte Kontur $\gamma \subset G$, mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 :

$$\boxed{\int_\gamma dz\, f(z) = F(z_1) - F(z_0)} \qquad (2)$$



$\Rightarrow$ Ergebnis hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten ab, nicht vom Weg dazwischen! [Beispiel: (C9.2c.4) = (C9.2c.8)]

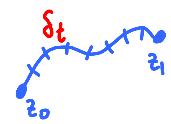
Begründung: Parametrisiere Weg mit $\gamma : \{ (t_0, t_1) \to z(t) \subset G, \quad z(t_0) = z_0, \; z(t_1) = z_1 \}$ (3)

Dann
$$\int_\gamma dz \underbrace{f(z)}_{(1):\, F'(z)} \overset{(b.2)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz}{dt} F'(z(t)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \left[F(z(t)) \right] \qquad (4)$$

$$\overset{(a.1)}{=} F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \overset{(3)}{=} F(z_1) - F(z_0) \quad \square. \qquad (5)$$

(4) ermöglicht Interpretation für Wegintegral als Summe:

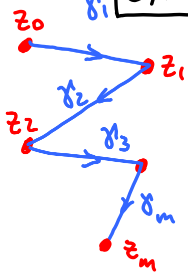
$$\int_\gamma dz\, f(z) \overset{(4)}{=} \lim_{\delta_t \to 0} \delta_t \left(\frac{dF}{dt} \right)_\ell = \lim_{\delta_t \to 0} \sum_\ell \delta F_\ell \qquad (6)$$



<u>Definition:</u> Eine 'zusammengesetzte Kontur' $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$

bestehe aus glatten, gerichteten Teilstücken γ_i. Das Wegintegral

einer auf Γ stetigen Funktion $f(z)$ ist definiert durch:



$$\int_\Gamma dz\, f(z) \equiv \int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2} dz\, f(z) + \dots + \int_{\gamma_m} dz\, f(z) \qquad (1)$$

Satz (e.2) gilt für jedes Zeilstück, also auch für zusammengesetzte Kontur:

$$\int_\gamma dz f(z) = [F(\cancel{z_1}) - F(z_0)] + [F(\cancel{z_2}) - F(\cancel{z_1})] + [F(z_3) - F(\cancel{z_2})] + \dots + [F(z_m) - F(\cancel{z_{m-1}})] = F(z_m) - F(z_0) \qquad (2)$$

<u>Korollar</u> [mit denselben Voraussetzungen wie (e.2)]:
Für einen <u>geschlossenen</u> Weg ist Anfangspunkt = Endpunkt: $z_0 = z_m$

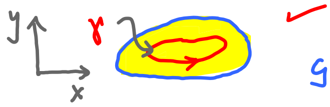
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\oint dz\, f(z) \overset{(2e.2)}{=} 0} \qquad (3)$$

Beispiel: (2d.5b) für $n \neq -1$: $f(z) = z^n$, $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$

[Für $n = -1$, (2d.5a), sind Voraussetzungen v. (e.2) nicht erfüllt, da die Stammfunktion von $1/z$ nämlich $\ln(z)$, nicht überall auf einem geschlossenem Weg um 0 herum existiert.]

Falls $f(z)$ analytisch ist, läßt sich (3) zeigen auch ohne Verweis auf die $F(z)$, und zwar mittels Satz. von Cauchy:

<u>Satz v. Chauchy</u>



Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet,

$$f: G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) \overset{(C9.1e.2)}{\equiv} u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad (1)$$ eine analytische Funktion auf G

$$\gamma: (0,1) \to G, \quad t \mapsto z(t) \equiv x(t) + i y(t) \qquad (2)$$ eine stetige, <u>geschlossene</u> Kurve in G.

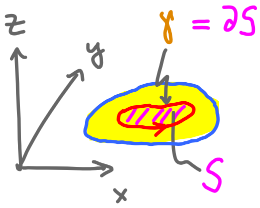
Dann gilt:

$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 0} \qquad (3)$$

<u>Begründung:</u>

$$I \equiv \oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt\, \frac{d\, \overset{(2)\; x+iy}{z(t)}}{dt} \cdot \overset{(1)\; u+iv}{f(z(t))} \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\big(x(t) + i\, y(t)\big) \cdot \Big(\underbrace{u(x(t), y(t))}_{\equiv u(\vec{r}(t))} + i\, \underbrace{v(x(t), y(t))}_{\equiv v(\vec{r}(t))}\Big) \qquad (5)$$



Interpretiere (5) als reelles Wegintegral in der x-y-Ebene,

entlang dem Weg γ: $\vec{r}: (0,1) \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ (6)

Realteil v. (5):

$$\boxed{\mathrm{Re}(I) = \int_0^1 dt \left[\dot{x}(t)\, u(\vec{r}(t)) \overset{(i)^2}{-} \dot{y}(t)\, v(\vec{r}(t))\right]} \qquad (7a)$$

Imaginärteil v. (5):

$$\boxed{\mathrm{Im}(I) = \int_0^1 dt \left[\dot{x}(t)\, v(\vec{r}(t)) + \dot{y}(t)\, u(\vec{r}(t))\right]} \qquad (7b)$$

(C9.2g.7a)
$$\mathrm{Re}(I) = \int_0^1 dt\, \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(u, -v, 0)^T}_{\equiv \vec{P}(\vec{r}(t))} \qquad (1a)$$

(V1m.6)
$$= \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{P}, \qquad \vec{P} \equiv \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ -v(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2a)$$

(C9.2g.7b)
$$\mathrm{Im}(I) = \int_0^1 dt\, \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(v, u, 0)^T}_{\equiv \vec{Q}(\vec{r}(t))} \qquad (1b)$$

(V1m.6)
$$= \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{Q}, \qquad \vec{Q} \equiv \begin{pmatrix} v(\vec{r}) \\ u(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2b)$$

Schreibe diese Wegintegrale mittels Stokes als Flussintegrale, über die von γ eingeschlossene Fläche (nenne sie S) in der x-y-Ebene, mit $\delta\vec{S} = \vec{e}_z\, \delta x\, \delta y$

(V3.6f.4)
$$\mathrm{Re}(I) = \int_S d\vec{S} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}(\vec{r})\right) \qquad (3a)$$

$$\overset{(1)}{=} \int_S dx\, dy \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}(\vec{r})\right)_z \qquad (4a)$$

$$= \int_S dx\, dy \left(\underbrace{\partial_x(-v)}_{\partial_y u} - \partial_y u\right) \qquad (5a)$$

CRG (C9.1e.9)

$$= 0 \qquad (6a)$$

(V3.6f.4)
$$\mathrm{Im}(I) = \int_S d\vec{S} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{Q}(\vec{r})\right) \qquad (3b)$$

$$\overset{(1)}{=} \int_S dx\, dy \left(\vec{\nabla} \times \vec{Q}(\vec{r})\right)_z \qquad (4b)$$

$$= \int_S dx\, dy \left(\underbrace{\partial_x u}_{\partial_y v} - \partial_y v\right) \qquad (5b)$$

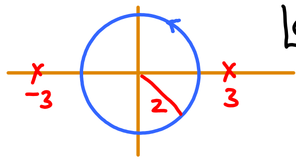
CRG (C9.1e.8)

$$= 0 \qquad (6b)$$

Wir durften Cauchy-Riemann-Gleichungen (C9.1e.8-9) nutzen, da $f(z)$ auf G analytisch ist! $\square$

Beispiel

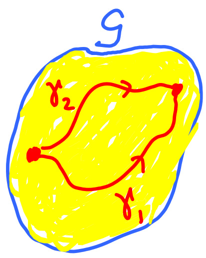
$$\oint_{\gamma: |z| = 2} dz\, \frac{e^z}{z^2 - 9} = 0 \qquad (1)$$



denn der Integrand ist überall analytisch ausser bei $z = \pm 3$, d.h.

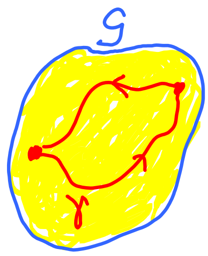
überall analytisch in einem Gebiet, das γ enthält, also gilt der Satz v. Cauchy, (2g.3).

Faustregel: geschlossenes Wegintegral verschwindet, falls $f(z)$ analytisch ist 'innerhalb des Wegs' (= 'im vom Weg eingeschlossenen Gebiet') !



Korollar aus Satz v. Cauchy (mit denselben Voraussetzungen): Verschiedene Wegintegrale mit demselben Start- und Endpunkt sind gleich:

$$\boxed{\int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z)} \qquad (2)$$



Begründung $\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$ (2) bildet geschlossenen Weg,

also: $$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) - \int_{\gamma_2} dz\, f(z) = \oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(2g.3)}{=} 0 \qquad \square. \qquad (4)$$

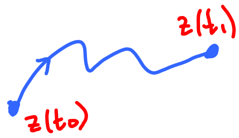
Zusammenfassung: C9.1-2 Analytische Funktionen I

Def: Komplexe Funktion $\quad f(z) = \begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \end{cases}$

ist analytisch in $\mathcal{U}$, falls $f'(z)$ überall in $\mathcal{U}$ existiert.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (CRG): $\quad \partial_x u = \partial_y v \quad (2) \quad \partial_x v = -\partial_y u$

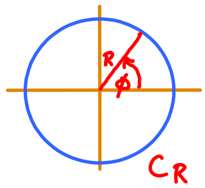
Def: Komplexes Wegintegral: $\quad \int_\gamma dz\, f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d\,z(t)}{dt}\, f(z(t))$



Weg-Parametrisierung: $z = z(t)$

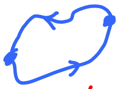
Wichtiges Beispiel: $n \in \mathbb{Z}$

$$I_n \equiv \oint_{C_R} dz\, z^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases} = 2\pi i\, \delta_{n,-1}$$



Satz v. Cauchy: falls $f(z)$ analytisch ist auf einfach zusammenhängendem Gebiet, gilt:

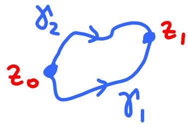
Geschlossener Weg liefert 0: $\quad \oint_\gamma f(z) = 0$



$\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$

$\Longleftrightarrow$

Wegunabhängigkeit: $\quad \int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z)$



$$= F(z_1) - F(z_0), \quad \text{mit} \quad F'(z) = f(z)$$