

V3.6 Rotation, Satz von Stokes

V3.6a

Anmerkung: Für die Behandlung des Kreuzprodukts werden wir nur orthonormale Basisvektoren benutzen, mit trivialer Metrik; somit ist die Index-Stellung (oben/unten) egal $v^i = v_i$ (für Diskussion des Kreuzprodukts wenn die Metrik nicht trivial ist, siehe Lg4.5, und AD-Buch, L6.4)

Rotation in kartesischen Koordinaten (Erinnerung)

Vektorfeld: $\vec{u} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ u^3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \vec{e}_j u^j(\vec{x})$ (1)

Definition: 'Rotation von \vec{u} ': (nur in d=3 Dimensionen definiert)

$\text{rot } \vec{u} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \mapsto \text{rot } \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{x})$ (2)

Es $\equiv \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j u^k = \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix}$ (3)

Notationscheck: $\vec{\nabla} \times \vec{u} = (\vec{e}_j \partial_j) \times (\vec{e}_k u^k) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j u^k$ ✓ (4)

Erinnerung: Gradientenfelder sind 'wirbelfrei'

V3.6b

Für ein beliebiges (zweifach differenzierbares) Vektorfeld gilt:

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$ (1)

Beweis: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_k \varphi)$ (2)

ε_{ijk} ist antisymmetrisch: $= \vec{e}_i (-\varepsilon_{ikj}) \partial_j \partial_k \varphi$ (3)

Summationsindizes umbenennen: $k \leftrightarrow j$ $= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \varphi$ (4)

Satz v. Schwarz: $\partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi$ $= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi \stackrel{(2)}{=} -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)$ (5)

$(5) = -(5) \Rightarrow (5) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ ✓ (6)

Wirbelfelder sind 'quellfrei':

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (7)

(analog)

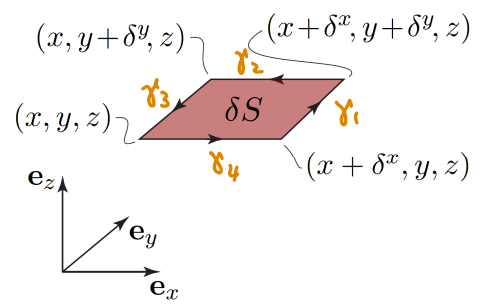
Geometrische Interpretation der Rotation: Zirkulation pro gerichteter Fläche

V3.6c

Betrachte rechteckiges Flächenelement $\delta \vec{S} = \hat{n} \delta S$

$\delta S = \delta^x \delta^y$ mit Eckpunkt bei (x, y, z) (1)

Wähle Koordinatenachsen so, dass $\hat{n} = \hat{e}_z$ (2)



'Zirkulation' von \vec{u} entlang $\gamma = \text{Rand von } \delta \vec{S}$: $\delta Z \equiv \oint_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} d\vec{r} \cdot \vec{u}$ (3)

$$\delta Z = \int_y^{y+\delta^y} [\vec{e}_y \cdot \vec{u}(x+\delta^x, \bar{y}, z) + (-\vec{e}_y) \cdot \vec{u}(x, \bar{y}, z)] + \int_x^{x+\delta^x} [(-\vec{e}_x) \cdot \vec{u}(\bar{x}, y+\delta^y, z) + \vec{e}_x \cdot \vec{u}(\bar{x}, y, z)]$$
 (4)

lokale Näherung:

$$\approx \delta^y [u^y(x+\delta^x, y, z) - u^y(x, y, z)] - \delta^x [u^x(x, y+\delta^y, z) - u^x(x, y, z)]$$
 (5)

$$\approx \underbrace{\delta^x \delta^y}_{\delta S} \underbrace{[\partial_x u^y(x, y, z) - \partial_y u^x(x, y, z)]}_{(a.3) = (\vec{\nabla} \times \vec{u})^z} = \delta S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \delta \vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$
 (6)

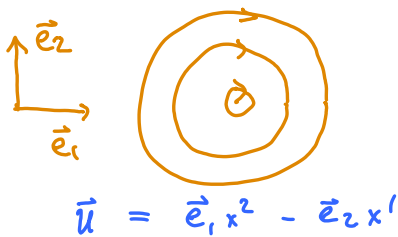
'Zirkulation pro gerichteter Fläche': (lokale Wirbelstärke)

$$\lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta Z}{\delta S} \stackrel{(3)}{=} \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

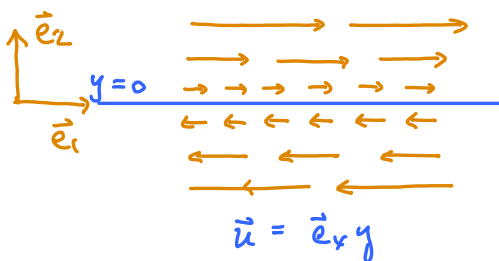
Geometrische Definition der Rotation (7)
Rotation!

Beispiele zur Anschauung

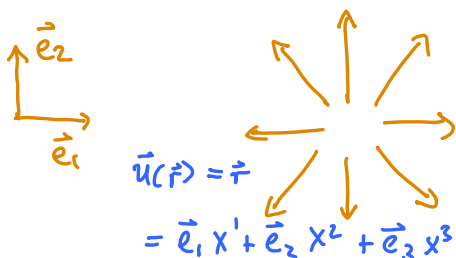
V3.6d



$$\vec{\nabla} \times \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 0 - \partial_3 (-x_1) \\ \partial_3 x_2 - \partial_1 0 \\ \partial_1 (-x_1) - \partial_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \vec{e}_3$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_3$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Satz von Stokes

Betrachte nun beliebige Oberfläche S ,
begrenzt durch den Rand γ :

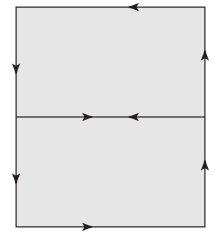
aufgeteilt in viele infinitesimal kleine Flächenelemente:

$$\int_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \underbrace{\delta \vec{S}_\ell \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})}_{\text{Zirkulation um Flächenelement } \delta \vec{S}_\ell}(\vec{r}_\ell) \quad (1)$$

$$\stackrel{(c.7)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \oint_{\gamma_\ell} d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r}_\ell) \quad (2)$$

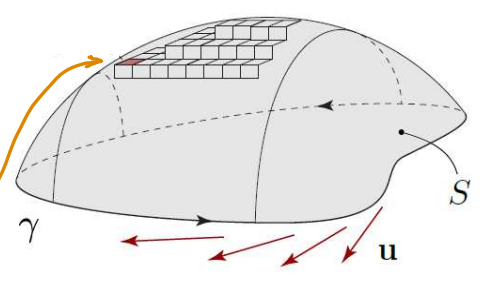
Beiträge innerer Wegelemente heben sich weg, denn Integrationsrichtungen entlang Grenzen benachbarter Rechtecke sind entgegengesetzt:

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\text{Aussenwege } \ell} \oint_{\gamma_\ell} d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r}_\ell) \quad (3)$$



$$\int_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}$$

$S \rightsquigarrow$ Fläche $\gamma \rightsquigarrow$ Rand der Fläche = Linie

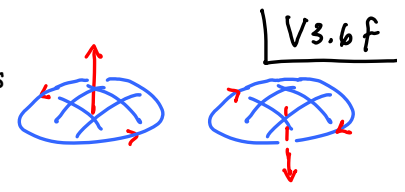


(4) Satz v. Stokes

[Mathematikvorl.: sauberer Limesprozess]

Anmerkungen

(1) Orientierung des Linienintegrals ist 'rechts herum' bezüglich eines Normalvektors an einem (beliebigen) Punkt auf der Fläche.



(2) Falls S eine geschlossene Oberfläche ist, hat sie keinen Rand:

$$\gamma = \emptyset$$

leere Menge

In diesem Fall: sei V das von S eingeschlossene Gebiet:

$$0 = \oint_{\emptyset} d\vec{r} \cdot \vec{u} \stackrel{\text{Stokes (e.4)}}{=} \int_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \stackrel{\text{Gauß (V3.5 z.4)}}{=} \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})}_{=0} \quad (1)$$

weil Rand die Länge 0 hat

(1) gilt für beliebiges V : $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ ✓ konsistent mit (c.7)!

(3) Konservatives Kraftfeld: $\vec{E}(\vec{r})$ sei ein Vektorfeld mit folgender Eigenschaft:

$$\oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{für beliebigen geschlossenen Weg} \quad (2)$$

(e.4) Stokes \Rightarrow

Dann gilt $\int_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$ gilt für beliebige Flächen S (3)

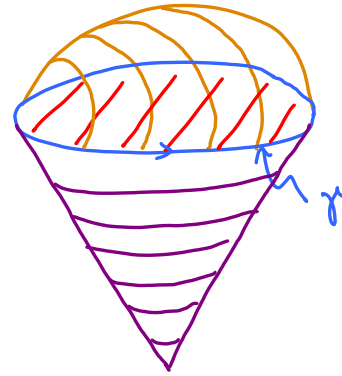
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \stackrel{(b.1)}{\Rightarrow} \vec{E} \text{ ist darstellbar als } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (4)$$

(4) Verschiedene Flächen haben den gleichen Rand:

V3.6g

- γ : Kreislinie
- S_1 : Kreisfläche
- S_2 : Halbkugeloberfläche
- S_3 : Kegelmantel

$$\gamma = \partial S_1 = \partial S_2 = \partial S_3$$



(4) Krummlinig orthogonale Koordinaten

V3.6h

Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{y})$ (1)

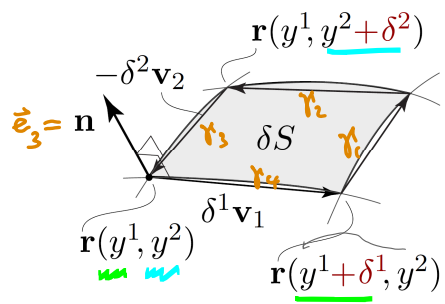
Kurvengeschw.: $\partial_{y_i} \vec{r} = \vec{v}_i = \vec{e}_i n_i$ (2) keine Summation!

mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (3) lokale Basis

Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{y}) = \sum_i \vec{e}_i u^i$ (4)

Definition: $\delta \vec{S} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \stackrel{(c.7)}{=} \delta Z = \oint_{\text{Rand von Flächenelement}} d\vec{r} \cdot \vec{u}$ (5)

Wähle Flächenelement: $\delta \vec{S} \stackrel{(V3.5d.5)}{=} \delta^1 \delta^2 (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \stackrel{(2)}{=} \delta^1 \delta^2 n_1 n_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \underbrace{\delta^1 \delta^2 n_1 n_2}_{\equiv \delta S} \vec{e}_3$ (6)



$$\delta Z = \left[\delta^2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{u})(y^1 + \delta^1, y^2) + \delta^2 (-\vec{v}_2) \cdot \vec{u}(y^1, y^2) \right] + \left[\delta^1 (-\vec{v}_1 \cdot \vec{u})(y^1, y^2 + \delta^2) + \delta^1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{u})(y^1, y^2) \right] \quad (7)$$

$$\approx \delta^2 [(n_2 u^2)(y^1 + \delta^1, y^2) - (n_2 u^2)(y^1, y^2)] - \delta^1 [(n_1 u^1)(y^1, y^2 + \delta^2) - (n_1 u^1)(y^1, y^2)] \quad (8)$$

$$\approx \delta^2 \delta^1 \partial_{y^1} (n_2 u^2)(\vec{y}) - \delta^1 \delta^2 \partial_{y^2} (n_1 u^1)(\vec{y}) \quad (9)$$

Rotation: $(\vec{v} \times \vec{u})^3 \stackrel{(5),(6)}{=} \underbrace{\delta S}_{\delta S} \stackrel{(9),(6)}{=} \frac{1}{n_1 n_2} [\partial_{y^1} (n_2 u^2) - \partial_{y^2} (n_1 u^1)]$ (10)

[analog für andere Komponenten, mit Indizes zyklisch permutiert]

Beispiel: Zylinderkoordinaten: $x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z, n_\rho = 1, n_\phi = \rho, n_z = 1 : \boxed{V3.6i}$ (1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_\rho \frac{1}{n_\phi n_z} \left[\frac{1}{\rho} \partial_\phi (n_z^1 u^z) - \partial_z (n_\phi^1 u^\phi) \right] \quad (2)$$

$$+ \vec{e}_\phi \frac{1}{n_z n_\rho} \left[\partial_z (n_\rho^1 u^\rho) - \partial_\rho (n_z^1 u^z) \right] + \vec{e}_z \frac{1}{n_\rho n_\phi} \left[\partial_\rho (n_\phi^1 u^\phi) - \partial_\phi (n_\rho^1 u^\rho) \right] \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \partial_\phi u^z - \partial_z u^\phi \right] + \vec{e}_\phi \left[\partial_z u^\rho - \partial_\rho u^z \right] \quad (4)$$

$$+ \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho (\rho u^\phi) - \partial_\phi u^\rho \right] \quad [\text{vergleiche Seite V3.5s}] \quad (5)$$

Beispiel: $\vec{u} = \rho \vec{e}_\phi \Rightarrow u^\rho = 0, u^\phi = \rho, u^z = 0 \quad (6)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \cdot \rho) = \vec{e}_z \frac{1}{\rho} 2\rho = \vec{e}_z 2 \quad (7)$$

Beispiel 1: Magnetfeld außerhalb eines unendlich langen stromtragenden Leiters $\boxed{V3.6j}$

Zylindersymmetrie: Magnetfeld hängt nur vom Radius ab:

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho, \phi, z) = \vec{e}_\phi B^\phi(\rho) \quad (1)$$

Maxwell-Gleichung:
(Ampere-Gesetz der
Magnetostatik)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad (2)$$

Konstante \uparrow Stromdichte im Draht

$$j = \begin{cases} j & \forall \rho < R \\ 0 & \forall \rho > R \end{cases} \quad (3)$$

Radius v. Draht

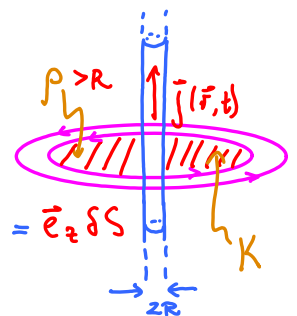
Integriere über eine Kreisfläche K mit Radius $\rho > R$:

einer-seits: $\int_K d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(2)}{=} \int_K d\vec{S} \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} I \quad (4)$

Gesamtstrom

ander-seits: $\oint_{\partial K} d\vec{r} \cdot \vec{B} \stackrel{(6)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \rho \vec{e}_\phi \cdot \vec{B} = 2\pi \rho B^\phi \quad (5)$

(1) B^ϕ



[Parametrisiere Kreisintegral mittels Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho, \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \vec{e}_\phi \rho \quad (6)$]

(4)=(5): liefert Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld:

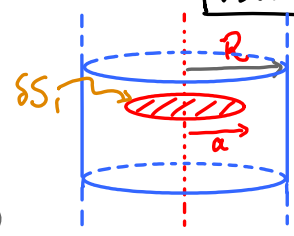
$$B^\phi = \frac{2I}{c\rho} \quad (7)$$

Fazit: Magnetfeld fällt ab wie $1/\rho$ mit zunehmendem Abstand vom Leiter.

Beispiel 2: Magnetfeld innerhalb eines unendlich langen stromtragenden Leiters

V3.6 k

Analog wie Beispiel 1, aber mit Kreisscheibe S_1 innerhalb v. Draht, also mit Radius $a < R$:



$$S_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0 \} \quad (1)$$

einer-seits: $\int_{S_1} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) \stackrel{(j.2)}{=} \int_{S_1} d\vec{S} \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \stackrel{\text{Ampere}}{=} \int_{S_1} d\vec{S} \cdot \frac{4\pi}{c} j \vec{e}_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \frac{4\pi}{c} j \rho d\rho d\phi = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} a^2$ (2)

Labels: S_1 (Stokes), Kreisscheibe, Zylinderkoordinaten, konstante Stromdichte

ander-seits: $\oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \stackrel{\text{analog zu (j.5)}}{=} 2\pi a B^\phi$ (3)

(aus Symmetrie-Gründen)

(2)=(3): liefert Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld:

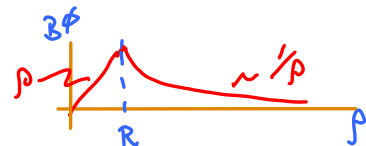
$$B^\phi = \frac{2\pi}{c} j a \quad (4)$$

Ferner, aus Symmetrie-Gründen:

$$B^z = B^r = 0 \quad (5)$$

Fazit: $\vec{B} \stackrel{(4)}{=} \vec{e}_\phi \frac{2\pi}{c} j \rho$ (6)

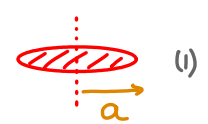
[innerhalb des Drahtes nimmt Magnetfeld linear zu mit Radius]



Zusammenfassung v. Beispiel 2

V3.6 l

Strom durch Kreisscheibe S_1 mit Radius a : $I_{S_1} \stackrel{(k.2)}{=} j \pi a^2$



Laut Ampere gilt ferner:

$$I_{S_1} \stackrel{(j.4)}{=} \frac{c}{4\pi} \int_{S_1} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (2)$$

via Stokes & Symmetrie finden wir daraus das B-Feld:

$$\vec{B} \stackrel{(k.6)}{=} \vec{e}_\phi B^\phi = \vec{e}_\phi \frac{2\pi}{c} j \rho \stackrel{(V2m.2b)}{=} \frac{2\pi}{c} j \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Rotation von B, explizit in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi}{c} j \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{c} j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} j \vec{e}_z \quad (4)$$

Anmerkung: Das Flächenintegral einer Rotation hängt, laut Stokes, nur vom Rand ab.

Zur Illustration berechnen wir nun für andere Flächen S_n , mit demselben Rand wie S_1 ,

das Integral [für $B = \text{Gl. (3)}$]

$$I_{S_n} \equiv \frac{c}{4\pi} \int_{S_n} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (5)$$

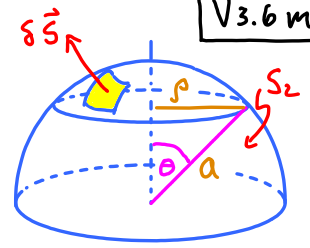
Wir werden finden: in allen Fällen gilt

$$I_{S_n} = I_{S_1} = j \pi a^2 \quad (6)$$

Beispiel 3: Fläche von Halbkugel (S2) mit Radius a

V3.6 m

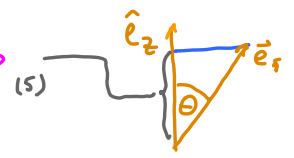
Halbkugel: $S_2 = \left\{ \vec{r}(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3; r = a, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}$ (1)



Kugelkoordinaten: $n_r = 1, n_\theta = \frac{a}{r}, n_\phi = \frac{a}{r} \sin \theta$ (2)

Flächenelement: $\delta \vec{S} = \delta S \hat{n} = \vec{e}_r \delta^\theta \delta^\phi \sin \theta a^2$ (3)

Rotation B: $\vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(l.4)}{=} \vec{e}_z \frac{4\pi}{c} j$ (4) $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$ (5)



Berechne Integral: $I_{S_2} = \frac{c}{4\pi} \int_{S_2} dS \vec{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ (6)

Substitution: $\cos \theta = u$
 $d\theta \sin \theta = -du$
 $\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta = -\int_1^0 du = \int_0^1 du$ (8)

$\stackrel{(3,4)}{=} \frac{c}{4\pi} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{\stackrel{(5)}{\cos \theta}} \frac{4\pi}{c} j$ (7)

$\stackrel{(7)}{=} a^2 j \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^1 du \cdot u}_{1/2} = a^2 j \pi \stackrel{\checkmark}{=} I_{S_1}$ (9) [konsistent mit (1.1)]

Nebenbemerkung: es gibt mehr als einen Weg, die Rotation von B zu berechnen:

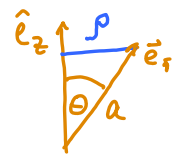
V3.6 n

Oben benutzten wir: $\vec{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(m.4)}{=} \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_z \frac{4\pi}{c} j) \stackrel{(m.5)}{=} \cos \theta \frac{4\pi}{c} j$ (1)

Alternativ: $\vec{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_i}_{\delta_{ri}} (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = (\vec{\nabla} \times \vec{B})^r$ (2)

Berechne Rotation in Kugelkoordinaten, via (h.10), mit $1 \rightarrow \theta, 2 \rightarrow \phi, 3 \rightarrow r$ (3)

B in Kugelkoord: $\vec{B} = \vec{e}_\phi B^\phi, B^\phi \stackrel{(V3.6l.6)}{=} \frac{2\pi}{c} j \rho = \frac{2\pi}{c} j \frac{a \sin \theta}{\rho}$ (4)



$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^r \stackrel{(h.10)}{=} \frac{1}{n_\theta n_\phi} [\partial_\theta (n_\phi B^\phi) - \partial_\phi (n_\theta B^\theta)] \stackrel{(4)=0}{=} \frac{1}{n_\theta n_\phi} \partial_\theta (n_\phi B^\phi)$ (5)

$\stackrel{(m.2)}{=} \left. \begin{matrix} n_r = 1, \\ n_\theta = a \\ n_\phi = a \sin \theta \end{matrix} \right\} (6) \frac{1}{a \cdot a \sin \theta} \partial_\theta (a \sin \theta \cdot \frac{2\pi}{c} j a \sin \theta)$ (7)

$= \frac{2\pi}{c} j \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial_\theta \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{4\pi}{c} j \cos \theta$ (8) [konsistent mit (1)]

Beispiel 4: Fläche von Kegelmantel (S3), mit Basisradius a

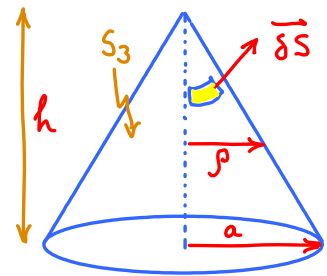
V3.60

$$S_3 = \left\{ \vec{r}(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ 0 \leq z = h(1 - \rho/a) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Zylinderkoordinaten:

$$n_\rho = 1, \quad n_\phi = \rho, \quad n_z = 1$$

Kegelmantel: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ h(1 - \rho/a) \end{pmatrix} \quad (2) \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{e}_z \frac{4\pi}{c} j \quad (k.4) \quad (3)$



Orientiertes Flächenelement:

$$\delta \vec{S} = \partial_\rho \vec{r} \times \partial_\phi \vec{r} \delta \rho \delta \phi \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -h/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \delta \rho \delta \phi = \begin{pmatrix} (h\rho/a) \cos \phi \\ (h\rho/a) \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix} \delta \rho \delta \phi \quad (4)$$

Berechne Integral:

$$I_{S_3} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{c}{4\pi} \int_{S_3} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) \stackrel{(3)}{=} \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \underbrace{\rho}_{(dS)^2} \frac{4\pi}{c} j = 2\pi \cdot \frac{1}{2} a^2 j = a^2 \pi j = I_{S_1} \quad (5)$$

[konsistent mit (1.1)]

Zusammenfassung: V3.6 Satz von Stokes

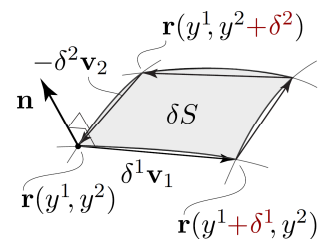
ZV3.6

Rotation kartesisch: $\text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j u^k$

Geometrische Definition der Rotation:

'Zirkulation pro gerichteter Fläche' $\delta \vec{S} = \hat{n} \delta S$

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{u}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

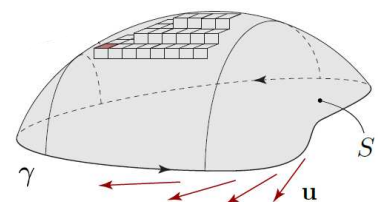


Satz v. Stokes: Flussintegral der Rotation = Linienintegral

$$\int_{S_\gamma} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{u}(\vec{r})) = \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad (2)$$

S_γ — Fläche γ — Rand der Fläche = Linie

Symbolisch: $\int_S dS_i (\partial_x u^i) = \int_{\partial S} ds_i u^i \quad (3)$
suggestive Notation



Rotation in krummlinigen Koordinaten: $\vec{v}_j = \partial_{y^j} \vec{r}(y) = \vec{e}_j n_j$

$$(\nabla \times \vec{u})^k = \frac{1}{n_i n_j} [\partial_{y^i} (n_j u^j) - \partial_{y^j} (n_i u^i)] \quad (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{analog für zyklisch} \\ \text{vertauschte Komponenten} \end{array} \right. \quad (5)$$