

# C5 Funktionen: Reihenentwicklungen

Brook Taylor  
(1685-1731)



C5.1a

## C5.1 Taylor-Reihen

(Analysis-Vorlesung: Konvergenz von Reihen und Folgen)

Grundlegende Frage: Wann / unter welchen Voraussetzungen lässt sich eine gegebene Funktion durch eine Potenzreihe darstellen oder annähern?

Und wozu ist das nützlich?

Beispiel 1: Geometrische Reihe

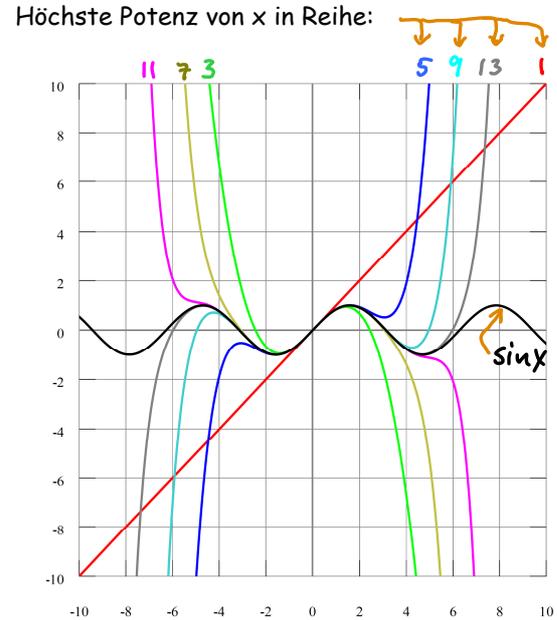
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{konvergent falls } |x| < 1$$

[Beweis: weiter unten]

Beispiel 2: Sinus-Funktion

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

konvergent für alle  $x \in \mathbb{C}$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

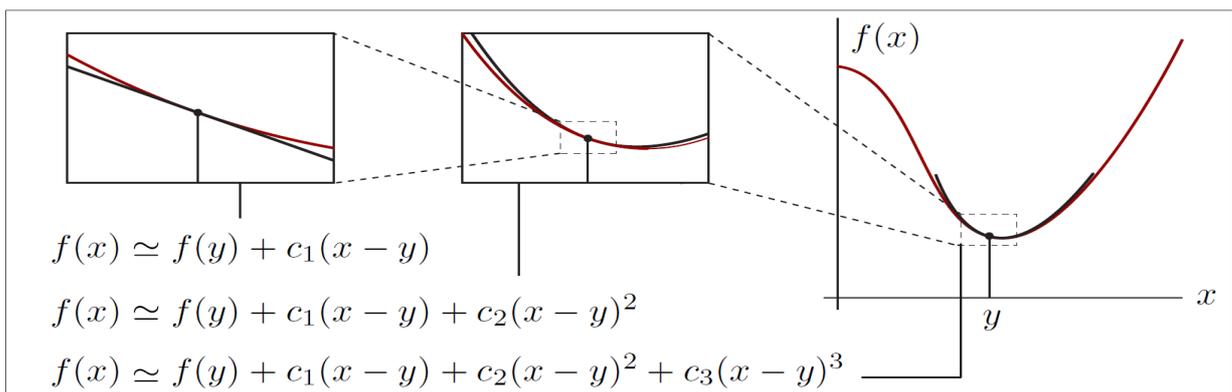
(1) C5.1b

sei eine allgemeine ('gutmütige') Funktion. Frage: kann man sie in der Nähe des Punktes  $x=y$  darstellen mittels einer Potenzreihe in  $\delta = x-y$  ?

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n$$

← Potenzen von (x-y)  
← x-unabhängige Koeffizienten

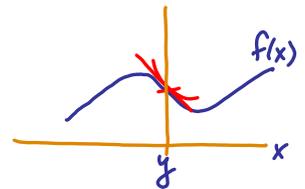
(2)



Für  $\delta$  genügend klein gilt:  $f(y+\delta) = f(y) + \delta f'(y)$ ,  $|\delta| \ll 1$  (1) C5.1c

$x \equiv y + \delta$ :  $f(x) = f(y) + (x-y) f'(y)$ ,  $|x-y| \ll 1$  (2)

In (b.1) ist jedoch die Absicht / Hoffnung, einen Ausdruck für  $f(x)$  zu bekommen, der nicht nur für  $|x-y| \ll 1$  gilt!



Bestimmung der Koeffizienten  $C_n$ :

Grundidee: wähle die  $C_n$  so, dass sich  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-y)^n$  möglichst eng an  $f(x)$  'anschmiegt', d.h. dass alle Ableitungen beider Funktionen bei  $x = y$  gleich sind.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x-y)^m \quad (3)$$

$$f(x) \Big|_{x \rightarrow y} = C_0 + C_1 (x-y)^1 + C_2 (x-y)^2 + C_3 (x-y)^3 + \dots \quad (4)$$

$$f'(x) \Big|_{x \rightarrow y} = \cancel{C_0} + \underbrace{1 \cdot C_1 (x-y)^{1-1}}_{=1} + 2 \cdot C_2 (x-y)^{2-1} + 3 \cdot C_3 (x-y)^{3-1} + \dots \quad (5)$$

$$f''(x) \Big|_{x \rightarrow y} = \cancel{1 \cdot C_1} + \underbrace{1 \cdot 2 \cdot C_2 (x-y)^{1-1}}_{=1} + 2 \cdot 3 \cdot C_3 (x-y)^{2-1} + \dots \quad (6)$$

Kompaktnotation:

C5.1d

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x-y)^m$$

$$f(x) \Big|_{x \rightarrow y} = C_0 \quad (1)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot C_m (x-y)^{m-1}$$

$$\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x \rightarrow y} = 1 \cdot C_1 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)m \cdot C_m (x-y)^{m-2}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x \rightarrow y} = 1 \cdot 2 \cdot C_2 \quad (3)$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (m-n+1) \dots (m-1)m \cdot C_m (x-y)^{m-n}$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x \rightarrow y} = 1 \cdot 2 \dots (n-1)n \cdot C_n \quad (4)$$

$$\left[ \text{n Fakultät: } n! \equiv n(n-1)(n-2) \dots 1, \quad 0! \equiv 1 \text{ per Definition} \right] \quad (5)$$

$$\underline{n! C_n} \stackrel{(4)}{=} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x \rightarrow y} \equiv \underline{\frac{d^n f(y)}{dy^n}} \equiv f^{(n)}(y) \quad (6)$$

'Taylor-Reihe' v.  $f(x)$  um den Punkt  $y$ , in Potenzen von  $(x-y)$ :

$$\underline{f(x)} \stackrel{(b.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-y)^n \stackrel{(6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y) (x-y)^n \quad (7)$$

Beispiel: Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x) \equiv e^x$$

(1) C5.1e

Definierende Eigenschaften:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

(1) ,

$$e^0 = 1$$

(2)

$$f'(x) = e^x$$

(3) ,

$$f''(x) = e^x$$

(4) ,

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

(5) ,

(d.7):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y) (x-y)^n$$

(6)

(1) ↙

↘ (5)

(5) in (d.7):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^y (x-y)^n$$

(7)

für  $y = 0$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

[ diese Reihe ist konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R} !$  ] (8)

(8) kann als alternative Definition der Exp-Funktion aufgefasst werden.

(8) impliziert (1):

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \stackrel{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \stackrel{(6)}{=} e^x \Rightarrow (1) \quad (9)$$

Exponentialfunktion, genähert durch die ersten N+1 Terme der Taylor-Reihe:

C5.1f

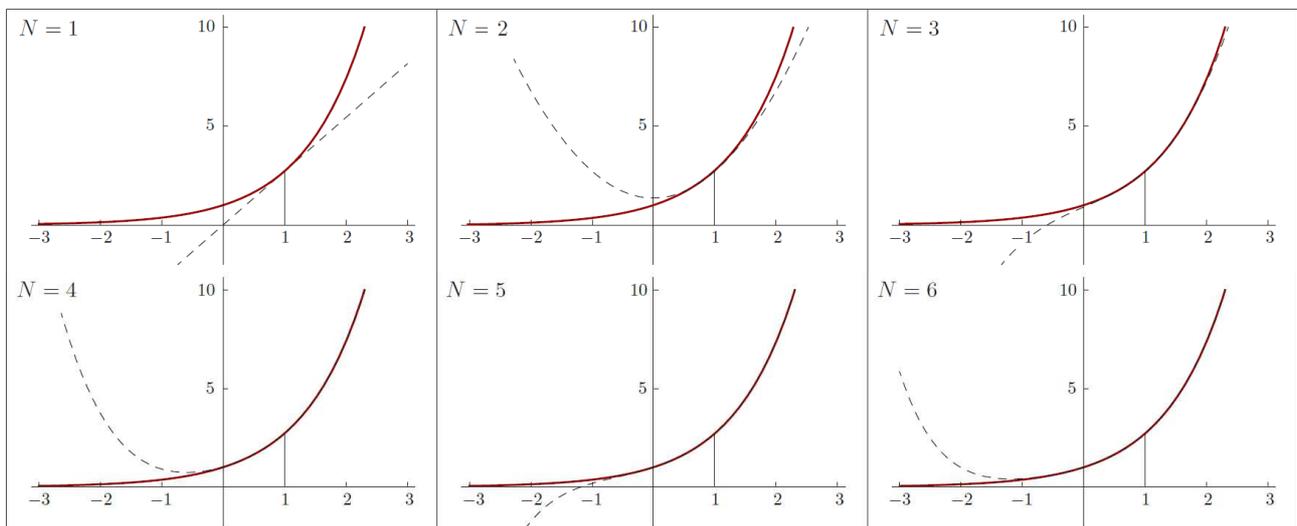
Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um  $y = 1$ :

$$e^x = e^{x-1+1} = e^{x-1} \cdot e^1$$

(1)

$$= e^1 \cdot \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (x-1)^n = e^1 \left[ 1 + (x-1) + \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{1}{3!} (x-1)^3 + \dots \right]$$

↳ falls  $N \neq \infty$  ist dies eine Näherung



Nochmal Beispiel 1 v. Seite C5.1a: (jetzt explizit)

C5.1g

Sei:  $f(x) \equiv \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$  (1)

Für Taylor-Reihe von  $f(x)$  um den Punkt  $y = 0$  benötigen wir laut (d.6):

$$f'(x) = \underbrace{-(-1)}_{=1} (1-x)^{-1-1} = 1 \cdot (1-x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$$
 (2)

$$f''(x) = \underbrace{-(-2)}_{=2!} 1 \cdot (1-x)^{-2-1} = 2! (1-x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2!$$
 (3)

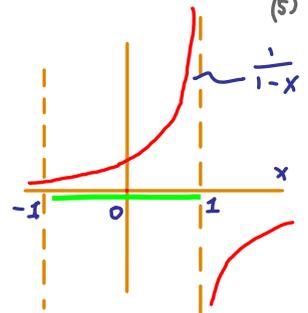
$$f'''(x) = \underbrace{-(-3)}_{=3!} 2! (1-x)^{-3-1} = 3! (1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$$
 (4)

$$f^{(n)}(x) = n! (1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$
 (5)

Nutze (d.7), mit  $y = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} \stackrel{(d.7)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{=n!}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (6)$$

(= g.1)



Diese Entwicklung heißt 'geometrische Reihe'

(6) gilt nur für  $|x| < 1$  Man sagt, der 'Konvergenzradius' dieser Reihe ist 1.

Falls Taylor-Reihe konvergiert, ist gliedweises Differenzieren / Integrieren innerhalb des Konvergenzradius erlaubt.

C5.1h

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x dx' \frac{d}{dx'} \ln(1+x') \\ &= \int_0^x dx' \frac{1}{1+x'} \end{aligned}$$

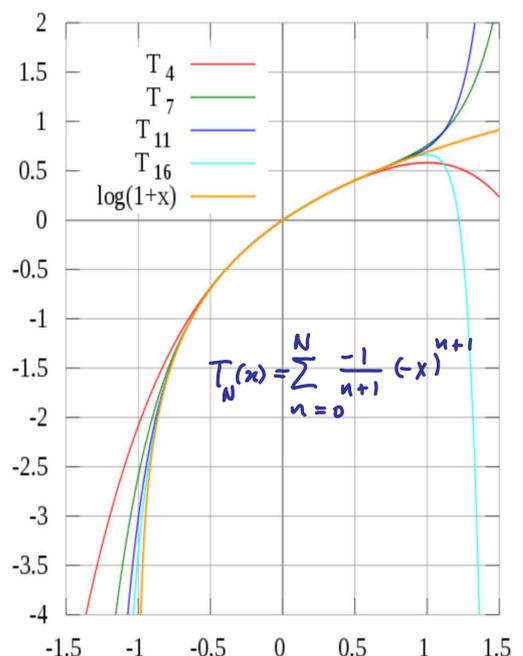
Nutze Taylor-Entwicklung (g.1):

gilt nur für  $|x| < 1$

$$\stackrel{(g.1)}{=} \int_0^x dx' \sum_{n=0}^{\infty} (-x')^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1}$$

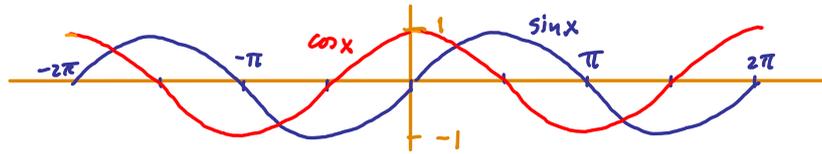
$$= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots$$



Beachte: da Taylor-Reihe für  $|x| > 1$  nicht konvergiert, liefern höhere Taylor-Terme  $T_N(x)$  dort eine zunehmend schlechtere Näherung!

## Sinus und Cosinus:

C5.1 i



Bekannte Eigenschaften:

Wert bei Null:  $\sin(0) = 0$  (1)  $\cos(0) = 1$  (2)

Ableitung:  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  (3)  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$  (4)

Eigenschaften (1)-(4) bestimmen die Reihenentwicklungen v. sin und cos eindeutig:

$\sin(x)$ :  $f(x) \equiv \sin x$ ,  $f(0) \stackrel{(1)}{=} 0$  (5)

$f^{(1)}(x) \stackrel{(3)}{=} \cos x$ ,  $f^{(1)}(0) \stackrel{(2)}{=} 1$  (6)

$f^{(2)}(x) \stackrel{(4)}{=} -\sin x$ ,  $f^{(2)}(0) \stackrel{(1)}{=} 0$  (7)

$f^{(3)}(x) \stackrel{(3)}{=} -\cos x$ ,  $f^{(3)}(0) \stackrel{(2)}{=} -1$  (8)

$f^{(4)}(x) \stackrel{(4)}{=} \sin x$ ,  $f^{(4)}(0) \stackrel{(1)}{=} 0$  (9)

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \forall n = 2m \\ (-1)^m & \forall n = 2m+1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \stackrel{(d.7)}{=} \sin x \stackrel{(10)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \quad (11)$$

Wert bei Null:  $\sin(0) = 0$  (1)

$\cos(0) = 1$  (2) C5.1 j

Ableitung:  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  (3)

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$  (4)

$\cos(x)$ :  $g(x) \equiv \cos x$ ,  $g(0) \stackrel{(2)}{=} 1$  (5)

$g^{(1)}(x) \stackrel{(4)}{=} -\sin x$ ,  $g^{(1)}(0) \stackrel{(1)}{=} 0$  (6)

$g^{(2)}(x) \stackrel{(3)}{=} -\cos x$ ,  $g^{(2)}(0) \stackrel{(2)}{=} -1$  (7)

$g^{(3)}(x) \stackrel{(4)}{=} \sin x$ ,  $g^{(3)}(0) \stackrel{(1)}{=} 0$  (8)

$g^{(4)}(x) \stackrel{(3)}{=} \cos x$ ,  $g^{(4)}(0) \stackrel{(2)}{=} 1$  (9)

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & \forall n = 2m \\ 0 & \forall n = 2m+1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \stackrel{(d.7)}{=} \cos x \stackrel{(10)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \quad (11)$$

(i.11) und (j.11) können als alternative Definitionen der Trig-Funktionen aufgefasst werden.

Diese Reihen sind konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

## C9.2 Komplexe Taylor-Reihen

C5.2a

Wird in der Definition einer Funktion,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ , (1)

die Variable  $x \in \mathbb{R}$  ersetzt durch die komplexe Variable  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , erhält man

die 'analytische Fortsetzung' der Funktion in die komplexe Ebene,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ . (2)

Beispiel: die Taylor-Reihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hat die analytische Fortsetzung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . (3)

Analytische Fortsetzungen der Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$e^z \stackrel{(10.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (4)$$

$$\sin(z) \stackrel{(12.11)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} \quad (5)$$

$$\cos(z) \stackrel{(13.11)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} \quad (6)$$

Diese Reihen sind konvergent für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

(4) mit  $z \rightarrow iz$ : 
$$e^{iz} \stackrel{(4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{\substack{m=0 \\ n = \text{gerade} = 2m}}^{\infty} \frac{i^{2m}}{(2m)!} z^{2m} + \sum_{\substack{m=0 \\ n = \text{ungerade} = 2m+1}}^{\infty} \frac{i^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \quad (7)$$

$$\Rightarrow e^{iz} \stackrel{(6,5)}{=} \cos z + i \sin z \quad \text{Euler-de Moivre-Identität} \quad (8)$$

## Euler-de Moivre mit reellem Argument

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{C5.2b}$$

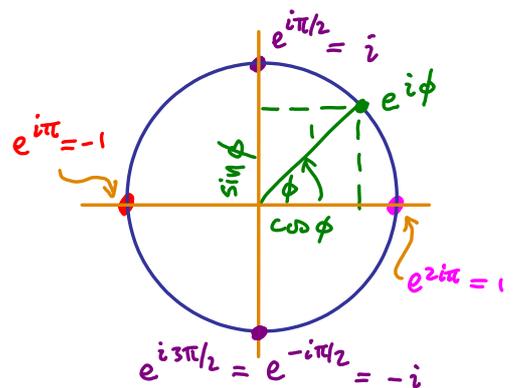
Wir wissen aus geometrischer Definition der Trig-Funktionen:

$$|e^{i\phi}| \stackrel{(1)}{=} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^{1/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\phi} \text{ liegt auf Einheitskreis.} \quad (1')$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(2\pi) = 1 \\ \sin(2\pi) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exp(i2\pi) = 1 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\pi) = -1 \\ \sin(\pi) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exp(i\pi) = -1 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\pm\pi/2) = 0 \\ \sin(\pm\pi/2) = \pm 1 \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exp(\pm i\pi/2) = \pm i \quad (4)$$

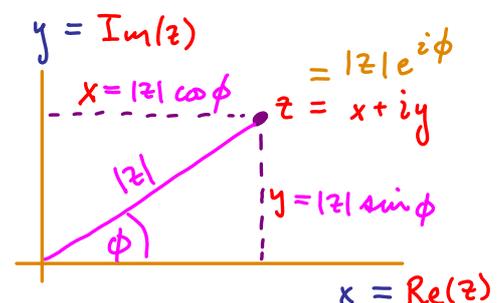


$$e^{i\pi} + 1 \stackrel{(3)}{=} 0 \quad (5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vereint die 5 wichtigsten Zahlen,} \\ 0, 1, \pi, e, i \\ \text{in einer Gleichung!!} \end{array} \right.$$

Euler-Formel

Polardarstellung v. komplexen Zahlen:

$$z \stackrel{(L11.5)}{=} |z| (\cos \phi + i \sin \phi) = |z| e^{i\phi}$$



Exponential-Darstellungen von sin, cos, sinh, cosh [zum Selbststudium - wichtig!]

CS.2c

$$e^{iz} \stackrel{(a.g)}{=} \cos z + i \sin z \quad (1)$$

$$e^{-iz} \stackrel{(a.g)}{=} \cos(-z) + i \sin(-z) \quad (2)$$

$$= +\cos z - i \sin z \quad (2')$$

$$\frac{1}{2} [(1) + (2)]:$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2i} [(1) - (2)]:$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (4)$$

$$\cosh z \stackrel{(3)}{=} \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z \quad (5)$$

$$\sinh z \stackrel{(4)}{=} \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-1}{i} \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \sinh z \quad (6)$$

$$\cosh z = \cos(iz) \stackrel{(l.2)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overbrace{i^{2m}}^{=1}}{(2m)!} z^{2m} = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{6!} z^6 + \dots \quad (7)$$

$$\sinh z = \frac{1}{i} \sin(iz) \stackrel{(l.1)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overbrace{i^{2m}}^{=1}}{(2m+1)!} \cdot \frac{i}{i} z^{2m+1} = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \frac{1}{7!} z^7 + \dots \quad (8)$$

Manchmal existiert Taylor-Entwicklung nicht (optional, zur Kenntnisaufnahme)

[AB-Buch, S. 265]

CS.2d

Definition: Ableitung v. Funktion einer komplexen Variable:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta z} [f(z + \delta z) - f(z)] \quad (1)$$

Falls  $f'(z_0)$  an einem Punkt  $z_0$  nicht existiert, existiert auch keine Taylor-Entwicklung der Funktion um diesen Punkt.

Beispiel: betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

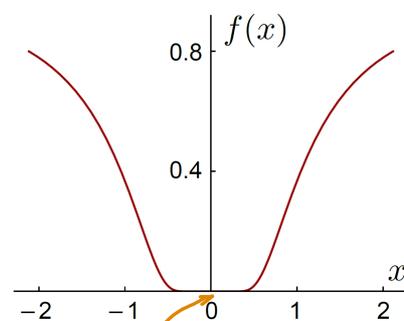
$$f(0) = e^{-\infty} = 0 \quad (2)$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left( \frac{2}{x^3} \right) \quad (3)$$

$$f'(0) = e^{-\infty} \left( \frac{2}{0} \right) = 0 \quad (4)$$

Analog: alle Ableitungen sind  $\propto e^{-\frac{1}{x^2}}$ , also

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (5)$$



hier ist die Funktion 'unendlich flach', d.h., alle Ableitungen verschwinden:  $f^{(n)}(0) = 0$

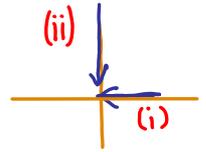
Folgt daraus, dass  $f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \overbrace{f^{(n)}(0)}{=0} = 0 \quad \dots \quad (6)$

Antwort: nein, denn  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{-1/z^2}$ , (1) | C5.2e

betrachtet als Funktion einer komplexen Variable,  $z = x + iy$ , ist nicht differenzierbar bei  $z = 0$ :

$$f'(z) \Big|_{z=0} = \lim_{\delta_z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_z} \left[ \underbrace{f(\delta_z) - f(0)}_{=0} \right] = \lim_{\delta_z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_z} e^{-\frac{1}{(\delta_z)^2}} \quad (2)$$

Das Ergebnis hängt davon ab, in welcher Richtung  $\delta_z$  nach Null strebt:



(i) Falls  $\delta_z = \delta \in \mathbb{R}$ :  $(2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{\delta^2}} \propto e^{-\infty} = 0$  (3)

(ii) Falls  $\delta_z = i\delta, \delta \in \mathbb{R}$ :  $(2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{i\delta} e^{-\frac{1}{(i\delta)^2}} \propto e^{+\infty} = \infty$  (4)

Man sagt: 'der Grenzwert existiert nicht', und somit die Ableitung  $f'(z) \Big|_{z=0}$  auch nicht.

Deshalb gibt es für  $f(z)$  keine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt  $z = 0$ .

Man sagt: 'Die Taylorreihe dieser Funktion hat Konvergenzradius gleich 0'.

Allgemein: systematische Diskussion der Konvergenz von Taylor-Reihen erfordert Funktionentheorie komplexer Funktionen (siehe C9, und fortgeschrittene Mathe-Vorlesungen). Für R-Vorlesung und typische Physik-Anwendungen brauchen wir jedoch nur Taylor-Entwicklung von gutmütigen Funktionen...

### C5.3 Taylor-Entwicklung endlicher Ordnung

| C5.3a

Taylor-Reihe, genähert durch endliche Anzahl Terme:

$$f(x) \stackrel{(C5.1d.7)}{\approx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x-y)^n \equiv f_N(x) \quad (1)$$

Fehlerabschätzung: Folgendes kann gezeigt werden:

falls auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  alle Ableitungen von  $f$  beschränkt (endlich groß) sind,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{d.h. falls positive, reelle Konstanten } \alpha \text{ und } C \text{ existieren, so dass} \\ |f^{(n)}(x)| < \alpha C^n \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \end{array} \right] \quad (2)$$

dann ist der 'Fehler' auf  $I$  kleiner als:  $|f(x) - f_N(x)| < \alpha \frac{C^{N+1}}{(N+1)!} |x-y|^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . (3)

Für gegebenes  $x \in I$  wird Fehler somit beliebig klein für  $N \rightarrow \infty$ , d.h. Reihe konvergiert.

Übliche Notation, um Größe des Fehlers anzudeuten:

$$f(x) \stackrel{(1,3)}{\approx} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x-y)^n + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha C^{N+1}}{(N+1)!} |x-y|^{N+1}\right) \quad (4)$$

man sagt, der Fehler ist 'von Ordnung' ( ... )

## L7.4 Funktionen von Matrizen

L7.4a

Sei  $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ , dann ist auch  $A^2 \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ , usw., also auch  $A^m$  (1)

Man sagt: die komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z) = z^m$ , (2)

hat eine 'Erweiterung' zu einer Funktion von nxn-Matrizen:

$$f: \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad A \mapsto f(A) \equiv A^m \quad (3)$$

Verallgemeinerung: eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m \quad (4)$$

hat eine Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad A \mapsto f(A) \stackrel{(4)}{\equiv} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} A^m \quad (5)$$

Beispiel: Exponentialfunktion:  $e^A \stackrel{(C5.1e.8)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$  (6)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{L7.4b}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (2)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^1 \quad (3)$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (4)$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{für } n = \text{gerade} \\ A & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases} \quad (5)$$

Also:

$$e^{aA} \stackrel{(L7.4a.6)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} (aA)^m \stackrel{(C5.2a.7)}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} A^{2n}}_{(C5.2c.7) \quad \cosh(a)} \underbrace{A^{2n}}_{(5) = \mathbf{1}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}}_{(C5.2c.8) \quad \sinh(a)} \underbrace{A^{2n+1}}_{(5) = A} \quad (6)$$

$(a \in \mathbb{C})$

$$= \mathbf{1} \cosh(a) + A \sinh(a) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Falls eine Matrix diagonalisierbar ist:

L7.4c

$$A = T D T^{-1} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A^m = \underbrace{(T D T^{-1})(T D T^{-1})(T D T^{-1}) \dots (T D T^{-1})}_{n \text{ mal}} \quad (2)$$

$$= T D^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} \quad (3)$$

$$\underline{f(A)} \stackrel{(L7.4a.5)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) A^m \stackrel{(3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) T D^m T^{-1} \stackrel{(L7.4a.5)}{=} \boxed{T f(D) T^{-1}} \quad (4)$$

explizit:

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = \boxed{T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}} \quad (5)$$

Zusammenfassung: C5.1-3,5 Taylor-Reihen

ZC5.1-3

'Taylor-Reihe' v.  $f(x)$  um  $x=y$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^n f^{(n)}(y)$$

Wichtige Beispiele:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (2) \quad \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-z)^{n+1}, \quad \text{für } |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad (4) \quad \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Euler-de Moivre:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (7) \quad \text{Euler: } e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (8)$$

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = x + iy = |z| e^{i\phi} \quad (9) \quad \begin{cases} |z|^2 = x^2 + y^2, & (10) \\ \tan \phi = y/x & (11) \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \text{ } z \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \text{ } \\ \text{---} \end{array}$$

## Zusammenfassung: L7.4 Funktionen von Matrizen

Z L7.4a

Sei  $f(z)$  eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad A \mapsto f(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist,  $A = T D T^{-1}$  mit  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$f(A) = T f(D) T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$