L8.1 Unitäre und orthogonale Abbildungen

L8.1a

(Abbildungen, die reelles bzw. komplexes Skalarprodukt invariant lassen)

Reelles inneres Produkt
in $\mathbb{R}$ -Vektorraum [siehe L3.1c]:

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) \longmapsto \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \qquad (2)$$

(i) Symmetrie:

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle \qquad (3)$$

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation:

$a \in \mathbb{R}$

$$\langle a \hat{u}, \hat{w} \rangle = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle \qquad (4)$$

'reeller Vektorraum'

$$\langle \hat{u}, a \hat{w} \rangle = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle \qquad (4')$$

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition:

$$\langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \qquad (5)$$

(iv) Positiv definit:

$$\hat{v} \neq \hat{0} \Longleftrightarrow \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle > 0 \qquad (6)$$

'wenn, und nur wenn'

Reelles Skalarprodukt

in Standardraum: $V = \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = \hat{e}_j v^j$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} \equiv \sum_j u^i \delta_{ij} v^j \qquad (7)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_j (u^j)^2 \geq 0 \qquad (8)$$

Komplexes Skalarprodukt, in Standardraum: $\mathbb{C}^n$

L8.1b

$$\vec{u} = (u^1, \dots, u^n)^T , \qquad u^j \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Wie garantiert man Positivität? $\sum_{j=1}^{n} u^j u^j \geq 0$ gilt nicht! (2)

Z.B: $\vec{u} = (1, 2i)^T$: $1 \cdot 1 + (2i)(2i) = 1 - 4 = -3 < 0$ (3)

Definition:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{C}} \equiv \sum_j^n \overline{u^j} v^j \qquad (4)$$

komplexe Konjugation, $i \rightarrow -i$
garantiert Positivität, siehe (5)

wird üblicherweise weggelassen

Positivität:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{u^j} u^j = \sum_{j=1}^{n} |u^j|^2 \geq 0 \qquad (5)$$

Beispiel in $\mathbb{C}^2$:

$$\vec{u} = (1, 2i)^T \qquad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{u^1} u^1 + \overline{u^2} u^2 = 1 \cdot 1 + (-2i)(2i) = 5 \qquad (6)$$

$$\vec{v} = (3i, 1/2)^T \qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^1} v^1 + \overline{u^2} v^2 = 1 \cdot 3i + (-2i) \cdot 1/2 = 2i \qquad (7)$$

Verallgemeinerung für komplexe Vektorräume: komplexes inneres Produkt (L3.4)

Komplexes inneres Produkt

in $\mathbb{C}$ -Vektorraum:

'komplexer Vektorraum' [Anwendung: QM!]

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (1)$$

$$(\hat{u},\hat{v}) \longmapsto \langle \hat{u},\hat{v}\rangle \qquad (2)$$

(i) Symmetrie (bis auf kompl. Konj.): $\langle \hat{u},\hat{v}\rangle = \overline{\langle \hat{v},\hat{u}\rangle}$ $(i \to -i)$ komplexe Konjugation, (3)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $a \in \mathbb{C}$

$$\langle a\hat{u},\hat{v}\rangle = \bar{a}\langle \hat{u},\hat{v}\rangle \qquad (4)$$

$$\langle \hat{u},a\hat{v}\rangle = a\langle \hat{u},\hat{v}\rangle \qquad (4')$$

keine Konjugation

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \hat{u}+\hat{v},\hat{w}\rangle = \langle \hat{u},\hat{w}\rangle + \langle \hat{v},\hat{w}\rangle$ (5)

(iv) Positiv definit: $\hat{v} \neq \hat{0} \iff \langle \hat{v},\hat{v}\rangle > 0$ (6)

'wenn, und nur wenn'

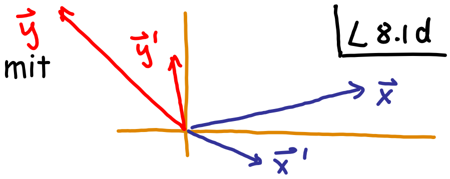
Anmerkung: $\langle \hat{v},\hat{v}\rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle \hat{v},\hat{v}\rangle} \implies \langle \hat{v},\hat{v}\rangle \in \mathbb{R}$ (7)

Komplexes Skalarprodukt
in Standardraum: $V = \mathbb{C}^n$, $\vec{v} = \vec{e}_j v^j$:

$$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle_{\mathbb{C}^n} \equiv \sum_{ij} \bar{u}^i \delta_{ij} v^j \qquad (8)$$

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_j \bar{u}^j u^j = \sum_j |u^j|^2 \geq 0 \qquad (9)$$

L8.1 Unitäre/orthogonale Abbildungen



per Def: lassen das Skalarprodukt invariant!
(für diese sind auch Längen und Relativwinkel invariant)

Sei V ein komplexer/reeller Vektorraum v. mit Dimension n

und $\hat{A} : V \to V$, $\hat{v} \longmapsto \hat{A}\hat{v}$ eine lineare Abbildung. (1)

Falls sie das Skalarprodukt invariant lässt, $\langle \hat{A}\hat{v}, \hat{A}\hat{w}\rangle = \langle \hat{v},\hat{w}\rangle$ (2)

für alle $\hat{v},\hat{w} \in V$, heisst die Abbildung unitär (für komplexen Vektorraum)
orthogonal (für reellen Vektorraum)

Für unitäre/orthogonale Abbildungen ist der Kern (Null-Raum) leer:

falls $\hat{v} \neq \hat{0} \Rightarrow 0 \neq \|\hat{v}\|^2 = \langle \hat{v},\hat{v}\rangle \overset{(2)}{=} \langle \hat{A}\hat{v},\hat{A}\hat{v}\rangle = \|\hat{A}\hat{v}\|^2 \Rightarrow \hat{A}\hat{v} \neq \hat{0}$ (3)

Unitäre/orthogonale Abbildungen sind folglich invertierbar.

Unitäre/orthogonale Abbildungen bilden eine Gruppe

Gruppenaxiome (L1c) sind erfüllt:

(i) Abgeschlossenheit: Seien $\hat{A}, \hat{B}$ unitär/orthog., dann gilt dasselbe für $\hat{A}\hat{B}$:

$$\langle \hat{A}\hat{B}\hat{v}, \hat{A}\hat{B}\hat{w} \rangle = \langle \hat{A}(\hat{B}\hat{v}), \hat{A}(\hat{B}\hat{w}) \rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{B}\hat{v}, \hat{B}\hat{w} \rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \checkmark \qquad (1)$$

(ii) Assoziativität: gilt für Komposition von linearen Abbildungen

(iii) Einheitsabbildung ist trivialerweise unitär/orthogonal: $\langle \mathbb{1}\hat{v}, \mathbb{1}\hat{w} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle$ (2)

(iv): Inverse: Sei $\hat{A}$ unitär/orthog., dann gilt dasselbe für $\hat{A}^{-1}$, denn:

Gegeben $\hat{v}, \hat{w} \in V$, dann

$$\langle \hat{A}^{-1}\hat{v}, \hat{A}^{-1}\hat{w} \rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \underbrace{\hat{A}(\hat{A}^{-1}}_{=\mathbb{1}}\hat{v}), \underbrace{\hat{A}(\hat{A}^{-1}}_{=\mathbb{1}}\hat{w}) \rangle = \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \qquad (4)$$

Auf einem n-dimensionalem komplexen/reellen Vektorraum bilden die unitären/orthogonalen Abbildungen eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren Abbildungen, genannt die '<u>unitäre Gruppe U(n)</u>' / '<u>orthogonale Gruppe O(n)</u>'.

Zur Erinnerung: Adjungierte Matrix

Eine Abbildung $\hat{U}$ habe, bezüglich einer <u>Orthonormal</u>basis von V, die Matrixdarstellung

$$\vec{v} \mapsto U \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \{v^i\} \in \mathbb{C}^n, \quad (U \cdot \vec{v})^k = U^k{}_j v^j \qquad (1)$$

$$U = \{U^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad U^\dagger = \{U^{\dagger}{}_j{}^i\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad \boxed{U^{\dagger}{}_j{}^i \overset{(L5.2f)}{\equiv} \overline{U^i{}_j}} \qquad (2)$$

'adjungierte Matrix'

Zur Erinnerung: da Metrik in Orthonormalbasis trivial ist, $g_{ij} = \delta_{ij}$, (3)

ist Index-Stellung (oben/unten) egal, UND hoch/runterziehen von Indizes hat keinen Effekt:

$$(U^\dagger)^j{}_i \equiv \delta^{jm} (U^\dagger)_m{}^l \delta_{li} = (U^\dagger)_j{}^i \overset{(2)}{=} \overline{U^i{}_j} \qquad (4)$$

also: adjungieren heisst einfach: Reihen/Spaltenindizes vertauschen & komplex konjugieren.

z.B.: $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ (5)

Index-nur-unten-Notation wäre: $U^\dagger_{ik} \equiv \overline{U_{ki}}$ (6)

Unitäre Matrizen

L8.1g

U sei eine unitäre Abbildung: $\hat{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n , \quad \hat{v} \mapsto \hat{U}\hat{v}$ (1)

mit Matrixdarstellung bzgl. Orthonormalbasis: $\vec{v} \mapsto U\vec{v}$ (2)

Welche Konsequenz hat die Unitaritätseigenschaft für die Matrixdarstellung?Abbildung?

Forderung: $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle \overset{(d.2)}{=} \langle \hat{U}\hat{v} , \hat{U}\hat{w} \rangle$ (Invarianz des Skalarprodukts) (3)

$$\underline{\overline{v^m}}\, \underline{\delta_{mj}}\, \underline{w^j} \overset{(c.8)}{=} \overline{(U.\vec{v})^l}\, \delta_{lk}\, (U\cdot\vec{w})^k \overset{(1)}{=} \underline{\overline{U^l{}_m}}\, \underline{\overline{v^m}}\, \underline{\delta_{lk}}\, \underline{U^k{}_j}\, \underline{w^j} \qquad (4)$$

$$\underline{\delta_{mj}} = \underline{\overline{U^l{}_m}\, \delta_{lk}\, U^k{}_j} \overset{(2)}{=} (U^\dagger)_m{}^l\, \delta_{lk}\, U^k{}_j \qquad (5)$$

Indizes hoch-runterziehen (trivialer Schritt, da Metrik trivial ist):

$$\underline{\delta^i{}_j} = \delta^{im}\,\delta_{mj} \overset{(5)}{=} \underbrace{\delta^{im}\,(U^\dagger)_m{}^l}_{(f.4)\ \equiv\ (U^\dagger)^i{}_k}\delta_{lk}\,U^k{}_j = \underline{(U^\dagger)^i{}_k\, U^k{}_j} \qquad (6)$$

Kompaktnotation: $\boxed{\mathbb{1} \overset{(6)}{=} U^\dagger \cdot U \iff U^{-1} = U^\dagger}$ Definierende Eigenschaft einer 'unitären Matrix' (7)

Falls Metrik nicht trivial ist, lautet (5): $g_{mj} = (U^\dagger)_m{}^l\, g_{lk}\, U^k{}_j$ (8)

Orthogonale Abbildungen

L8.1h

Analog zu unitär, aber für reelle Matrizen, ohne komplexe Konjugation

Für die Darstellungsmatrix eine orthogonalen Abbildung O gilt:

$$O = \{O^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n) , \quad O^T = \{O^T{}_j{}^i\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n) , \quad O^T{}^j{}_i \equiv O^T{}_j{}^i \overset{(L5_i')}{\equiv} O^i{}_j \qquad (1)$$

'transponierte Matrix'

oben/unten tauschen

Skalarprodukt ist invariant: $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{O}\hat{v} , \hat{O}\hat{w} \rangle$ (2)

Bedingung an O: $\delta_{mj} \overset{(g.5)}{=} O^l{}_m\, \delta_{lk}\, O^k{}_j = (O^T)_m{}^l\, \delta_{lk}\, O^k{}_j$ (3)

Kovariante form: $\delta^i{}_j \overset{(g.6)}{=} (O^T)^i{}_k\, O^k{}_j$ (4)

Kompaktnotation: $\boxed{\mathbb{1} \overset{(g.7)}{=} O^T \cdot O \iff O^{-1} = O^T}$ (5)

Definierende Eigenschaft einer 'orthogonalen Matrix'

Falls Metrik nicht trivial ist, lautet (3): $g_{mj} = (O^T)_m{}^l\, g_{lk}\, O^k{}_j$ (8)

Beispiele: $c \equiv \cos\theta, \quad s \equiv \sin\theta \quad , \quad c^2 + s^2 = 1$ (1) L8.1i

$$A = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix} \text{ ist unitär: } \qquad A^\dagger = \begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$A \cdot A^\dagger = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + is(-is) & -cis + isc \\ isc + c(-is) & is(-is) + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \text{ ist orthogonal: } \qquad A^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + (-s)^2 & cs - sc \\ sc + c(-s) & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Spaltenvektoren einer unitären Matrix bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^n$ L8.1j

Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$

(Analog für Zeilenvektoren.)

Beweis für unitäre Matrix (für orthog. Matrix ist Beweis analog):

$$U \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \quad \text{mit} \quad U \equiv (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \quad , \quad \vec{u}_j = \begin{pmatrix} u^1{}_j \\ \vdots \\ u^n{}_j \end{pmatrix} \quad \text{sei unitär,} \qquad (1)$$

$$\text{dann gilt:} \quad \delta_{mj} \overset{(f.5)}{=} \overline{u^l{}_m}\, \delta_{lk}\, u^k{}_j = \overline{(\vec{u}_m)^l}\, \delta_{lk}\, (\vec{u}_j)^k = \langle \vec{u}_m , \vec{u}_j \rangle \qquad (2)$$

Umgekehrt gilt auch:
wird aus einer Orthonormalbasis $\{\vec{u}_j\}$, mit $\langle \vec{u}_i , \vec{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, (3)

die Matrix $U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, konstruiert, dann ist sie unitär, $U^\dagger U = \mathbb{1}$ (4)

(j.4) explizit:

$$\mathcal{U} \equiv (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_n) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u^1_1 \\ \vdots \\ u^k_1 \\ \vdots \\ u^n_1 \end{matrix} & \vdots & \boxed{\begin{matrix} u^1_j \\ \vdots \\ u^k_j \\ \vdots \\ u^n_j \end{matrix}} & \vdots & \begin{matrix} u^1_n \\ \\ u^k_n \\ \vdots \\ u^n_n \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Basisvektor j

$$\mathcal{U}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{u^1_1} \cdots \overline{u^k_1} \cdots \overline{u^n_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boxed{\overline{u^1_i} \cdots \overline{u^k_i} \cdots \overline{u^n_i}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{u^1_n} \cdots \overline{u^k_i} \cdots \overline{u^n_n} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Basisvektor i

$$\Big(\underset{(2)}{\mathcal{U}^\dagger} \cdot \underset{(1)}{\mathcal{U}}\Big)_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{u^1_1} \cdots \overline{u^k_1} \cdots \overline{u^n_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boxed{\overline{u^1_i} \cdots \overline{u^k_i} \cdots \overline{u^n_i}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{u^1_n} \cdots \overline{u^k_i} \cdots \overline{u^n_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} u^1_1 \\ \vdots \\ u^k_1 \\ \vdots \\ u^n_1 \end{matrix} & \vdots & \boxed{\begin{matrix} u^1_j \\ \vdots \\ u^k_j \\ \vdots \\ u^n_j \end{matrix}} & \vdots & \begin{matrix} u^1_n \\ \\ u^k_n \\ \vdots \\ u^n_n \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \Big(\sum_k \overline{u^k_i}\, u^k_j\Big) & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \overset{(j.3)}{=} (\delta_{ij}) = (\mathbb{1})_{ij} \qquad (4)$$

Unitäre/orthogonale Matrizen bilden Gruppen unter Matrixmultiplikation

'Unitäre Gruppe': $\mathcal{U}(n) = \{ \mathcal{U} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \, ; \; \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1} \}$ (1)

'Orthogonale Gruppe': $\mathcal{O}(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \, ; \; O^T O = \mathbb{1} \}$ (2)

Gruppenaxiome (L1c) sind erfüllt: [folgt bereits aus L8e]
In Matrixnotation, für unitäre Matrizen: (orthog. analog):

(i) Abgeschlossenheit:

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2$, denn:

$$\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = (\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2)^\dagger \cdot (\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2) \overset{(L5p.1)}{=} \mathcal{U}_2^\dagger \cdot \big(\mathcal{U}_1^\dagger \cdot \mathcal{U}_1\big) \cdot \mathcal{U}_2 \overset{(1)}{=} \mathcal{U}_2^\dagger \cdot \mathbb{1} \cdot \mathcal{U}_2 \overset{(1)}{=} \mathbb{1} \qquad (3)$$

(ii) Assoziativität: gilt für Matrixmultiplikation [siehe (L5o.1)]

(iii) Neutrales Element: $\mathbb{1}$ ist unitär, denn $\mathbb{1}^\dagger = \mathbb{1}$, $\mathbb{1}^\dagger \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$ (4)

(iv) Inverse: Sei $\mathcal{U} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\mathcal{U}^{-1}$, denn:

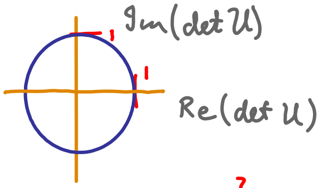
$$(\mathcal{U}^{-1})^{-1} = \mathcal{U} = (\mathcal{U}^\dagger)^\dagger \overset{(i.1)}{=} (\mathcal{U}^{-1})^\dagger \, . \qquad (5)$$

Determinanten von unitären und orthogonalen Matrizen

Allgemein: $\det A^T \overset{(L6j.2)}{=} \det A$ (1)

$\det A^\dagger = \det \bar{A}^T \overset{(1)}{=} \det \bar{A} = \overline{\det A}$ (2)

Für unitäre Matrizen: $|\det U| = 1$ (3)



Beweis: $1 \overset{(L6h.5)}{=} \det(\mathbb{1}) \overset{(1)}{=} \det(U^\dagger U) \overset{(L6p.6)}{=} \underbrace{(\det U^\dagger)}_{(2)\ \overline{\det U}}(\det U) = |\det U|^2$ (4)

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & is \\ is & c \end{vmatrix} = c^2 - (is)^2 = 1$ (6) $\Longrightarrow \boxed{|\det U| = 1}$ (5)

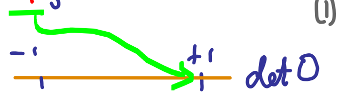
Für orthogonale Matrizen: $\det O = \pm 1$ (7)

Beweis: analog zu (3), aber mit $\det O \in \mathbb{R}$ (8)

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & -s \\ s & c \end{vmatrix} = c^2 - s(-s) = 1$ (9)

Orthogonale Matrizen mit $\det(O) = +1$ bilden eine Untergruppe von O(n):

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{O \in mat(\mathbb{R},n,n) : O^T O = \mathbb{1}\ ,\ \det O = 1\}$ (1)



SO(n) ist 'Untergruppe' von O(n), also geschlossen:

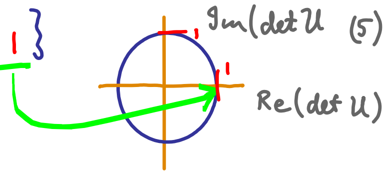
denn falls $\begin{cases} \det O_1 = 1 \\ \det O_2 = 1 \end{cases}$ gilt auch: $\det(O_1 O_2) = \underbrace{(\det O_1)}_{+1}\underbrace{(\det O_2)}_{+1} = 1$ (2)

SO(3)-Matrizen beschreiben 'Drehungen' im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Alle anderen Matrizen in O(3), d.h. alle mit $\det O = -1$, beinhalten auch Spiegelungen. (3)

Beispiel: Spiegelung in $\mathbb{R}^3$: $S = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$, $\det S = (-1)^3 = -1$ (4)

Unitäre Matrizen mit $\det(U) = +1$ bilden eine Untergruppe von U(n):

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{U \in M(n\times n, \mathbb{C}) : U^\dagger U = \mathbb{1}\ ,\ \det U = 1\}$ (5)



Anwendung SU(2): QM-Theorie des Drehimpuls

L8.2 Hermitesche und symmetrische Abbildungen

L8.2a

Sei V ein komplexer/reeller Vektorraum v. mit Dimension n

und $\hat{A}: V \to V, \quad \hat{v} \longmapsto \hat{A}\hat{v}$ eine lineare Abbildung. (1)

Falls sie die Eigenschaft $\langle \hat{A}\hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{A}\hat{w} \rangle$ hat, (2)

heisst die Abbildung hermitesch (für komplexen Vektorraum)

symmetrisch (für reellen Vektorraum)

Eigenschaft (2) führt nicht zu einer Gruppe:

Seien $\hat{A}, \hat{B}$ hermitesch/symmetrisch, gilt das dann auch für $\hat{A}\hat{B}$?

$$\langle \hat{A}\hat{B}\hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{B}\hat{v}, \hat{A}\hat{w} \rangle = \langle \hat{v}, \hat{B}\hat{A}\hat{w} \rangle \tag{3}$$

$$= \langle \hat{v}, \hat{A}\hat{B}\hat{w} \rangle \quad \text{nur falls} \quad \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \tag{4}$$

Hermitesche/symmetrische Matrizen

Metrik: $g_{ij} = \delta_{ij}$

L8.2b

Eine hermitesche/symmetr. Abbildung $\hat{A}$ habe, bezüglich einer Orthonormalbasis von V,

die Matrixdarstellung: $\vec{v} \longmapsto A \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \{v^i\} \in \mathbb{C}^n, \quad (A \cdot \vec{v})^k = A^k{}_j v^j$ (1)

Forderung: $\langle \vec{v}, A\vec{w} \rangle = \langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle$ (2)

$$\overline{v}^m \delta_{mk} (A\vec{w})^k = \overline{(A\vec{v})^\ell} \delta_{\ell j} w^j \tag{3}$$

$$\overline{v}^m \delta_{mk} A^k{}_j w^j = \overline{A^\ell{}_m}\, \overline{v}^m \delta_{\ell j} w^j \tag{4}$$

$$\delta_{mk} A^k{}_j = \overline{A^\ell{}_m} \delta_{\ell j} = (A^\dagger)_m{}^\ell \delta_{\ell j} \tag{5}$$

Indizes hoch-runterziehen:

$$A^i{}_j = \delta^{im} \delta_{mk} A^k{}_j \overset{(5)}{=} \delta^{im} (A^\dagger)_m{}^\ell \delta_{\ell j} \overset{\text{(L8.1f.4)}}{=} (A^\dagger)^i{}_j \tag{6}$$

Für hermitesche Abbildung: $A = A^\dagger$ Matrix ist 'hermitesch' (7)

Für symmetrische Abbildung: $A = A^T$ Matrix ist 'symmetrisch' (8)

Def: $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls
(L8.2b.7)

$$A \overset{!}{=} A^\dagger \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad A^i{}_j \overset{!}{=} (A^\dagger)^i{}_j \overset{(L5.2f.3)}{=} \overline{A^j{}_i} \qquad (2)$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & +2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Def: $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ oder $\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls
(L8.2b.8)

$$A \overset{!}{=} A^T \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad A^i{}_j \overset{!}{=} (A^T)^i{}_j \overset{(L5.2e.3)}{=} A^j{}_i \qquad (5)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Diagonalisierung v. hermiteschen und symmetrischen Matrizen

Eigenschaften von hermiteschen (also auch von symmetrischen reellen) Matrizen:
- immer diagonalisierbar;
- alle Eigenwerte sind reell;
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation ist unitär (bzw. orthogonal)

Satz 1: Für hermitesche Matrizen sind alle EW reell.

Beweis: zunächst, $\langle \vec{v}_i, A\vec{v}_i \rangle \overset{(a.2)}{=} \langle A\vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle \overset{(c.3)}{=} \overline{\langle \vec{v}_i, A\vec{v}_i \rangle} \Longrightarrow$ reell (1)

EW-Gleichung: $A\vec{v}_i = \vec{v}_i \lambda_i$ [hier keine ES !] (2)

$$\langle \vec{v}_i, (2) \rangle \quad \underbrace{\langle \vec{v}_i, A\vec{v}_i \rangle}_{(1)\ \text{reell}} \overset{(1)}{=} \underset{(L8.2c.4')}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \lambda_i \rangle} = \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}_{\text{reell}\ (L8.2c.7)} \lambda_i \Longrightarrow \boxed{\lambda_i = \overline{\lambda_i} \quad \text{auch reell !!}} \qquad (3)$$

□

Satz 2: Für hermitesche Matrizen sind die EV zu verschiedenen EW orthogonal. (4)

Beweis: Sei $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, (5) $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$, (6) mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ (7)

$$\langle \vec{v}_j, (5) \rangle: \quad \langle \vec{v}_j, A\vec{v}_i \rangle \overset{(5)}{=} \langle \vec{v}_j, \lambda_i \vec{v}_i \rangle \overset{(L8.2c.4)}{=} \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \lambda_i \qquad (8)$$

(a.2)

$$= \langle A\vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \overset{(6)}{=} \langle \lambda_j \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle = \overline{\lambda_j} \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \overset{(3)}{=} \lambda_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \qquad (9)$$

$$(8)-(9) = 0: \quad \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad (10) \quad \overset{(L8.2c.4)}{\xRightarrow{(7)}} \quad \boxed{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle = 0} \qquad (11)$$

Sätze 1 & 2 gelten insbesondere auch für symmetrische, reelle Matrizen; (12)
für diese folgt aus (2) & (3) auch, dass EV rein reell sind, $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ (13)

L8.2e

Satz 3: Alle hermiteschen Matrizen sind diagonalisierbar (1)
(gilt insbesondere auch für alle reelle, symmetrischen Matrizen)

Sei $A\cdot\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ eine Lösung des EW-Problems für A (2)

Sei $V_1 = \{\vec{x}\in\mathbb{C}^n \mid \langle\vec{x},\vec{v}_1\rangle = 0\}$ der Unterraum orthogonal zu $\vec{v}_1$ (3)

$\leftarrow \dim(V_1) = n-1$

Sei $\vec{x}\in V_1$, dann ist auch $A\cdot\vec{x}\in V_1$ (4) in diesem Unterraum,

denn: $\langle A\cdot\vec{x},\vec{v}_1\rangle \overset{(a.2)}{=} \langle\vec{x},A\vec{v}_1\rangle = \underbrace{\langle\vec{x},\vec{v}_1\rangle}_{(3)\;=0}\lambda_1 = 0$ (5)

Wähle als Basis für V: $\{\vec{v}_1,\underbrace{\vec{f}_2,\dots,\vec{f}_n}_{\text{sei Basis für V1}}\}$, mit $\langle\vec{v}_1,\vec{f}_j\rangle \overset{(3)}{=} 0$ (6)

$j=2,\dots,n$

In dieser Basis hat A die Form $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, (7) denn wegen (4) werden die Unterräume $\mathrm{span}\{\vec{v}_1\}$ und $\mathrm{span}\{\vec{f}_2,\dots,\vec{f}_n\}$

mit Matrix-Elementen $\{B^i{}_j\}$, $i,j = 2,\dots,n$ von A '<u>nicht</u> verbunden'.

L8.2f

Warum? Allgemein gilt: falls $\{\vec{w}_j\}$ eine Basis ist, und $A\,\vec{w}_j = \vec{w}_i\,A^i{}_j$ (1)

dann hat A in dieser Basis die Darstellung

$$A = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \vdots & \boxed{A^1{}_j} & \vdots & A^1{}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A^n{}_1 & \vdots & A^n{}_j & \vdots & A^n{}_n\end{bmatrix} = (\vec{A}_1,\dots,\vec{A}_j,\dots,\vec{A}_n) \quad (2)$$

$\vec{A}_j$ (beschreibt Bild von $\vec{w}_j$)

Aktuell:

$A\cdot\vec{v}_1 \overset{(d.2)}{=} \lambda_1\vec{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} 0\cdot\vec{f}_i$ (3) also erste Spalte v. A $\vec{A}_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ (4)

$A\cdot\vec{f}_j = \vec{v}_1\cdot 0 + \sum_{i=2}^{n}\vec{f}_i\,B^i{}_j$ (5)

$(j=2,\dots,n)$ wegen (e.4), mit $\vec{v}_1\notin V_1$

also haben alle anderen Spalten (j>1) die Form $\vec{A}_j = \begin{bmatrix}0\\B^2{}_j\\\vdots\\B^n{}_j\end{bmatrix}$ (6)

(4) & (6) $\Longrightarrow$ (e.6)

Iteriere: sei $B\cdot\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$
eine Lösung des EW-Problems für B: $\xrightarrow[\text{Argumentation}]{\text{analoge}}$ $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$ (8)

usw. usf. Auf diese Weise findet man eine
Basis von n orthogonalen EV, in der A diagonal ist: $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ (9)

Normiere EW $\Longrightarrow$ liefert Orthonormalbasis v. EV ! □

L8.2g

Fazit: für hermitesche Matrizen $A \in (\mathbb{C}, n, n)$ können die n EV, $\vec{v}_j$, $j = 1, \dots, n$ so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^n$ bilden:

$$\boxed{\delta_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle} \tag{1}$$

Sei nun T die Matrix mit EV als Spaltenvektoren:

$$T \equiv (\vec{v}_1, \dots, \underset{\text{Eigenvektor } j}{\vec{v}_j}, \dots, \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} v^1{}_1 & v^1{}_j & v^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^k{}_1 & v^k{}_j & v^k{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^n{}_1 & v^n{}_j & v^n{}_n \end{pmatrix} \equiv \{v^k{}_j\} \tag{2}$$

Dann ist T unitär, laut (L8j.3), also $T^\dagger \cdot T = \mathbb{1}$ (3) $\Longrightarrow$ $\boxed{T^{-1} = T^\dagger}$ (4)

Aber, es gilt auch: $T^{-1} \cdot A \cdot T \overset{(L7.e.1)}{=} D$ (5)

Folglich wird A durch unitäre Transf. diagonalisiert: $\boxed{T^\dagger \cdot A \cdot T \overset{(4,5)}{=} D}$ (6)

Analog: für reelle symmetrische Matrix sind EV rein reell, somit: $T^\dagger = T^T$ (7)

wird also durch orthogonale Transf. (Drehungen) diagonalisiert: $T^T \cdot A \cdot T = D$ mit $T^T \cdot T = \mathbb{1}$ (8)

L8.2h

Fazit: Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sei ein Satz von orthonormierten EV der Matrix A, mit zugehörigen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

A wird durch folgende 'Ähnlichkeitstransformation' 'diagonalisiert':

$$\boxed{\underset{\substack{\text{adjungierte EV} \\ \text{als Zeilenvektoren}}}{T^\dagger} \cdot A \cdot \underset{\substack{\text{EV als} \\ \text{Spalten-} \\ \text{vektoren}}}{T} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{pmatrix} \cdot A \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \overset{(g.6)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D} \tag{1}$$

Analog für symmetrische, reelle Matrizen, mit $\underset{\substack{\text{Transponierte EV} \\ \text{als Zeilenvektoren}}}{T^T} \cdot A \cdot \underset{\substack{\text{EV als Spalten-} \\ \text{vektoren}}}{T} = D$ (2)

Anmerkung: reelle symmetrische Matrizen und hermitesche Matrizen finden in der Physik sehr viele Anwendungen:

- kleine Schwingungen um Gleichgewichtslage: EV liefern 'Normalmoden', EW deren charakteristische Frequenzen.

- Quantenmechanik: Observablen werden durch 'hermitesche Operatoren', salopp gesagt, 'hermitesche Matrizen', beschrieben. Eigenwerte des Hamilton-Operators (Energie-Operators) liefern die 'Eigenenergien' eines Quantensystems.

L8.2 i

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (1)

Ch. Polynom: $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$ (2)

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$ (3)

EV 1: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$ (4) Check: $A \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & + i\cdot i \\ -i\cdot 1 & + 1\cdot i \end{pmatrix} = 0$ (5)

EV 2: $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$ (6) Check: $A \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & + & i\cdot(-i) \\ -i\cdot 1 & + & 1\cdot(-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 2\vec{v}_2$ (7)

Ähnlichkeitstranformation: $T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overset{\vec{v}_1 \xrightarrow{(4)}}{1} & \overset{\xleftarrow{(6)} \vec{v}_2}{1} \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$ (8)

Check: $T \cdot D \cdot T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$ (9)

$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = A$ ✓ (10)

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Matrizen

ZL 8a

Reelles Skalarprodukt (L3.1): $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u^i \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{R}$

Komplexes Skalarprodukt (L3.4): $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^i} \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{C}$

Komplexe Matrix:

$A = \mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

$(A)^i{}_j = A^i{}_j$

Adjungierte Matrix:

$A^\dagger \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m),$

$(A^\dagger)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^\dagger)_i{}^j \equiv \overline{(A)^j{}_i}$

in Ortnormalbasis

Transponierte Matrix:

$A^T \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$

$(A^T)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^T)_i{}^j \equiv (A)^j{}_i$

in Ortnormalbasis

$\mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \ni \mathcal{U}$ ist 'unitär' falls $\mathcal{U}^\dagger \cdot \mathcal{U} = \mathbb{1} \overset{\text{(äquivalent)}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^\dagger$

Komplexes Skalarprodukt invariant: $\langle \mathcal{U} \cdot \vec{v}, \mathcal{U} \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \ni O$ ist 'orthogonal' falls $O^T \cdot O = \mathbb{1}$ (1) $\overset{\text{(äquivalent)}}{\Longleftrightarrow} O^{-1} = O^T$

Reelles Skalarprodukt invariant: $\langle O \cdot \vec{v}, O \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine <u>orthonormierte Basis.</u> $\mathcal{U} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Gruppen

ZL 8b

'Unitäre Gruppe': $U(n) = \{ U \in mat(\mathbb{C},n,n) ; \; UU^\dagger = \mathbb{1} \}$

'Orthogonale Gruppe': $O(n) = \{ O \in mat(\mathbb{R},n,n) ; \; O^T O = \mathbb{1} \}$

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ U \in mat(\mathbb{C},n,n) : \; U^\dagger U = \mathbb{1} , \; \det U = 1 \}$

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ O \in mat(\mathbb{R},n,n) : \; O^T O = \mathbb{1} , \; \det O = 1 \}$

Zusammenfassung: L8.2 Hermitesche/symmetrische Matrizen

$A \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls $A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

Für hermitesche Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A\vec{x} \rangle = \langle A\vec{z}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$

$A \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A\vec{x} \rangle = \langle A\vec{z}, \vec{x} \rangle$

(8)

Zusammenfassung: L8.2 Diagonalisierung v. hermiteschen und symm. Matrizen

ZL 8c

$A \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls $A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j = (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

in Orthonormalbasis

$A \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j = (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

(oder $\mathbb{R}$)

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \bar{\lambda}$
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \rangle = 0$

$$\text{Für} \left\{ \begin{matrix} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{matrix} \right\} \text{Matrizen ist } T \left\{ \begin{matrix} \text{unitär:} & T^{-1} = T^\dagger \\ \text{orthogonal:} & T^{-1} = T^T \end{matrix} \right.$$