

C6.3 Fourier-Transformation

C6.3a

Entspricht Fourier-Reihe für  $L = \infty \Rightarrow$  'Fourier-Integral'

Für endliches L:  $f(x) \stackrel{(C6.2b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$  (1)

$x \in (-L/2, L/2)$

$k = \frac{2\pi n}{L}, n \in \mathbb{Z}$   $\tilde{f}_k = \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ikx} f(x)$  (2)

Für  $L \rightarrow \infty$  stellt  $\tilde{f}_k$  eine kontinuierliche Funktion  $\tilde{f}(k)$  dar:

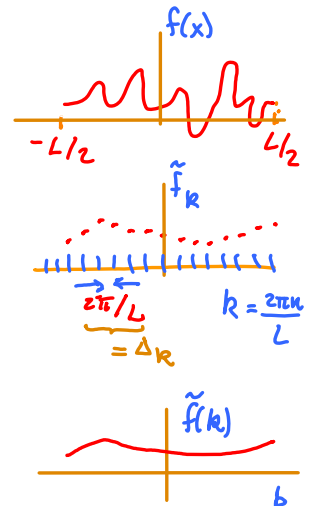
$\tilde{f}_k \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \tilde{f}(k) \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$  (3)

und Fourier-Summe wird ein Integral:

$\frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{2\pi}_{=\Delta_k} \frac{1}{L} \sum_k F(k) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k)$  (4)

(1)  $L \rightarrow \infty$  :  $f(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$  'Fourier-Rücktransformation' (5)

Interpretation:  $f(x)$  wird zerlegt als Summe von unendlich vielen Funktionen  $e^{ikx}$  mit kontinuierlicher Variable  $k$  und Gewichtungsfaktor  $\tilde{f}(k)$



Fourier-Transformation (zusammenfassend)

$f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

C6.3b

Fourier-Rück-Transformation:  $f(x) \stackrel{(A.5)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$  (1)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$  (1')

Fourier-Transformation:  $\tilde{f}(k) \stackrel{(A.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$  (2)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} \tilde{f}_k \stackrel{(C6.2d.5)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ikx} f(x)$  (2')

$\delta$  als Funktion v. x:  $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$  (3)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mL) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx}$  (3')

$\delta$  als Funktion v. k:  $2\pi \delta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}$  (4)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} L \delta_{k,0} \stackrel{(C6.2c.3)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ikx}$  (4')

[folgt aus (3), mit  $k \leftrightarrow x$ ]

Konsistenzcheck:  $\tilde{f}(k) \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} e^{ik'x} \tilde{f}(k')}_{(1) = f(x)}$  (5)

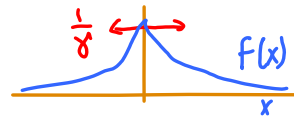
(1) in (2):

analog zu (C6.2d.3) mutiges Vertauschen der Integrale:  $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} \tilde{f}(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x}}_{(4) \quad 2\pi \delta(k-k')} = \tilde{f}(k)$  ✓ (6)

Beispiel:

Exponentialfunktion:  
( $\gamma > 0$ )

$$f(x) = e^{-|x|\gamma} \quad (1)$$



C6.3c

$$\tilde{f}(k) \stackrel{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (2)$$

Komplex-konjugierte vom ersten Term

2.ter Term:  
 $x \rightarrow -x$

$$= \int_0^{\infty} dx e^{-x(i\gamma + \gamma)} + \int_{-\infty}^0 dx e^{-x(-i\gamma + \gamma)} \quad (3)$$

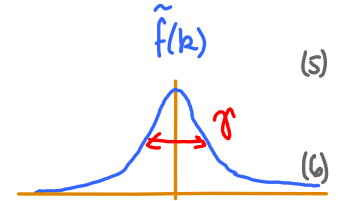
$$\int_{-\infty}^0 dx \rightarrow \int_0^{\infty} (-dx) = \int_0^{\infty} dx$$

$$= \frac{e^{-(i\gamma + \gamma)\infty} - 1}{-(i\gamma + \gamma)} + \frac{e^{-(-i\gamma + \gamma)\infty} - 1}{-(-i\gamma + \gamma)} \quad (4)$$

$$= \frac{(-i\gamma + \gamma) + (i\gamma + \gamma)}{(i\gamma + \gamma)(-i\gamma + \gamma)} \quad (5)$$

Fouriertransform.  
v. Exp-Funktion  
ist Lorentz-Funktion:

$$\tilde{f}(k) = \frac{2\gamma}{k^2 + \gamma^2} \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-|x|\gamma}$$



'Fourier-Gegensätzlichkeit  
[vergleiche (C6.2n)]

Übrigens:

lim (6):  
 $\gamma \rightarrow 0$

$$2\pi \delta(k) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\gamma/\pi}{k^2 + \gamma^2}}_{\delta(k)} \cdot (2\pi) \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \cdot 1 \quad (7)$$

Bestätigt (b.3) ✓

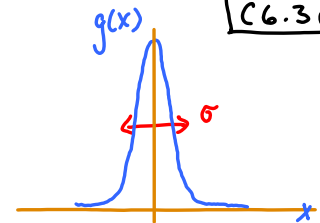
Beispiel: Gauß-Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (1)$$

C6.3d

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = 1 \quad (2)$$



Fourier-  
Transformierte:

$$\tilde{g}(k) \stackrel{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x) \quad (3)$$

'quadratisches  
Ergänzen'

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + 2\sigma^2 ikx)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x + \sigma^2 ik)^2 - (\sigma^2 ik)^2} \quad (4)$$

Substitution:

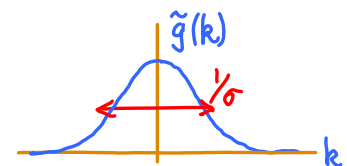
$$x + \sigma^2 ik \equiv \tilde{x}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\tilde{x}^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^4 k^2} \quad (5)$$

(2) = 1 normiert!

$$\tilde{g}(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

(6)



Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion ist wieder eine Gauß-Funktion, mit invers proportionaler Breite: je breiter  $g(x)$ , d.h. je größer  $\sigma$ , je schmaller  $\tilde{g}(k)$

[diese Tatsache impliziert Heisenberg-Unschärferelation...!]

Anmerkung: es gibt in der Literatur viele unterschiedliche Konventionen!

C6.3e

1) Physiker benutzen unterschiedliche(!) Konventionen für Längen und Zeiten:

$$f(x, t) \stackrel{(b.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{+ikx} e^{-i\omega t} \tilde{f}(k, \omega) \quad (1)$$

$$\tilde{f}(k, \omega) \stackrel{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikx} e^{i\omega t} f(x, t) \quad (2)$$

$e^{ikx}$  ist periodisch:  
 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  = 'Wellenlänge'  
 $k$  = 'Wellenzahl'  
 $e^{-i\omega t}$  ist periodisch:  
 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  = 'Periode'  
 $\omega$  = 'Kreisfrequenz'

2) In d Raum-Dimensionen:

$$f(\vec{x}, t) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\vec{k}, \omega) \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_d}{2\pi} e^{ik_1 x^1} e^{ik_2 x^2} \dots e^{ik_d x^d}$$

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$$

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_1 x^1 + \dots + k_d x^d$$

$$\tilde{f}(\vec{k}, \omega) \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d^d x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\omega t} f(\vec{x}, t) \quad (4)$$

3) Schlampige Physikernotation: oft wird dasselbe Symbol benutzt für eine Funktion  $f(t)$  und ihre Fourier-Transformierte  $f(\omega)$  [statt  $\tilde{f}(\omega)$ ]

C6.3f

Man erkennt aber am Argument,  $t$  oder  $\omega$ , welche von beiden gemeint ist.

4) Man kann den Faktor  $2\pi$  schieben wohin man will:

Physik-Konvention:

$$f(t) \stackrel{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{(e.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \quad (2)$$

4.1) Mathematische Literatur bevorzugt oft symmetrische Schreibweise:

$$f(t) \stackrel{(1,3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\tilde{f}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \sqrt{2\pi} \tilde{\tilde{f}}(\omega) \quad (3)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(\omega) \stackrel{(2,3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{+i\omega t} \quad (5)$$

4.2) Physik benutzt oft 'Winkelfrequenz'  $\omega = 2\pi f$  Frequenz

$$F(t) \stackrel{(1,6,7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{F}(f) e^{-i2\pi f t} \quad (8)$$

$$f(t) \equiv F(t), \quad \tilde{f}(\omega) \equiv \tilde{F}(f) \quad (7)$$

$$\tilde{F}(f) \stackrel{(2,6,7)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{i2\pi f t} \quad (9)$$

Allgemeine Eigenschaften:

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{(e.2)}{=} \int dt f(t) e^{i\omega t} \quad (1)$$

C6.3g

1) Für eine reelle Funktion,  $f(t) = \overline{f(t)}$  (2) gilt:

1a)  $\tilde{f}(\omega) = \overline{\tilde{f}(-\omega)}$  (3)  
 [konsistent mit (C6.1m.4) für Fourier-Reihen]

denn:  
 $\overline{\tilde{f}(-\omega)} \stackrel{(1)}{=} \int dt \overline{f(t)} e^{+i\omega t} \stackrel{(1)}{=} \tilde{f}(\omega)$  (4)  
 (2) = f(t) □

1b)  $\operatorname{Re} \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega t$  (5)  
 $\operatorname{Im} \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \sin \omega t$  (7)

denn:  $\operatorname{Re}[e^{i\omega t}] = \cos \omega t$  (6)  
 [einsetzen in (1)]  
 $\operatorname{Im}[e^{i\omega t}] = \sin \omega t$  (8) □

1c) falls  $f(t) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$  ist,

$f(-t) = \pm f(t)$   
 gilt:  $\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} \text{reell} \\ \text{imaginär} \end{cases}$

denn  
 $\overline{\tilde{f}(\omega)} \stackrel{(1)}{=} \int dt \overline{f(-t)} e^{+i\omega t} \stackrel{(1)}{=} \pm \tilde{f}(\omega)$  (9)  
 (9) = ± f(t)  
 Substitution  $t \rightarrow -t$  (10) □

Weitere Fourier-Transformations-Identitäten

C6.3h

Seien  $f, g$  zwei Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto f(x)$   
 $x \mapsto g(x)$

Parseval-Identität:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{f(x)} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \overline{\tilde{f}(k)} \tilde{g}(k)$  (1)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx \overline{f(x)} g(x) = \frac{1}{L} \sum_k \overline{\tilde{f}_k} \tilde{g}_k$  (1')

Plancherel-Theorem:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2$  (2)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx |f(x)|^2 = \frac{1}{L} \sum_k |\tilde{f}_k|^2$  (2')

Faltung:

$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x')$  (3)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} (f * g)(x) \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dx' f(x-x') g(x')$  (3')  
 $= (g * f)(x)$   $= (g * f)(x)$

Faltungstheorem:

$\widetilde{(f * g)}(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$  (4)  $\xleftarrow{L \rightarrow \infty} \widetilde{(f * g)}_k \stackrel{(C6.2o.6)}{=} \tilde{f}_k \tilde{g}_k$  (4')

Parseval-Identität, explizit: (vergleiche Seite C6.2h)

C6.3i

Hier zur Abwechslung in der  $t \leftrightarrow \omega$  Version; [die  $x \leftrightarrow k$  Version ist analog]

Seien  $f, g$  zwei Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$   
 $t \mapsto g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt \stackrel{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{+i\omega t} \overline{\tilde{f}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t} \tilde{g}(\omega') \quad (1)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \overline{\tilde{f}(\omega)} \tilde{g}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega-\omega')}}_{(b.3) \quad 2\pi \delta(\omega-\omega')} \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \overline{\tilde{f}(\omega)} \tilde{g}(\omega) \quad (3)$$

Speziell:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \stackrel{(3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{f}(\omega)|^2 \quad (4)$$

Faltungstheorem, explizit: (vergleiche Seite C6.2o)

C6.3j

Definition: 'Faltung'

$$(f * g)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t') \quad (1)$$

Fourier-Darstellung der Faltung: [Details sind analog zu (C6.2o.1-7)]

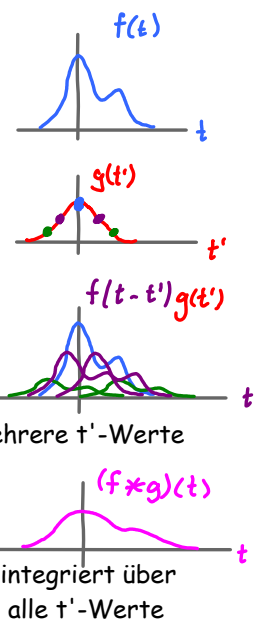
$$(f * g)(t) \stackrel{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \tilde{g}(\omega') \quad (2)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{g}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{it'(\omega-\omega')}}_{(b.3) \quad 2\pi \delta(\omega-\omega')} \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \underbrace{\tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)}_{\equiv (f * g)(\omega)} \quad (4)$$

$$\widetilde{(f * g)}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \quad \text{'Faltungstheorem'} \quad (5)$$



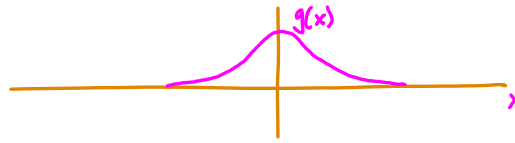
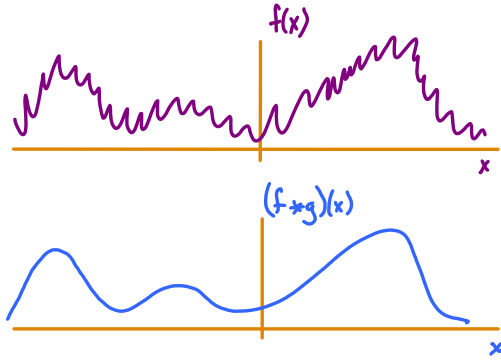
Faltung im Fourier-Raum:

$$\widetilde{(f * g)}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{f}(\omega-\omega') \tilde{g}(\omega') \Rightarrow (\widehat{f * g})(t) = f(t) g(t) \quad (6)$$

Anwendung v. Faltungstheorem: Tiefpassfilter

C6.3k

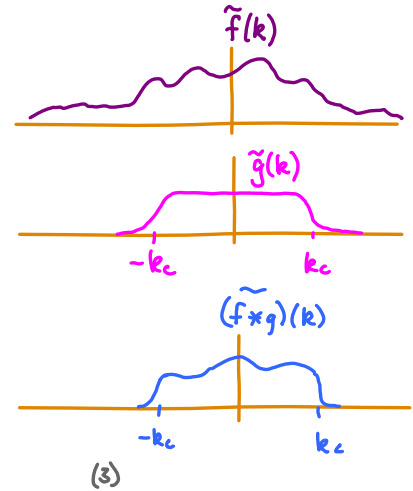
Tiefpassfilter dämpft schnelle Fluktuationen weg, läßt langsame durch !



Wähle  $g(x)$  so, dass  $\tilde{g}(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |k| \leq k_c \\ 0 & \text{falls } |k| \geq k_c \end{cases}$  (1)

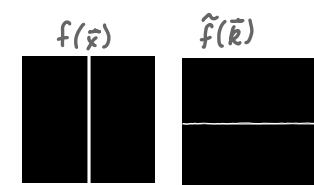
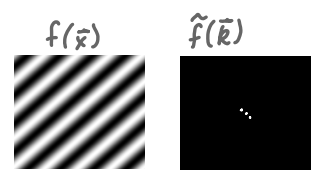
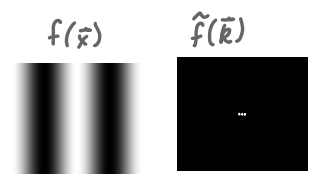
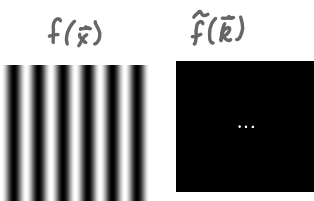
Dann:  $(f * g)(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) = \begin{cases} \tilde{f}(k) & \text{falls } |k| \leq k_c \\ 0 & \text{falls } |k| \geq k_c \end{cases}$  (2)

Somit:  $(f * g)(x) = \int dx' f(x-x') g(x') \approx \int_{-k_c}^{k_c} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$

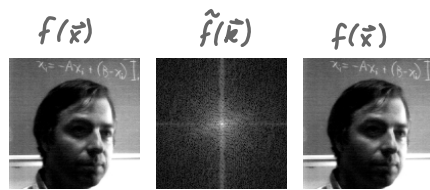


Intuition: wie wird Information in einer Fourier-Transformation gespeichert ?  
[cns-alumni.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html](http://cns-alumni.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html)

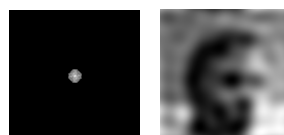
C6.3l



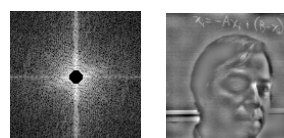
Fourier-Gegensätzlichkeit



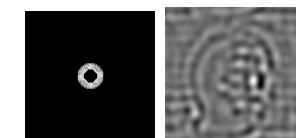
Original      Fourier      Rekonstruiert



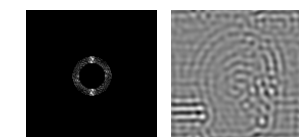
Tiefpass-Filter      Rekonstruiert



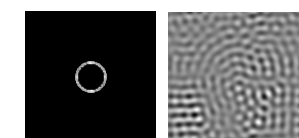
Hochpass-Filter      Rekonstruiert



Band-Filter      Rekonstruiert



Band-Filter      Rekonstruiert



Band-Filter      Rekonstruiert

Ableitungen: (Vergleiche Seite C6.2p)

Physikerphasenkonvention:  
unterschiedliche Vorzeichen

C6.3m

$$f(x, t) \stackrel{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \tilde{f}(k, \omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \underbrace{[+ik \tilde{f}(k, \omega)]}_{\equiv \tilde{\partial}_x f(k, \omega)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \underbrace{[-i\omega \tilde{f}(k, \omega)]}_{\equiv \tilde{\partial}_t f(k, \omega)} \quad (3)$$

Merkregel in Physikerkonvention:

$$\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik, \quad \frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega \quad (4)$$

Grund für Phasenkonvention liegt in der Beschreibung von Wellen: die Phase

ist konstant entlang einer Trajektorie, für die  $kx - \omega t = 0 \Rightarrow x = \frac{\omega}{k} t \equiv v_p t$

Die Vorzeichenkonvention führt zu einer positiven 'Phasengeschwindigkeit'

falls  $\omega$  und  $k$  dasselbe Vorzeichen haben.

### C7.5 Lösung von Differentialgleichungen mittels Fourier-Transformation

C7.5a

Unterdämpfter HO mit Antrieb:  $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x = f(t)$  (C7.4r.1)

$$\left[ d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] x(t) = f(t) \quad (1)$$

Fourier-Ansatz für Antrieb:  $f(t) \stackrel{(C6.3e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}$  (2)

und für Lösung:  $x(t) \stackrel{(C6.3e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t}$  (3)

(3), (2) in (1) eingesetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2 \right] \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (4)$$

$\stackrel{(C6.3m.4)}{d_t \xrightarrow{FT} -i\omega}$

$$\underbrace{(-i\omega)^2 - 2\gamma i\omega + \Omega^2}_{\text{aus (4)}}$$

(4) muss für beliebige  $t$  gelten:  $\Rightarrow \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$  ← { eingesetzt in (3) liefert gesuchte Lösung  $x(t)$  ✓ } (5)

'Dynamische Suszeptibilität':  $\tilde{X}(\omega) \equiv \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$  (6)

(C7.5a.5-6):

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \tilde{f}(\omega) \stackrel{(C6.3j.5)}{=} (\tilde{\chi * f})(\omega) \quad (1) \quad |C7.5b$$

Faltungstheorem,  
rückwärts gelesen:

$$x(t) \stackrel{(6.3j.1)}{=} (\chi * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \chi(t-u) f(u) \quad (2)$$

Rücktransformierte  
der dynamischen Susz.:

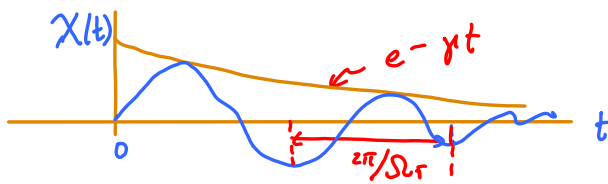
$$\chi(t) \stackrel{(C6.3e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

Betrachte nun unterdämpften Fall:

$$\gamma < \Omega, \quad \text{mit} \quad \Omega_r \stackrel{(C7.4j.1)}{=} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \quad (4)$$

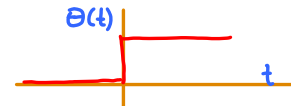
Integral liefert (siehe Bronstein  
Formelsammlung, oder Kapitel C9):

$$\chi(t) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\Omega_r} e^{-\gamma t} \sin \Omega_r t \Theta(t) \quad (5)$$



Heavyside-  
Stufenfunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (6)$$



Stufenfunktion garantiert "Kausalität":

$$x(t) \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^t du \chi(t-u) f(u) \quad [\text{reproduziert (C7.4+4)}] \quad (7)$$

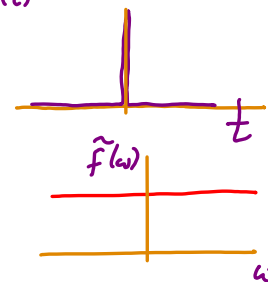
Die Lösung  $x(t)$  hängt nur ab von der Antriebskraft bei früheren Zeiten,

$$u < t$$

Interpretation:  $\chi(t)$  ist die Antwort auf eine  $\delta$ -Kraft:

$$f(t) = \delta(t) \quad |C7.5c$$

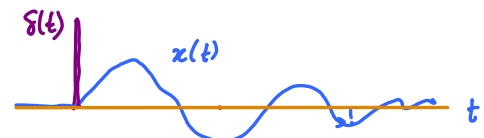
Sei  $f(t) = \delta(t) \stackrel{(C6.3b.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \underbrace{1}_{\tilde{f}(\omega)} \Rightarrow \tilde{f}(\omega) = 1 \quad (1)$



Eingesetzt in (C7.5b.1):  $\tilde{x}(\omega) \stackrel{(C7.5b.1)}{=} \tilde{\chi}(\omega) \cdot 1 \quad (2) \Rightarrow x(t) = \chi(t) \quad (3)$

Fazit:  $\chi(t)$  ist die 'Antwort' auf (d.h. Lösung von (C7.5a.1) für) eine  $\delta$ -Kraft:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \Omega^2 \right) \chi(t) = \delta(t) \quad (4)$$



Antwort auf  $\delta$ -Puls wird auch die 'Green'sche Funktion' der DGL genannt.

$$\text{Notation: } g(t) (= \chi(t))$$

Noch ein Beweis, dass (C7.5b.2) die allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb ist:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \Omega^2 \right) x(t) \stackrel{(C7.5b.2)}{\leftarrow} \quad (5)$$

$$= \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \Omega^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} du \chi(t-u) f(u) \stackrel{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du \delta(t-u) f(u) = f(t) \quad (6)$$



Gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten, mittels Green'scher Funktion: | C7.5d

$$\left[ c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0 \right] x(t) = f(t) \quad (1)$$

$\equiv \hat{L}(t)$

Kurznotation:  $\hat{L}(t)x(t) = f(t) \quad (2)$  mit  $\hat{L}(t) = \sum_{l=0}^n c_l d_t^l \quad (3)$

Fourier-transformiert:  $\tilde{L}(-i\omega) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (4)$  mit  $\tilde{L}(-i\omega) \equiv \sum_{l=0}^n c_l (-i\omega)^l \quad (5)$

Aufgelöst:  $\tilde{x}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega) \quad (6)$  mit  $\tilde{g}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)} \quad (7)$

'Green'sche Funktion' erfüllt:  $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \stackrel{(7)}{=} 1 \stackrel{(8)}{=} \tilde{\delta}(\omega) \quad (8)$   $\xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}} \hat{L}(t) g(t) \stackrel{(1)}{=} \delta(t) \quad (9)$   
 [(1) mit  $f(t) = \delta(t)$ ]

Faltungstheorem, angewandt auf (6):  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u) \quad (10)$  d.h. Green'sche Funktion liefert allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

Check:  $\hat{L}(t)x(t) \stackrel{(10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du \underbrace{\hat{L}(t) g(t-u)}_{(9) = \delta(t-u)} f(u) = f(t) \quad (11)$

Zusammenfassung: C6.3 Fourier-Transformation | ZC6.3a

$f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  Vorzeichen ist Konvention: in Physik +, Mathe: -

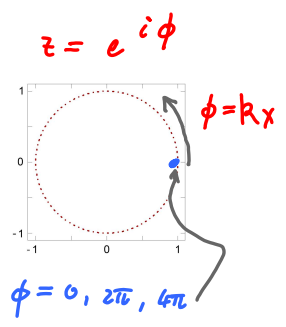
Fourier-Rück-Transformation:  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$

Fourier-Transformation:  $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:

'Vollständigkeit':  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x)$

'Orthonormalität':  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} = 2\pi \delta(k)$



- Wichtige Beispiele:
- Exponentialfunktion  $\leftrightarrow$  Lorenzfunktion
  - Gauß-Funktion  $\leftrightarrow$  Gauß-Funktion

Physikerkonvention:  $f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \tilde{f}(k, \omega)$  (1)

Merkregel:  $\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik$      $\frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega$  (2)

Parseval:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{f(x)} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \overline{\tilde{f}(k)} \tilde{g}(k)$  (3)

Plancherel:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2$  (4)

Faltung:  $(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x') = (g * f)(x)$  (5)

Faltungstheorem:  $(\widetilde{f * g})(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$  (6)

Zusammenfassung: C7.5 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green    ZC 7.5a

$[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0] x(t) = f(t)$  (1)

Kurznotation:  $\hat{L}(d_t) x(t) = f(t)$  (2)

Fourier-transformiert:  $f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$  (3)

$\tilde{L}(-i\omega) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$  (4)    mit  $\tilde{L}(-i\omega) \equiv \sum_{l=0}^n c_l (-i\omega)^l$  (5)

Aufgelöst:  $\tilde{x}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega)$  (6)    mit  $\tilde{g}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)}$  (7)

Green'sche Funktion erfüllt:  $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \stackrel{(7)}{=} \delta(\omega) \stackrel{!}{=} \tilde{\xi}(\omega)$  (8)     $\xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}} \hat{L}(d_t) g(t) \stackrel{(1)}{=} \delta(t)$  (9)  
 [ (1) mit  $f(t) = \delta(t)$  ]

Faltungstheorem, angewandt auf (6):  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u)$  (10)    = allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!