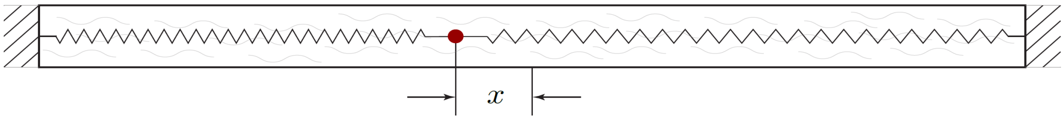
L7.4 Homogenes System v. linearen DG 1. Ordnung
Anwendung: Gedämpfter harmonischer Oszillator

C7.4f



Eine Masse m, gekoppelt an zwei identische Federn, bewege sich in einer Dimension, in einer Flüssigkeit (Dämpfung). In Gleichgewichtslage sind beide Federn gleich lang.

Auslenkung relativ zur Gleichgewichtslage: $x(t)$

Geschwindigkeit: $\dot{x}(t) \equiv v(t)$ (1)

Newton's 2. Gesetz: $\dot{v}(t) \equiv a(t) = \frac{1}{m}F(t) = \underbrace{-\overset{>0}{\Omega^2}\, x(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \underbrace{-\, 2\gamma\, v(t)}_{\text{Reibungskraft}}$ (2)

Dimensionen: $[\Omega] = \frac{1}{\text{Zeit}}$ $\qquad [\gamma] = \frac{1}{\text{Zeit}}$ (3)

Bedeutung: Ω = Oszillatorfrequenz $\qquad \gamma$ = Dämpfungsrate > 0 (4)

Definierende Gleichung für gedämpften harmonischen Oszillator (HO):

(1) in (2): $\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = 0}$ (5)

Gedämpfter HO als lineares System von zwei DG 1. Ordnung

C7.4g

(4f.1): $\dot{x} = v$ (1)

(4f.2): $\dot{v} = -2\gamma v - \Omega^2 x$ (2)

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\Omega^2 & -2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$ (3)

Matrix/Vektornotation:
[Notationswechsel: $\vec{x}$ statt $\vec{f}$]

$\boxed{\dot{\vec{x}} \overset{(4c.1)}{=} A\cdot\vec{x}}$ (3')

mit $\vec{x} \equiv \begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$, $\qquad A \overset{(2)}{\equiv} \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\Omega^2 & -2\gamma\end{pmatrix}$, (4)

Exponentialansatz: $\vec{x}(t) \overset{(4d.4)}{=} \sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c_0^j$, $\qquad \vec{v}_j = \begin{pmatrix}x_j\\ v_j\end{pmatrix}$ (5)

Eigenwertproblem: $A\cdot\vec{v}_j \overset{(4d.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j$ (6)

Charakteristisches Polynom:

$$\overset{(L7g.3)}{0} \overset{!}{=} \underline{P_A(\lambda)} \overset{(L7g.1)}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{(4)}{=} \det\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -\Omega^2 & -2\gamma-\lambda\end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2}$$ (7)

Zwischenbemerkung:

(4g.7) folgt auch direkt, wenn ein exp-Ansatz für x(t), $x(t) = x_0\, e^{\lambda t}$ (1)

eingesetzt wird in die homogene Bewegungsgl. (4f.5):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0 e^{\lambda t}\right) + 2\gamma \frac{d}{dt}\left(x_0 e^{\lambda t}\right) + \Omega^2\left(x_0 e^{\lambda t}\right) \overset{(4f.5)}{=} 0 \qquad (2)$$

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2\right)}\, x_0 e^{\lambda t} = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad P_A(\lambda) = 0$$

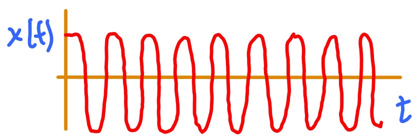
Aber bei so einem Zugang ist zugrundeliegende Struktur des Eigenwertproblems nicht ersichtlich.

Eigenwerte = Nullstellen: $\overset{(L7g.3)}{}$ $P_A(\lambda_j) = \lambda_j^2 + 2\gamma\lambda_j + \Omega^2 \overset{!}{=} 0$ (4)

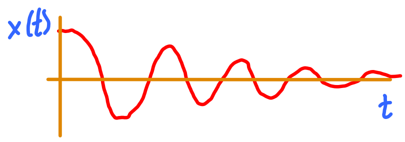
Lösungen von (6): $\boxed{\lambda_\pm \equiv \begin{Bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{Bmatrix} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}}$ (5)

Qualitatives Verhalten der Lösung hängt vom Verhältnis γ/Ω ab:

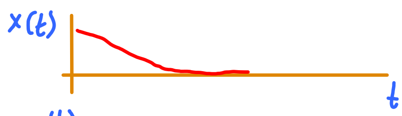
(a): $\gamma = 0$ 'frei, ungedämpft': $\lambda_\pm = \pm i\Omega$, (1)



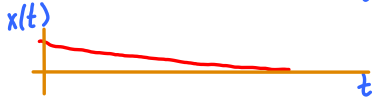
(b): $\gamma < \Omega$ 'unterdämpft': $\lambda_\pm = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}}_{\equiv \Omega_r}$ (2)



(c): $\gamma = \Omega$ 'kritische Dämpfung': $\lambda = -\gamma$ (3)



(d): $\gamma > \Omega$ 'überdämpft': $\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}$ (4)



Reibung führt
- zu exponentiellem Zerfall der Amplitude: $\sim e^{-\gamma t}$ (5)

unterdämpft:
- zu einer Reduktion der Winkelfrequenz Ω (6)
  nach $\Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ welche verschwindet für $\gamma = \Omega$ (7)

überdämpft:
- zu völligen Abwesendheit von Schwingungen! (8)

(b) Unterdämpfter Fall: $\gamma < \Omega$: (anderen Fälle: Übungen!) C7.4j

$$\lambda_\pm \overset{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r \quad \text{mit 'reduzierter Frequenz'} \quad \Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \quad (< \Omega) \qquad (1)$$

Dazugehörigen EV erfüllen:
$$(A - \lambda_\pm \mathbb{1}) \cdot \vec{v}_\pm \overset{(L7i.1),\,(C7.4d.3)}{=} \vec{0} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_\pm & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma - \lambda_\pm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Lösung v. (3) z.B.:
$$\begin{pmatrix} x_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix} \qquad (4)$$

[Check: (4) in (3): $(-\lambda_\pm)\cdot 1 + 1 \cdot \lambda_\pm = 0$ ✓ ; $(-\Omega^2)\cdot 1 - (2\gamma + \lambda_\pm)\lambda_\pm \overset{(4g.7)}{=} 0$]

Allgemeine homogene Lösung:
$$\vec{x}(t) \overset{(4g.5)}{=} c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_- \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_- t} \equiv \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

[Anmerkung: Die Struktur der EV gewährleistet, dass
$$\dot{x}^1(t) \overset{✓}{=} x^2(t) \qquad (5)$$
$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) \overset{(4g.1)}{=} v(t) \ ✓ \qquad (6)$$
d.h. (4g.1) ist erfüllt ✓]

Komplexe Lösungen als Hilfsmittel zur Konstruktion reeller Lösungen C7.4k

Betrachte zunächst nur Ortskomponente: $x \overset{(4g.4)}{\equiv} x^1$ $\quad [\lambda_\pm \overset{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r]$

(4j.1) in (4j.4):
$$x(t) \overset{(4i.4)}{=} \left(c_+ e^{+i\Omega_r t} + c_- e^{-i\Omega_r t}\right) e^{-\gamma t} \qquad (1)$$

Damit $x(t)$ reell ist, brauchen wir komplexe(!) Amplituden: $c_\pm = |c| e^{\pm i\varphi}$ (2)

Dann
$$x(t) \overset{(1),(2)}{=} |c| \left[e^{i(\Omega_r t + \varphi)} + e^{-i(\Omega_r t + \varphi)} \right] e^{-\gamma t} \qquad (3) \qquad \cos A = \tfrac{1}{2}\left(e^{iA} + e^{-iA}\right)$$

$$= e^{-\gamma t} \, |c| \, 2\cos(\Omega_r t + \varphi) \qquad (4) \qquad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$= e^{-\gamma t} \, 2|c| \left[\cos(\Omega_r t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega_r t)\sin(\varphi)\right] \qquad (5)$$

$$= \boxed{e^{-\gamma t}\left[a \cos \Omega_r t + b \sin \Omega_r t\right]} \qquad (6)$$

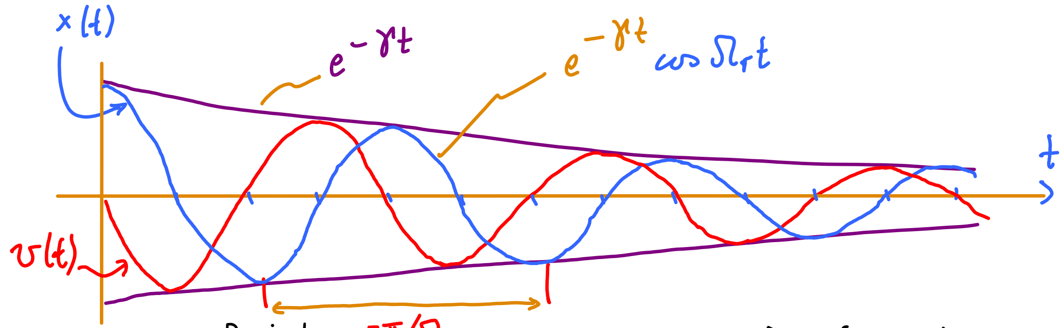
mit $a = 2|c| \cos\varphi = c_+ + c_-$, $\quad b = -2|c| \sin\varphi = i(c_+ - c_-)$ (7)

$$v(t) \overset{(4k.6)}{=} \dot{x}(t) = e^{-\gamma t}\Big\{\cos(\Omega_r t)\big[b\,\Omega_r - a\gamma\big] + \sin(\Omega_r t)\big[-a\,\Omega_r - b\gamma\big]\Big\} \qquad (1)$$

Anpassen der Konstanten mittels Anfangsbedingung:

z.B.: $\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \overset{(4k.6)}{\underset{(4l.1)}{=}} \begin{pmatrix} a \\ b\,\Omega_r - a\gamma \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a = x_0 \\ b = (v_0 + x_0\gamma)/\Omega_r \end{matrix}$ (2)

Skizze für $v_0 = 0$:



(3)

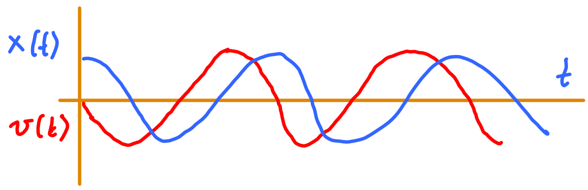
Periode: $2\pi/\Omega_r$

Dämpfungszeit

Amplitude $\dfrac{x(t)}{x(0)}$ zerfällt nach Zeit $1/\gamma$ auf $1/e$ (4)

Die anderen Fälle (qualitativ und in aller Kürze)

(a) Keine Dämpfung: $\gamma = 0$: $\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm i\Omega \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{\pm i\Omega t}$ (1)



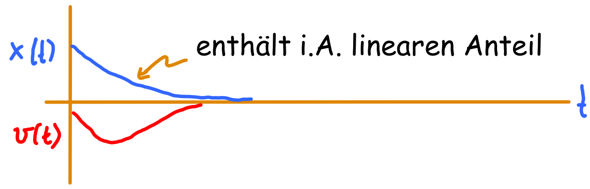
reine Oszillationen:

$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$ (2)

$v(t) = -\Omega A\sin(\Omega t + \varphi)$ (3)

(c) Kritisch gedämpft: $\gamma = \Omega$: $\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = -\gamma$

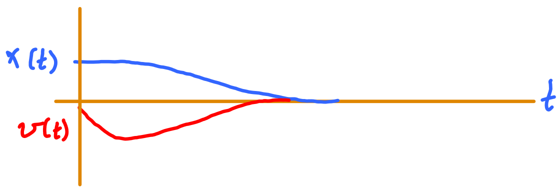
nur eine Lösung! $c(t)\,e^{-\gamma t}$
Finde andere mittels
'Variation der Konstanten'
(siehe S. C7.3f)



$x(t) = (x_0 + v_1 t)\,e^{-\gamma t}$ (4)

$v(t) = (v_1 - \gamma x_0)\,e^{-\gamma t}$ (5)

(d) Überdämpft: $\gamma > \Omega$: $\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \underbrace{-\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \Omega^2}_{>0}}}_{<\gamma} \equiv -\tilde{\gamma}_\pm < 0$ (6)



gar keine Oszillationen: $e^{\lambda t} = e^{-\tilde{\gamma}_\pm t}$ (7)

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

[Notationswechsel: $\vec{x}$ statt $\vec{f}$]

C7.4n

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung hat folgende allgemeine Form:

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\cdot\vec{x}(t) + \vec{b}(t)} \quad \text{'Inhomogenität'} \qquad (1)$$

Satz: Lösung v. (1)

kann geschrieben werden als Summe $\quad \vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \qquad (2)$

der allgemeinen homogenen Lösung $\quad \dot{\vec{x}}_h(t) = A(t)\cdot\vec{x}_h(t) \qquad (3)$

und einer "speziellen" oder "partikulären" inhomogenen Lösung, $\quad \dot{\vec{x}}_p(t) = A(t)\cdot\vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) \qquad (4)$

Check: $\quad \dot{\vec{x}}(t) \overset{(2)}{=} \dot{\vec{x}}_h(t) + \dot{\vec{x}}_p(t)$

$$\overset{(3,4)}{=} A(t)\cdot\left(\vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)\right) + \vec{b}(t) \overset{(2)}{=} A(t)\cdot\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \checkmark \qquad (5)$$

Rezept zur Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung:

(i) Finde allgemeine homogene Lösung
(ii) Finde eine partikuläre Lösung -- Methode hierzu: 'Variation der Konstanten'
(iii) Addiere (i) + (ii), berücksichtige Anfangsbedingungen

Inhomogenes System von linearen DG 1. Ordnung mit konst. Koeff.

C7.4o

Variation der Konstanten für $n > 1$ möglich, aber i.A. schwierig. Ausnahme: $A = A(\cancel{t})$

Also betrachten wir nun

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = A\cdot\vec{x}(t) + \vec{b}(t)} \qquad (1) \qquad \begin{cases} A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) & \text{zeitunabhängige Matrix} \\ \vec{b}(t) \in \mathbb{C}^n & \text{zeitabhängige Inhomogenität} \end{cases}$$

mit Anfangsbedingung: $\quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \qquad (2)$

(i) Lösung für homogene DG per Exponential-Ansatz (bereits bekannt)

$$\vec{x}_h(t) \overset{(C7.4d.4)}{=} \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c_h^j \quad (3) \qquad \text{mit} \qquad A\cdot\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j = 1,\dots,n \qquad (4)$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt

Eigenwertproblem!

$$\vec{c}_h = T^{-1}\vec{x}_h(0)$$

Diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation: $\quad T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \qquad (4')$

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DG: per Variation der Konstanten

Ansatz:
[analog zu (C7.3c.5)]

$$\vec{x}_p(t) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c_p^j(t) \qquad (5)$$

C7.4p

Inhomogene DG (4o.1):

$$\vec b(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\cdot\right)\vec x_p(t) \qquad (1)$$

$$\overset{(4o.5)}{=} \sum_j \left(\frac{d}{dt} - \underbrace{A\cdot\right) c_p^j(t)\,\vec v_j\, e^{\lambda_j t}}_{(1)} \qquad (2)$$

$$= \sum_j \left(\dot c_p^j(t) + \lambda_j \cancel{c_p^j(t)} - \cancel{c_p^j(t)}\,\lambda_j\right)\vec v_j\, e^{\lambda_j t} \qquad (3)$$

$$\sum_j \vec v_j\, b^j(t) \overset{!}{=} \boxed{\vec b(t) = \sum_j \dot c_p^j(t)\,\vec v_j\, e^{\lambda_j t}} \qquad (4)$$

Trick: Zerlege $\vec b(t)$ in Eigenbasis von A

Eigenvektoren sind linear unabhängig, also folgt aus (4):

$$\dot c_p^j(t)\,\cancel{e^{\lambda_j t}} = b^j(t)\, e^{-\lambda_j t} \qquad \forall\, j = 1,\dots,n \qquad (5)$$

(5) ist lösbar per Integration, siehe (C7.1e.1-3)

$$\boxed{c_p^j(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t\; b^j(\tilde t)\, e^{-\lambda_j \tilde t}} \quad (6) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{aligned} c_p^j(t_0) &= 0 \\ \vec x_p(t_0) &= \vec 0 \end{aligned}} \right. \qquad (7)$$

C7.4q

(iii) Allgemeine Lösung von (4o.1):

$$\vec x(t) \overset{(4n.2)}{=} \vec x_h(t) + \vec x_p(t) \overset{(4o.3)}{=} \sum_j \vec v_j\, e^{\lambda_j t}\, c_h^j + \vec x_p(t) \qquad (1)$$

Bestimme Konstanten mittels Anfangsbedingung:

$$\vec x(t_0) = \sum_j \vec v_j\, \underbrace{e^{\lambda_j t_0}\, c_h^j}_{\equiv\, c_{h0}^j\ (2')} + \overbrace{\vec x_p(t_0)}^{(4p.7)\ =\ \vec 0} \qquad (2)$$

i-Komponente:

$$x^i(t_0) = \sum_j \underbrace{v_j^i}_{\overset{(4o.4')}{} T^i{}_j}\, c_{h0}^j$$

Kompaktnotation:

$$\left[\ \vec x(t_0) = T\,\vec c_{h0}\ \right] \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\ \vec c_{h0} = T^{-1}\,\vec x(t_0)\ \right] \qquad (4)$$

[vergleiche C7.4d.9)]

$T = (\vec v_1, \dots, \vec v_n)$

Invertiert:

$$c_h^j\, e^{\lambda_j t_0} \overset{(2')}{=} c_{h0}^j = \sum_i (T^{-1})^j{}_i\, x^i(t_0)$$

$$c_h^j = \sum_i e^{-\lambda_j t_0}\,(T^{-1})^j{}_i\, x^i(t_0) \qquad (5)$$

Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit Antrieb

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x \overset{(4f.5)}{=} \cancel{0}\; f(t)} \qquad (1)$$

Matrix-Form:

$$\dot{x} \overset{(4g.1)}{=} v \qquad (2)$$

$$\dot{v} \overset{(4g.2)}{=} -\Omega^2 x - 2\gamma v + f(t) \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \overset{(4g.3)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{f(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{b}(t)} \qquad (4)$$

$$\dot{\vec{x}} \overset{(4g.4)}{=} A \cdot \vec{x} + \vec{b}(t) \qquad (5)$$

Unterdämpfter Fall:
$$\lambda_\pm \overset{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r \quad (6) \quad , \quad \lambda_+ - \lambda_- \overset{(6)}{=} 2i\Omega_r \quad (6')$$

(i) Homogene Lösung:

(bereits bekannt, siehe Seite C7.4j)

$$\vec{x}_h(t) \overset{(4j.4)}{=} c_+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{bmatrix}}_{\vec{v}_+} e^{\lambda_+ t} + c_- \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{bmatrix}}_{\vec{v}_-} e^{\lambda_- t} \qquad (7)$$

(ii) Konstruktion einer partikulären Lösung, mittels Var. d. Konstanten:

Ansatz laut (4o.5):
$$\vec{x}_p(t) = c_+(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{bmatrix}}_{\vec{v}_+} e^{\lambda_+ t} + c_-(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{bmatrix}}_{\vec{v}_-} e^{\lambda_- t} \qquad (1)$$

Zerlegung v. Antrieb in Eigenbasis von A, laut (4o.4): $\vec{b}(t) = \sum_j \vec{v}_j b^j(t)$

$$\vec{b}(t) \overset{(4q.5)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t) = \frac{1}{\underbrace{\lambda_+ - \lambda_-}_{\overset{(4r.6')}{=} 2i\Omega_r}} \left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}}^{\vec{v}_+} - \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}}^{\vec{v}_-} \right] f(t) \equiv b_+(t)\,\vec{v}_+ + b_-(t)\,\vec{v}_- \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad b_\pm(t) = \pm \frac{f(t)}{2i\Omega_r} \qquad (3)$$

Lösung für $c_\pm(t)$ laut (4o.6):

$$c_\pm(t) \overset{(4p.6)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; b_\pm(\tilde{t})\, e^{-\lambda_\pm \tilde{t}} \overset{(3)}{=} \pm \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r}\, e^{-\lambda_\pm \tilde{t}} \qquad (4)$$

Für partikuläre Lösung, setze (4s.4) in (4s.1):

C7.4t

$$\begin{pmatrix} x_p(t)\\ v_p(t)\end{pmatrix} = \vec{x}_p(t) \overset{(4s.1)}{=} c_+(t)\begin{bmatrix}1\\ \lambda_+\end{bmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_-(t)\begin{bmatrix}1\\ \lambda_-\end{bmatrix} e^{\lambda_- t} \qquad (1)$$

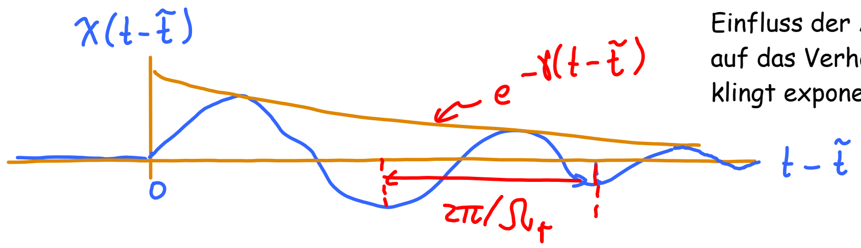
$$\overset{(4s.2)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r}\left[\begin{bmatrix}1\\ \lambda_+\end{bmatrix} e^{\underbrace{\lambda_+(t-\tilde{t})}} - \begin{bmatrix}1\\ \lambda_-\end{bmatrix} e^{\underbrace{\lambda_-(t-\tilde{t})}}\right] \qquad (2)$$

$$(4q.6): \quad e^{(-\gamma + i\Omega_r)(t-\tilde{t})} \qquad e^{(-\gamma - i\Omega_r)(t-\tilde{t})}$$

Orts (1.)-Komponente hiervon liefert:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (3)$$

$$\boxed{x_p(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; f(\tilde{t})\; \underbrace{\frac{e^{-\gamma(t-\tilde{t})}}{\Omega_r}\; \sin \Omega_r(t-\tilde{t})}_{= \chi(t-\tilde{t})}} \qquad (4)$$



Einfluss der Antriebskraft zum Zeitpunkt $\tilde{t}$
auf das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt t
klingt exponentiell ab

(5)

<u>C7.5 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung</u>

C7.5a

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} f$$

Eine allgemeine homogene lineare DG von Ordnung n,

$$c_n f^{(n)} + c_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + c_1 f^{(1)} + c_0 f^{(0)} = 0 \qquad (1)$$

kann immer umgeschrieben werden in ein System von n linearen DG von Ordnung 1:

Führe für jede höhere Ableitung eine neue Variable ein,

Index <u>oben</u> für Komponenten eines Vektors (also <u>keine</u> Potenz!)

$$x^1(t) \equiv f^{(0)}(t) \qquad (2)$$

$$\dot{x}^1(t) \overset{(2)}{=} x^2(t) \equiv f^{(1)}(t) \qquad (3)$$

$$\dot{x}^2(t) \overset{(3)}{=} x^3(t) \equiv f^{(2)}(t) \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}^{n-1}(t) \overset{(4)}{=} x^n(t) \equiv f^{(n-1)}(t) \qquad (5)$$

$$\dot{x}^n(t) \equiv f^{(n)}(t) \qquad (6)$$

dann lautet (1):

$$\cancel{c_n}\, \dot{x}^n + \frac{c_{n-1}}{c_n} x^n + \dots + \frac{c_1}{c_n} x^2 + \frac{c_0}{c_n} x^1 = 0 \qquad (7)$$

(2-7) sind ein System v. DG 1. Ordnung: (mit zeitabhängigen Koeffizienten)

In Matrix-Notation: C7.5b

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \vdots \\ \dot{x}^{n-1} \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\frac{c_0}{c_n} & -\frac{c_1}{c_n} & -\frac{c_2}{c_n} & & -\frac{c_{n-2}}{c_n} & -\frac{c_{n-1}}{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t)} \tag{2}$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

Z C7.4b

Lineare DG: $\underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\in \mathbb{C}^n} = \underbrace{A(t)}_{\mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$

falls $= 0$: homogen

falls $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG: $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$

Allgemeine homogene Lösung: $\dot{\vec{x}}_h(t) = A(t) \cdot \vec{x}_h(t)$

(irgendeine) Partikuläre Lösung: $\dot{\vec{x}}_p(t) = A(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$

1D (n=1): $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen): $x_h(t) = X_0\, e^{\Phi(t)}$

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; a(\tilde{t})$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten): $x_p(t) = c(t)\, e^{\Phi(t)}$

mit: $c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; b(\tilde{t})\, e^{-\Phi(\tilde{t})}$

Zusammenfassung: Inhomegene lineare DG mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) , \qquad A = A(\cancel{t}) \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) , \quad \vec{b}(t) \in \mathbb{C}$$

(i) Suche Lösung für homogene DGL per Exponential-Ansatz:

e-Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!

zeit<u>un</u>abhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{x}_h(t) = \sum_j c_h^j \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j , \quad j = 1, \dots, n$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt

Eigenwertproblem!

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DGL: per Variation der Konstanten

$$\vec{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t) \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} ,$$

(zerlegt in Eigenbasis von A)

mit $c_p^j(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t} \; b^j(\tilde{t}) \, e^{-\lambda_j \tilde{t}}$ und $\vec{b}(t) = \sum_j b^j(t) \, \vec{v}_j$

(iii) Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$