

C6 Fourier-Kalkulus

Jean Baptiste
Joseph Fourier
1768-1839

C6.1a

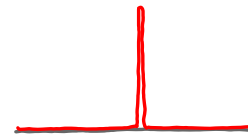


Ziel: geschickte Darstellungen für Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

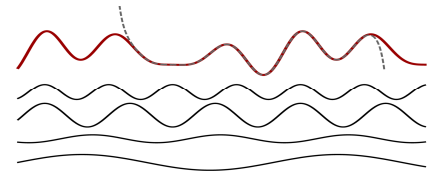
zu finden, und zwar als Linearkombinationen von 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum.

C6.1 delta-Funktion: unendlich scharf gepeakte Funktion



C6.2 Fourier-Reihen: $f: (x_0, x_0+L) \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \underbrace{e^{ikx}}_{\psi_k(x)} \tilde{f}_k \quad \text{Linearkombination v. periodischen Funktionen}$$



Fourier-Reihen für periodische Funktionen:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = f(x+L)$$

6.3 Fourier-Integrale:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

L9.1 Allgemeine Struktur:

Basis für Funktionenraum

$$f = \frac{1}{L} \sum_k \psi_k \tilde{f}_k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \sum_\alpha \tilde{v}_\alpha v^\alpha$$

Vielfältige Anwendungen in der Physik: Schwingungen, Wellen, Hydrodynamik, Optik, Signalverarbeitung, Elektromagnetismus, Quantenmechanik, Feldtheorie, ...

6.1 Dirac - $\delta_y(x)$ Funktion: (Hilfsmittel zur Beschreibung scharfer Peaks)

C6.1b

$\delta_y(x)$ ist ein unendlich hoher, infinitesimal scharfer Peak bei $x=y$

'Funktionswerte':

$$\delta_y(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq y \\ \infty & \text{für } x = y \end{cases} \quad (1)$$

Gewicht (Normierung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y(x) = 1 \quad (2)$$

Aufzufassen als Limes einer Folge immer schärferer Peaks mit Gewicht = 1.

Beispiel:

Gauß-Peaks:
($\epsilon > 0$)

$$\delta_y^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon \sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2/\epsilon^2} = \delta_x^\epsilon(y) \equiv \delta^\epsilon(x-y) \quad (3)$$

Peak-Position: $x=y$,

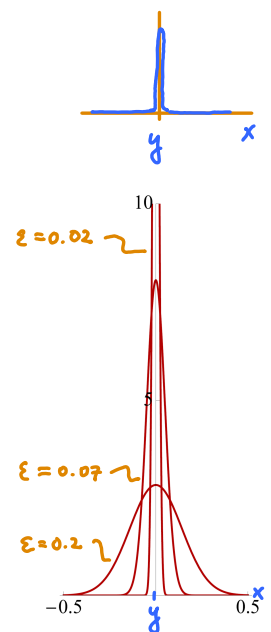
Peak-Höhe: $\sim \frac{1}{\epsilon}$,

Peak-Breite: $\sim \epsilon$,

$$\delta_y^\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon \sqrt{\pi}}, \quad \delta_y^\epsilon(y + \epsilon \sqrt{\ln 2}) = \frac{1}{2} \delta_y^\epsilon(y) \quad (4)$$

Gewicht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y^\epsilon(x) = 1 \quad (5) \quad \text{Symmetrie: } \delta_y^\epsilon(x) = \delta_x^\epsilon(y) \quad (6)$$



Darstellung der Dirac-delta-Funktion:

$$\delta_y(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_y^\epsilon(x) \equiv \delta(x-y) = \delta_x(y) \quad (7)$$

Beispiel:

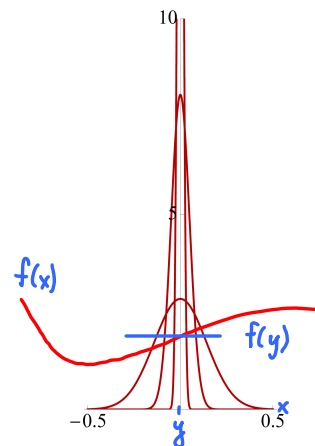
Lorentz-Peaks:
($\epsilon > 0$)

$$\delta_y^\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon/\pi}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \quad (8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon/\pi}{(x+y)^2 + \epsilon^2} = 1 \quad (9)$$

Wird $\delta_y(x)$ für sich allein betrachtet, existiert der Limes nicht, denn $\delta_y^0(x=y) = \infty$ | C 6. 1c

Allerdings ist der Limes wohldefiniert, wenn $\delta_y(x)$ unter einem (verallgemeinerten) Integral vorkommt, für das die Konvention festgelegt wird, das Integral zu berechnen, bevor der Limes gebildet wird. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dann gilt,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y(x) f(x) &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y^\varepsilon(x) f(x) & (1) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y^\varepsilon(x) f(y) & (2) \\
 &= f(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_y^\varepsilon(x)}_{(b.s) = 1} & (3) \\
 &= f(y) & (4)
 \end{aligned}$$



Weil $\delta_y^\varepsilon(x)$ nur im Bereich $y - \varepsilon \lesssim x \lesssim y + \varepsilon$ Gewicht hat, kann im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ unter dem Integral $f(x)$ durch $f(y)$ ersetzt werden! [Annahme dabei: bei y ist $f(x)$ hinreichend glatt.]

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) x^3 = y^3$ (5)

'delta-Funktion':

| C 6. 1d

$\delta_y(x)$ ist eine 'verallgemeinerte Funktion' oder 'Distribution', (definiert über Folgen), d.h. eine Abbildung v. Funktionen auf Zahlen mittels Integration:

$$\delta_y: \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektorraum v. Funktionen} \\ f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_I dx \delta_y(x) f(x) = f(y) \quad \forall y \in I$$

(1) (2)

↙ offenes Intervall

Definierende Eigenschaft:
für alle $f(x)$, und alle $y \in I$, gilt:

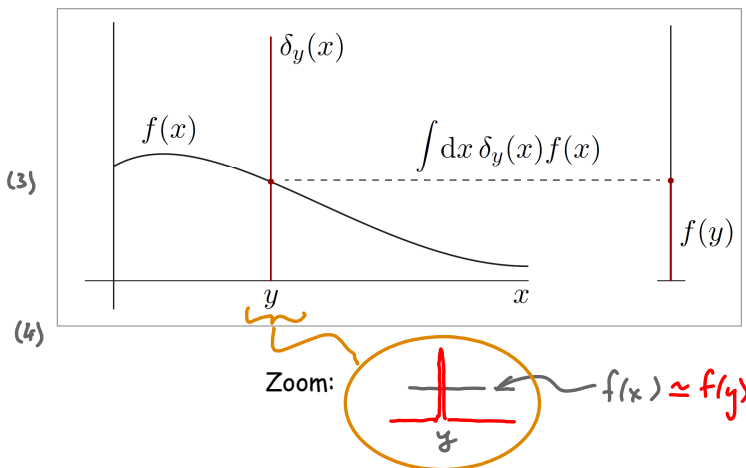
(i) $\int_I dx \delta_y(x) f(x) = f(y)$ (2)

Hieraus folgt:

(ii) $1 = \int_I dx \delta_y(x)$ (3)

'Gewicht' der delta-Funktion = 1

(iii) laut (3) muss delta-Funktion überall $= 0$ sein, ausser bei $x = y$; aber laut (4) muss Gewicht = 1 sein. Also muss sie 'unendlich scharf gepeakt' sein:



$$\delta_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq y \\ \infty & \text{für } x = y \end{cases}$$

(5)
 (6)

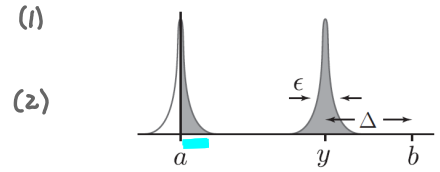
Eigenschaften der delta-Funktion: $\delta(x-y) \equiv \delta_y(x)$

C6.1e

(können im Rahmen der 'Distributionstheorie' (L. Schwartz) sauber bewiesen werden, unter der Annahme, dass $f(x)$ hinreichend glatt ist)

1. Für alle stetigen oder differenzierbaren Funktionen $f: I = (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ gilt:

$$\int_a^b dx \delta(x-y) f(x) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } a < y < b \\ \frac{1}{2} f(a) & \text{falls } y = a \\ \frac{1}{2} f(b) & \text{falls } y = b \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (1)$$



2. Konsequenz v. 1: $\delta(x-y) f(x) \stackrel{(1)}{=} \delta(x-y) f(y)$ (Implizite Annahme: (3))

3. Insbesondere: $\delta(x) x \stackrel{(3)}{=} 0$ (4)

Aber: Produktbildung mit singulären Funktionen, insbesondere $\delta^2(x)$, ist nicht möglich!

4. $\delta(x-y) = \delta(y-x)$ (eine gerade 'Funktion') (5)

denn: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(y-x) f(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') f(y-x')$ (6)

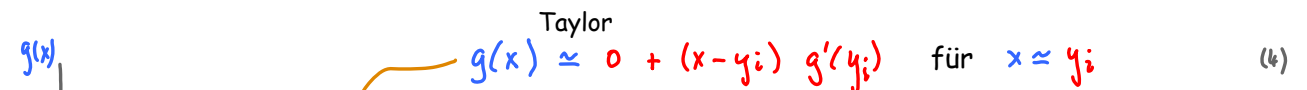
$\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) f(x)$ (7)

5. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ für $a \in \mathbb{R}$ (1) C6.1f

denn: $\int dx \delta(ax) f(x) \stackrel{x = \frac{1}{|a|} x'}{=} \int \frac{dx'}{|a|} \delta(\pm x') f\left(\frac{x'}{|a|}\right) \stackrel{(f.b)}{=} \frac{1}{|a|} f(0)$ (2)

6. $\delta(g(x)) \stackrel{(2)}{=} \sum_i \frac{1}{|g'(y_i)|} \delta(x-y_i)$ (3) wobei y_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind:

(Verallgemeinerung von 5.)



$\delta(g(x)) = \delta((x-y_i) g'(y_i)) \stackrel{(3)}{=} \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|}$ (5)

denn $\delta(\cdot) = 0$ falls Argument $\neq 0$

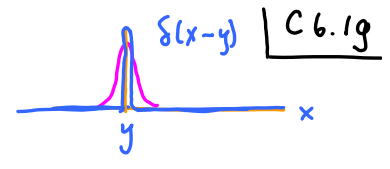
Beispiel für 5:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^2+3x-10) \cdot (2x+1) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{|7|} [2 \cdot 2 + 1] + \frac{1}{|-7|} [2 \cdot (-5) + 1] = -\frac{4}{7}$ (6)

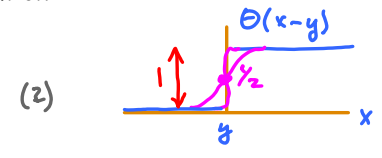
$g(x) = x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$ hat Nullstellen bei: $y_1 = 2$, $g'(y_1) = 7$

$g'(x) = 2x+3$ $y_2 = -5$, $g'(y_2) = -7$

7. $\int_{-\infty}^x dx' \delta(x'-y) \stackrel{(e.1,2)}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } x > y \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x < y \end{cases} \equiv \Theta(x-y) \quad (1)$
 'Heaviside Theta-Funktion'

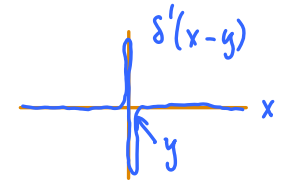


$\Rightarrow \frac{d}{dx} \Theta(x-y) = \delta(x-y)$

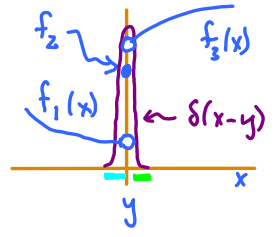


8. Ableitung der delta-Funktion, $\delta'(x)$ wird definiert durch:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-y) f(x) = -f'(y) = -\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \quad (3)$
 (zu zeigen via partieller Integration)



9. Falls $f(x)$ unstetig ist bei y : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \forall x < y \\ f_2 & \forall x = y \\ f_3(x) & \forall x > y \end{cases} \quad (4)$



$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y) f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f_1(y-\epsilon) + f_3(y+\epsilon)] \quad (5)$

linke und rechte Flanke der delta-Funktion haben Gewicht von je 1/2

C6.2 Fourier-Reihen

C6.2a

Ziel: geschickte Darstellungen für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zu finden, und zwar als Linearkombinationen von 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum.

Zur Erinnerung: jeder Vektor in \mathbb{C}^n ist darstellbar als Linearkombination v. Basisvektoren:

$\mathbb{C}^n \ni \vec{v} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{w}_{\alpha} v^{\alpha} \quad (1)$
 $v^{\alpha} = \langle \vec{w}^{\alpha}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (\overline{w^{\alpha}_i}) v_i \quad (2)$
 $\{\vec{w}_{\alpha}\}$: Basisvektoren v. \mathbb{C}^n 'Informationsträger' der Darstellung des Vektors \vec{v}

Analoger Ansatz für Funktionen: 'Fourier-Reihe':

$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \psi_k(x) \tilde{f}_k \quad (3)$
 $\tilde{f}_k = \langle \psi_k, f \rangle = \int_I dx \overline{\psi_k(x)} f(x) \quad (4)$
 $\{\psi_k(x)\}$: 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum
 'Informationsträger' der Darstellung der Funktion f [in diesem Zusammenhang ist Index unten üblich]

Wir werden sehen:

$\{\psi_k(x) = e^{ikx}\}$ ist ein Satz v. 'Basis-Funktionen' im Vektorraum aller Funktionen, mit nützlichen Eigenschaften, z.B. Orthonormalität; insbesondere: Ableitung läßt sich leicht berechnen!

Sei $f : I = (x_0, x_0 + L)$, $x \mapsto f(x)$ eine beliebige, gegebene Funktion ⁽¹⁾ C6.2b

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \psi_k(x)} \text{ 'Fourier-Moden'}$ (2)

Fourier-Reihen-Ansatz für $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$ (3)
'Fourier-Komponenten'

Summe \sum_k geht über alle k -Werte der Form $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$ (4)
 (manchmal wird auch n , statt k , als Index benutzt)

Eigenschaften der 'Fourier-Moden':

1. Periodizität bezüglich I: $e^{ik \cdot x_0} = e^{ik \cdot (x_0 + L)}$ (5)

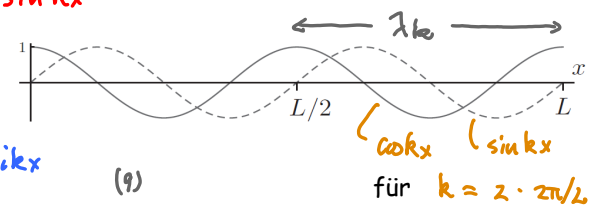
denn: $e^{ikL} = e^{i \frac{2\pi n}{L} L} = e^{i2\pi n} = (e^{i2\pi})^n \stackrel{(C5.2b.2)}{=} 1^n = 1$ (6)

[Die Gewährleistung dieser Periodizität ist der Grund für die Wahl von k in (4).]

[Zur Erinnerung: $e^{i2\pi} \stackrel{(C5.2b.2)}{=} 1$] (7)

Innerhalb von I oszilliert $e^{ikx} \stackrel{\text{(Euler)}}{=} \cos kx + i \sin kx$

mit 'Wellenlänge' $\lambda_k = \frac{2\pi}{k} \stackrel{(4)}{=} \frac{L}{n} \stackrel{(8)}{=} \frac{L}{n}$ (8)



denn: $e^{ik(x + \lambda_k)} = e^{ikx} e^{ik \frac{2\pi}{k}} = e^{ikx} e^{i2\pi} = e^{ikx}$ (9)

2. Orthonormalität (bezüglich Integration über I):

$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \int_I dx \overline{\psi_k(x)} \psi_{k'}(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{x_0}^{x_0+L} dx \cdot 1 = L$ (1) C6.2c

$= \int_{x_0}^{x_0+L} dx e^{-ikx} e^{ik'x} = \int_{x_0}^{x_0+L} dx e^{i(k'-k)x}$

$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{k'=k} \int_{x_0}^{x_0+L} dx \cdot 1 = L \\ \xrightarrow{k' \neq k} \frac{e^{i(k'-k)x}}{i(k'-k)} \Big|_{x_0}^{x_0+L} = \frac{e^{i(k'-k)(x_0+L)} - e^{i(k'-k)x_0}}{i(k'-k)} \stackrel{(b.5)}{=} 0 \end{array} \right\} = L \delta_{kk'}$ (3)

$\int dx e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$ (2)

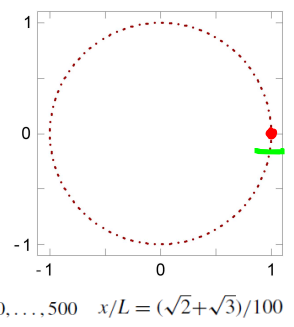
explizit $= \frac{e^{i(k'-k)x_0+L} - e^{i(k'-k)x_0}}{i(k'-k)} = \frac{e^{i(k'-k)x_0} [e^{i(k'-k)L} - 1]}{i(k'-k)} \stackrel{(b.6)}{=} 0$

3. Vollständigkeit: $\frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \delta(x)$ für $x \in (-L, L)$, $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$ (4)

Begründung:

$x = 0$: alle Phasenfaktoren $= 1$, $\frac{1}{L} \sum_k 1 = \infty$ (5)

$x \neq 0$: Phasenfaktoren liegen 'quasi-zufällig-verteilt' auf Einheitskreis, somit liefert unendliche Summe $\frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = 0$ (6)



Gewicht: $\int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \frac{1}{L} \sum_k \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{ikx} = 1$ (7)
mutiges Vertauschen
(3) $L \delta_{k0}$

Rezept zur Berechnung v. Fourier-Komponenten für gegebene Funktion $f(x)$

C6.2d

$$\langle \psi_k, f \rangle = \int_I dx e^{-ik \cdot x} f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_{k'} \tilde{f}_{k'} \int_I dx e^{ik' \cdot x} e^{-ik \cdot x} = \tilde{f}_k \quad (1)$$

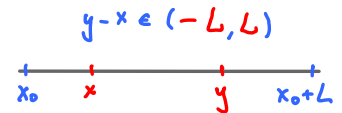
kühnes Vertauschen v. Integral und Summe (c.3) $L \delta_{kk'}$

Fazit:

$$\tilde{f}_k \stackrel{(c.1)}{=} \int_I dx e^{-ik \cdot x} f(x) \quad \text{'Fourier-Transformation'} \quad (2)$$

$$f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k \quad \text{'Fourier-Rücktransformation'} \quad (2')$$

Konsistenzcheck: ist (2) für \tilde{f}_k konsistent mit (b.3) für $f(x)$?



kühnes Vertauschen v. Integral und Summe

$$f(y) \stackrel{(2')}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{iky} \tilde{f}_k \stackrel{(2)}{=} \int_I dx \frac{1}{L} \sum_k e^{iky} e^{-ikx} f(x) \stackrel{(c.4)}{=} \int_I dx \delta(y-x) f(x) = f(y) \quad (3)$$

☺

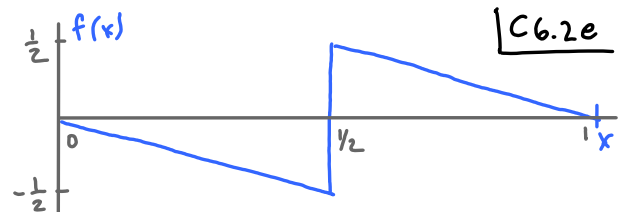
Falls $f(x)$ reell ist, gilt:

$$\overline{\tilde{f}_k} \stackrel{(2)}{=} \int dx e^{+ikx} \overline{f(x)} \stackrel{(5)}{=} \tilde{f}_{-k} \quad (5)$$

$$\overline{f(x)} = f(x) \quad (4)$$

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \forall x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & \forall x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad [L=1] \quad (1)$$



C6.2e

Fourier-Komponenten:

$$\tilde{f}_{k=0} \stackrel{(d.2)}{=} \int_0^1 dx e^{-i \cdot 0 \cdot x} f(x) = \int_0^{1/2} dx (-x) + \int_{1/2}^1 dx (1-x) = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{1/2}^1 = 0 \quad (2)$$

Spalte Integral in zwei Teile, da Definition von $f(x)$ eine Fallunterscheidung beinhaltet.

$$\tilde{f}_{k \neq 0} = \int_0^{1/2} dx e^{-ik \cdot x} (-x) + \int_{1/2}^1 dx e^{-ik \cdot x} (1-x) = \int_0^{1/2} dx e^{-ik \cdot x} (-x) + \int_{1/2}^1 dx e^{-ik \cdot x} \cdot 1 \quad (3)$$

$$= \left(\frac{e^{-ikx}}{-ik} (-x) \right) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} dx \left(\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right) \cdot (-1) + \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{1/2}^1 \quad (4)$$

partielle Integration

$= 0$ (c.3) mit $k \neq 0$

$$= \frac{1}{-ik} \left[e^{-ik \cdot 1} (-1) - 0 \right] + \frac{1}{-ik} \left[e^{-ik \cdot 1} - e^{-ik \cdot 1/2} \right] = \frac{e^{-ik/2}}{+ik} \quad (5)$$

Für $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, $L=1$, gilt: (1) C6.2f

$$e^{-ik/2} = e^{-i(2\pi n)/2} = (e^{-i\pi})^n = (-1)^n \quad (2) \Rightarrow \tilde{f}_{k=2\pi n \neq 0} = \frac{(-1)^n}{i2\pi n} \quad (f.5) \quad (2)$$

(2) eingesetzt in Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k = \sum_{n \neq 0} e^{i(2\pi n)x} \frac{(-1)^n}{i2\pi n} \quad (3)$$

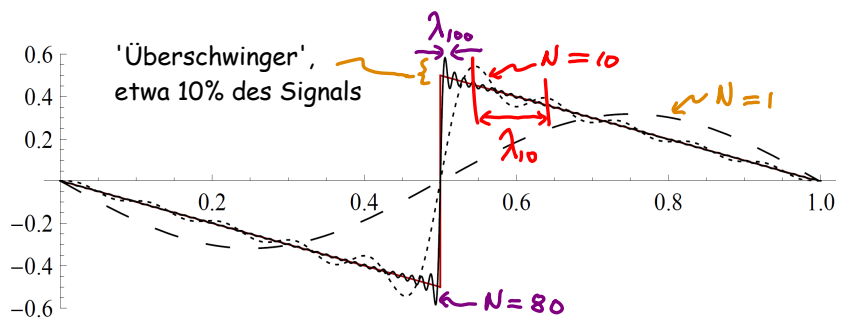
$$= \sum_{m>0} \frac{(-1)^m}{\pi m} \frac{1}{2i} [e^{i2\pi m x} - e^{-i2\pi m x}] = \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \frac{(-1)^m}{m} \sin(2\pi m x) \quad (4)$$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{1}{m}$

(e.5) $\sin(2\pi m x)$

Beschränkung der Summe auf N Terme liefert Näherung für f(x); je mehr Terme, je genauer: Für $\sum_{m=1}^N$ werden Details auf der Skala d. kleinsten Wellenlänge,

reproduziert. $\lambda_N = \frac{L}{N}$ (b.9) (5)



Periodische delta-Funktion

C6.2g

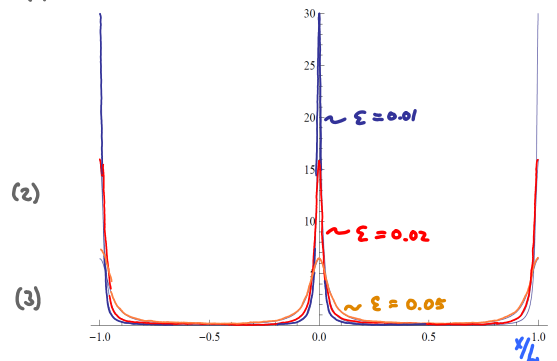
Vollständigkeit: $\frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \delta(x)$ für $x \in (-L, L)$ (1)

Kontrollierte Berechnung der Summe mittels 'Konvergenzfaktor': definiere (für $\epsilon \rightarrow 0^+$)

$$\delta^\epsilon(x) \equiv \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} e^{-\epsilon|k|}$$

Hausaufgabe

$$= \frac{(1/L)(1 - e^{-\epsilon 4\pi/L})}{1 + e^{-\epsilon 4\pi/L} - 2e^{-\epsilon 2\pi/L} \cos(2\pi x/L)}$$



Für $x \neq 0$: $\delta^{\epsilon \rightarrow 0}(x \neq 0) = 0$ (4)

Lorentz-Darstellung der delta-Funktion, (C6.1b.9)

Für $|x|/L \ll 1$, $\epsilon/L \ll 1$ aber x/ϵ beliebig:

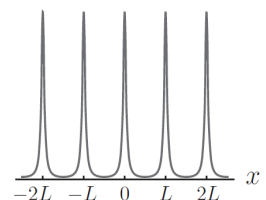
$$\delta^\epsilon(x) \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta(x) \quad (5)$$

Hausaufgabe

Ferner: $\delta^\epsilon(x+L) = \delta^\epsilon(x)$ periodisch, mit Periode = L (6)

Folglich gilt für $\epsilon=0$: periodische delta-Funktion:

$$\frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL) \quad (7)$$



Parseval-Identität: Seien $f(x), g(x)$ zwei Funktionen v. $I = (x_0, x_0+L) \rightarrow \mathbb{C}$ (1) C 6.2h

mit Fourier-Reihen: $f(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$ (1) $g(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{g}_k$ (2)

$k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$

dann gilt: $\int_I \overline{f(x)} g(x) = \int_I \left[\frac{1}{L} \sum_k e^{-ikx} \tilde{f}_k \right] \cdot \left[\frac{1}{L} \sum_{k'} e^{ik'x} \tilde{g}_{k'} \right]$ (3)

(kühnes Vertauschen von Integral und Summe!) $= \frac{1}{L} \sum_k \frac{1}{L} \sum_{k'} \tilde{f}_k \tilde{g}_{k'} \int_I e^{i(-k+k') \cdot x}$ (4)

(c.3) $\int_I e^{i(-k+k') \cdot x} = L \delta_{kk'}$

$\int_I \overline{f(x)} g(x) = \frac{1}{L} \sum_k \tilde{f}_k \tilde{g}_k$

Parseval-Identität (5)

Speziell: $\int_I |f(x)|^2 = \frac{1}{L} \sum_k |\tilde{f}_k|^2$ (6)

Anmerkung: beide Seiten kann man als Skalarprodukt auf geeignet definierten Vektor-Räumen interpretieren. Dann folgt aus (6), dass die Fouriertransformation eine eins-zu-eins-Abbildung ist, 'Winkel und Längen (d.h. Metrik) erhält', somit eine 'Isometrie' ist.

Anmerkung zu Notationskonventionen

C 6.2 i

Warnung: es gibt in der Literatur viele unterschiedliche Konventionen!

Hier benutzte Konvention: $f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$, $\tilde{f}_k = \int_0^L dx e^{-ikx} f(x)$ (1)

Der L-abhängige Vorfaktor kann anders gewählt werden; z.B.: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$, $\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \tilde{f}_k$ (2)

Oder auch: $f(x) = \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$, $\tilde{f}_k = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{L} \tilde{f}_k$ (3)

Auch das Vorzeichen im Exponenten kann anders gewählt werden: $f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{-ikx} \tilde{f}_k$, $\tilde{f}_k = \int_0^L dx e^{+ikx} f(x) = \tilde{f}_{-k}$ (4)

In Physik-Anwendungen, wo Funktion von der Zeit abhängt, wird die Fourier-Transformation von Zeit-Darstellung zu Frequenz-Darstellung meist wie folgt definiert:

Für $f : (t_0, t_0+\tau) \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$: $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau} n$, $n \in \mathbb{Z}$ (5)

anderes Vorzeichen als bei xk-Darstellung (1) !

Fourier-Reihen-Ansatz: $f(t) = \frac{1}{\tau} \sum_n e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n$, (6) $\tilde{f}_n = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt e^{+i\omega_n t} f(t)$ (7)

Zusammenfassung C6.1 delta-Funktion

Z C 6.1

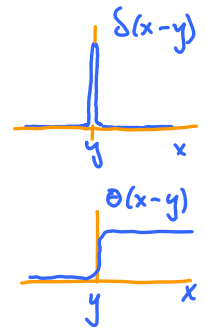
Definierende Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(x) dx = f(y) \quad (1)$$

$\delta_y(x) = \delta(x-y)$ ist ein unendlich hoher, unendlich scharfer Peak bei $x = y$:

Werte: $\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq y \\ \infty & \text{für } x = y \end{cases}$

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) dx = 1$



Beliebte Darstellungen:

Gauß-Peak: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$

Lorentz-Peak: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$

Exp.-Peak: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon}$

Wichtige Eigenschaften:

$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, (7) $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|}$ wobei y_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind.

$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$, (9) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y) f(x) dx = -f'(y)$

Zusammenfassung C6.2 Fourier-Reihen

Z C 6.2a

$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, $I = (x_0, x_0+L)$ (1)

Fourier-Reihen-

Ansatz für $f(x)$:

'Fourier-Rücktransformation'

$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}} e^{ikx} \tilde{f}_k$ 'Fourier-Moden' 'Fourier-Komponenten' (2)

'Fourier-Transformation':

$\tilde{f}_k = \int_I dx e^{-ik \cdot x} f(x)$ (3)

Eigenschaften der 'Fourier-Moden':

Periodizität:

Wellenlänge: $\lambda_k = \frac{2\pi}{k} = \frac{L}{n}$ $e^{ik \cdot (x+L)} = e^{ik \cdot x}$ (4)

Orthonormalität:

$\int_I dx e^{i(k'-k)x} = L \delta_{kk'}$ (5)

Vollständigkeit:

$\frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}} e^{ikx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x+mL)$ periodische delta-Funktion (6)

Parseval-Identität:

$\int_I dx |f(x)|^2 = \frac{1}{L} \sum_k |\tilde{f}_k|^2$ (7)