L7 Diagonalisierung einer Matrix: Eigenwerte und Eigenvektoren

L7a

Viele Anwendungen in der Physik: z.B. Bestimmung der
- Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers durch Diagonalisierung des Trägheitstensors
- Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren durch Diag. der Hamilton-Funktion
- Eigenzustände und Eigenenergien eines Quantensystems durch Diag. des Hamilton-Operators

Gegeben $A = \{A^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

analoge Diskussion in auch möglich für $\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$

$$A: \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

Gesucht: Diagonalform:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Finde T und λ_j ! (2)

Definition: Eigenvektor, Eigenwert

Ein (nicht-Null) Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \ (\vec{v} \neq \vec{0})$ heißt 'Eigenvektor' (EV) von A, falls

$$\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}} \quad \text{(also } A \cdot \vec{v} \parallel \vec{v}\text{)} \qquad \text{Normierung: egal!} \quad (3)$$

λ heißt der 'Eigenwert' (EW) von A zugehörig zum 'Eigenvektor' $\vec{v}$ (4)

Eine Gleichung der Form (3) heißt 'Eigenwertgleichung'.

L7b

Oft wird Zusammenhang zwischen λ und $\vec{v}$ mit einem Index angedeutet,
z.B. wird der Eigenvektor v. λ_j durch $\vec{v}_j$ gekennzeichnet.

Beispiel 1: Nullmatrix

$$0 = (0^i{}_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \quad (2)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Nullmatrix, mit EW 0 (3)

Beispiel 2: Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = (\delta^i{}_j) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbb{1} \cdot \vec{v} = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \quad (5)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Einheitsmatrix, mit EW $\lambda = 1$ (6)

Beispiel 3: Diagonalmatrix $\in mat(\mathbb{C},n,n)$ L7c

$$D = (\lambda_j \delta^i_j) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

(nur Diagonalmatrixelemente sind ungleich 0)

Betrachte Standardbasis von $\mathbb{C}^n$:

Spaltenvektor: $\vec{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in mat(\mathbb{C},n,1)$ (2)

j-te Stelle

Dann:

$$D \cdot \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \vec{e}_j \quad (3)$$

j-te Stelle

Also: $\boxed{D \cdot \vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j}$ [hier ist <u>nicht</u> Einstein-Summation gemeint!] (4)

$\Rightarrow$ Diagonalmatrizen haben kanonische Basisvektoren $\vec{e}_j$ als EV (5)
und Diagonalmatrixelemente λ_j als dazugehörige EW. (6)

Diagonalisieren einer Matrix $\underline{A} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ L7d

Angenommen, ein Satz von <u>n linear unabhängigen</u> EV (also eine Basis für $\mathbb{C}^n$) (1)

ist bekannt, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, (1) $\quad \vec{v}_j = \begin{pmatrix} v^1{}_j \\ \vdots \\ v^i{}_j \\ \vdots \\ v^n{}_j \end{pmatrix}$ (2)

Merkregel:
i: Komponenten - Index <u>o</u>ben
j: Name des Vektors - Index unten

mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (3)

also: $A \cdot \vec{v}_j \overset{(a.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j$ (4)

$\left(\begin{smallmatrix} \cdots \\ \cdots \end{smallmatrix}\right)\left(\vdots\right) = \lambda \left(\vdots\right)$

$$\underbrace{}_{\equiv D^k{}_j} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k{}_i \quad (6)$$

in Komponenten:

$(4)^i$: $\quad A^i{}_k v^k{}_j = \lambda_j v^i{}_j = v^i{}_k \delta^k{}_j \lambda_j$ (5)

Dann gilt: $A \cdot T \overset{(5)}{=} T \cdot D$ (7) $\quad (7)^i{}_j = (5)$

mit $T \equiv \{v^i{}_j\} = \begin{bmatrix} v^1{}_1 & \vdots & v^1{}_j & \vdots & v^1{}_n \\ v^2{}_1 & \vdots & v^2{}_j & \vdots & v^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v^n{}_1 & \vdots & v^n{}_j & \vdots & v^n{}_n \end{bmatrix} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n)$ (8)

eine Matrix, deren Spaltenvektoren durch die EV gegeben sind! (9)

Die Inverse T^{-1} v. T existiert, da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ per Annahme eine Basis bilden **L7e**

$$T^{-1} \cdot (d.7): \qquad T^{-1} \cdot A \cdot T = \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= \mathbb{1}} \cdot D = D \overset{(d.6)}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$T \cdot (1) \cdot T^{-1}: \qquad A = T \cdot D \cdot T^{-1} \qquad (2)$$

Man sagt: 'A ist ähnlich zu D' ('Äquivalenzrelation') falls derartiges T existiert.

A ist 'diagonalisierbar', falls A ähnlich einer Diagonalmatrix ist, (3)

d.h. mit dieser durch eine Basistransformation verknüpft ist.

(Bedingungen für Diagonalisierbarkeit: siehe Vorlesung Lineare Algebra)

Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ mit EV $(\vec{0} \neq)\ \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ und EW $\lambda \in \mathbb{C}$ (4)

Also: $$A \cdot \vec{v} \overset{(a.3)}{=} \lambda \vec{v} = \lambda \mathbb{1} \cdot \vec{v} \qquad (5)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \qquad (A - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \qquad (6)$$

L7f

$\overset{(e.6)}{\Longrightarrow}$ Dann ist die Matrix

$$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n - \lambda \end{bmatrix} \qquad (1)$$

nicht invertierbar.

Denn: wäre $A - \lambda \mathbb{1}$ invertierbar, dann würde aus (e.6) folgen:

$$(A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \cdot (e.6) \qquad \underbrace{(A - \lambda \mathbb{1})^{-1} (A - \lambda \mathbb{1})}_{= \mathbb{1}} \cdot \vec{v} = (A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \cdot \vec{0} \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0}$$ im Widerspruch zu (e.4) (3)

Laut (L6p.1) ist eine Matrix genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante Null ist:

$$\overset{(1),(L6n.5)}{\Longrightarrow} \qquad \boxed{\det(A - \lambda \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0} \qquad (4)$$

(4) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung an alle EW λ von A, somit nützlich für deren Bestimmung!

Def: 'charakteristisches Polynom' der Matrix A :

L7g

$$\boxed{P_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda \mathbb{1})} = \begin{vmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n - \lambda \end{vmatrix} \quad (1)$$

$P_A(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades [höchste Potenz v. λ ist λ^n, kommend von $(A^1{}_1 - \lambda)(A^2{}_2 - \lambda) \cdots (A^n{}_n - \lambda)$ beim Berechnen v. (1)] (2)

[siehe Gl. (4) unten]

Laut (f.4) liefern die n Nullstellen von $P_A(\lambda)$ die n Eigenwerte von A :

$$\boxed{P_A(\lambda) = 0 \quad \overset{(f.4)}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda \text{ ist ein EW von } A} \quad (3)$$

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u> (Doktorarbeit v. Gauss (1799)! Siehe Lin. Alg. Vorlesung)
Ein Polynom n-ten Grades hat <u>genau n</u> (möglicherweise komplexe) Nullstellen. (4)

Es ist möglich, dass mehrere Nullstellen gleich sind. Diese werden 'entartete Nullstellen' genannt.

Rezept zur Bestimmung von EW: Berechne $P_A(\lambda)$, finde dessen Nullstellen! (5)

<u>Beispiel 4:</u> Finde EW und EV von $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (1)

L7h

Bestimme zunächst EW, via Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\underset{(g.2)}{0 \overset{!}{=}} P_A(\lambda) \underset{(g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 3 \quad (2)$$

$$0 \overset{(2)}{=} \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) \quad (3)$$

Die zwei EW sind durch die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (3) gegeben:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}\right\} \overset{(6)}{=} \frac{1}{2\cdot 1}\left[4 \pm \underbrace{\sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}_{2}\right] = \left\{\begin{matrix} 3 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{matrix}\right. \quad (4)$$

Allgemein: die quadratischen Gleichung

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (5)$$

hat zwei Lösungen, gegeben durch die "Mitternachtsformel" :

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right] \quad (6)$$

Check:

$$a\left(\frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]\right)^2 + b\frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right] + c \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\cancel{b^2} \mp 2b\cancel{\sqrt{}} + \cancel{b^2} - \underline{4ac}\right) - \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{2}a} \pm \frac{b}{2a}\cancel{\sqrt{}} + \underline{c} = 0 \checkmark \quad (8)$$

Fortsetzung Beispiel 4: Bestimmung der EV:

L7i

Eigenwertgleichung: $$(A - \lambda_j \mathbb{1})\vec{v}_j \overset{(f.4)}{=} \vec{0} \qquad \forall\, j = 1,2 \tag{1}$$

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (1) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

j=1: EV zu $\lambda_1 \overset{(h.4)}{=} 3$:

$$\vec{0} \underset{(1)}{\overset{!}{=}} (A - 3\mathbb{1})\vec{v}_1 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-3 & -3 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v}_1 \tag{2}$$

(Zeilenvektoren sind offensichtlich linear abhängig)

Lösung von (2): z.B. (oder alle Vielfache)

$$\boxed{\vec{v}_1 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \tag{3}$$

Check: erfüllt (3) die EW-Gl. (1) ?

$$A\cdot\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \underset{(3)}{\overset{(h.4)}{=}} \lambda_1\vec{v}_1 \checkmark \tag{4}$$

j=2: EV zu $\lambda_2 \overset{(h.4)}{=} 1$:

$$\vec{0} \overset{!}{=} (A - 1\mathbb{1})\vec{v}_2 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-1 & -3 \\ 1 & 4-1 \end{bmatrix}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\vec{v}_2 \tag{5}$$

(Zeilenvektoren sind offensichtlich linear abhängig)

Lösung von (4): z.B. (oder alle Vielfache)

$$\boxed{\vec{v}_2 = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \tag{6}$$

Check: erfüllt (6) die EW-Gl. (1) ?

$$A\cdot\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\cdot c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \underset{(6)}{\overset{(h.4)}{=}} \lambda_2\vec{v}_2 \checkmark \tag{7}$$

L7j

Zusammenfassend:

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{hat EV} \quad \vec{v}_1 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{hat EV} \quad \vec{v}_2 = c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Konstruiere nun die Matrizen T und T^{-1}, die A diagonalisieren !

Wähle $c_1 = c_2 = 1$.

EV als Spalten:

$$T \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Inverse von T

$$T^{-1} \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Allgemein gilt für das Inverse einer 2x2-Matrix (siehe L5.4g.2):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{5}$$

[alternativ: nutze Gauß-Verfahren!]

Check:

$$T^{-1}\cdot T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} \checkmark \tag{6}$$

Check (e.2):

$$T\cdot D\cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A \checkmark \tag{8}$$

Beispiel 5: 3x3 Matrix

Finde EW und EV der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda \mathbb{1}\right] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \quad (2)$$

Entwicklung nach Spalte 1 liefert sofort:

Nullstellen sind offensichtlich: $\boxed{\lambda_1 = 1 \; , \quad \lambda_2 = 3 \; , \quad \lambda_3 = 2}$ (3)

Eigenwertgleichung: $\left(A - \lambda_j \mathbb{1}\right) \vec{v}_j \overset{(e.6)}{=} \vec{0} \qquad \forall\, j = 1, 2, 3$ (4)

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (4) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

j=1: EV zu $\lambda_1 = 1$:
$$\vec{0} \overset{!}{=} \left(A - \lambda_1 \mathbb{1}\right)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_1 \quad (5)$$

Lösung: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (6)

j=2: EV zu $\lambda_2 = 3$:
$$\vec{0} \overset{!}{=} \left(A - \lambda_2 \mathbb{1}\right)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{v}_2 \quad (1)$$

Lösung: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (2)

j=3: EV zu $\lambda_3 = 2$:
$$\vec{0} \overset{!}{=} \left(A - \lambda_3 \mathbb{1}\right)\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_3 \quad (3)$$

Lösung (z.B. mittels Gauß): $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (4)

$(A - \lambda_3 \mathbb{1}) \,|\, \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{1} \,|\, \vec{v}_3$:

Reihen dieser Matrix sind nicht linear unabhängig! Daher: Null-Reihe!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ersetze Null-Reihe durch (z.B.) $(\vec{v}_3)^3 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad (5)$$

EV als Spalten:

$$T \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

via (L6n.2), oder oder durch Ausprobieren, oder Gauss-Verfahren,

$$T \,|\, \mathbb{1} \overset{\text{4}}{\Rightarrow} \mathbb{1} \,|\, T^{-1} \quad (7)$$

Check: $T^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Check (e.2):

$$T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A \checkmark \quad (8)$$

Entarteter Unterraum

Def: hat das charakteristische Polynom eine m -fache Nullstelle bei λ_1 (mit $m \leq n$),

$$P_A(\lambda) \propto (\lambda - \lambda_1)^m \times \dots \qquad (1)$$

dann kommt derselbe Eigenwert λ_1 m mal vor und wird 'm-fach entartet' genannt.

Falls m linear unabhängige EV mit demselben EW λ_1 existieren,

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \quad , \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_j \quad \forall\, j = 1, \dots, m \qquad (2)$$

bilden sie eine Basis für einen m-dimensionalen 'Eigenraum': $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ (3)

Jeder Vektor $\vec{u} = \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k \in E_{\lambda_1}$ in diesem Eigenraum ist ebenfalls ein EV mit EW λ_1 : (4)

Check: $$A \cdot \vec{u} \overset{(4)}{=} A \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k \right) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{A \cdot \vec{v}_k}_{\overset{(2)}{=} \lambda_1 \vec{v}_k} u^k = \lambda_1 \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k u^k}_{\overset{(4)}{=} \vec{u}} = \lambda \vec{u} \checkmark \qquad (5)$$

$\square$

Eine Orthonormalbasis für E_{λ_1} kann mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, ausgehend von den Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$, konstruiert werden.
Alle Elemente dieser Basis sind selbst EV, mit EW λ_1 . (6)

Bemerkung: Diagonalisieren nicht immer möglich:

Beispiel 6: $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Charakt. Polynom: $$P_A(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \underset{(g.2)}{\overset{!}{=}} 0 \qquad (2)$$

Nullstellen sind komplex: $\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ (3)

Diagonalisieren im Reellen nicht möglich (wohl aber im Komplexen).

Beispiel 7: $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Charakt. Polynom: $$P_A(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \underset{(g.2)}{\overset{!}{=}} 0 \qquad (5)$$

Doppelte Nullstelle: $\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 0$ (6)

Nur ein Eigenvektor (statt zwei): $\vec{0} = (A - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (7)

A ist nicht diagonalisierbar, da das zwei linear unabhängige EV erfordern würde!

Kriterien dafür, dass A diagonalisierbar ist: siehe Lin. Algebra Vorlesung

Zur Kenntnisnahme: falls A nicht diagonalisierbar ist, was kommt dem am nächsten?

Die 'Jordan-Normalform':
Die einzigen nicht-Diagonalelemente liegen direkt über der Diagonale, und sind gleich 1. Die Diagonalelemente direkt links und direkt unter einer solchen 1 sind gleich.

z.B.:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Beispiel hierzu: siehe Altland-Delft-Buch, L7.3

Invariante Eigenschaften einer Matrix

T sei eine beliebige Basistransformationen, und $A' = T A T^{-1}$ (1) Dann gilt:

1. Determinante ist invariant:

$$\boxed{\det(A')} \overset{(1)}{=} \det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(\cancel{T}) \det(A) \underbrace{\det(T^{-1})}_{\text{(L6n.7)} = 1/\cancel{\det(T)}} = \boxed{\det(A)} \quad (2)$$

2. Spur ist invariant:

$$Sp(A') = Sp(T \cdot A \cdot T^{-1}) \overset{\text{(L5.6e.4)}}{=} Sp(\underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=1} \cdot A) = Sp(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j \quad (3)$$

A sei diagonalisierbar, $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (4) Dann gilt:

3. Determinante = Produkt der Eigenwerte: $\boxed{\det(A)} \overset{(2)}{=} \det(D) \underset{\text{Leibniz}}{\overset{\text{(L6f.1)}}{=}} \boxed{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}$ (5)

4. Spur = Summe der Eigenwerte: $\boxed{Sp(A)} = Sp(D) = \boxed{\sum_j \lambda_j}$ (6)

3. und 4. gelten auch dann, wenn Matrix nicht diagonalisierbar ist: L7q
(also kein T existiert, für welches $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ gilt)

4 (allgemein): Determinante = Produkt der Eigenwerte:

Charakteristisches Polynom: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda)$ (1)

Bei $\lambda = 0$: $P_A(0) = \boxed{\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j}$ (2)

3 (allgemein): Spur = Summe der Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} A^1{}_1 - \lambda & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 - \lambda & & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & & A^n{}_n - \lambda \end{vmatrix} = (A^1{}_1 - \lambda)(A^2{}_2 - \lambda) \dots (A^n{}_n - \lambda) + \text{Terme in } \lambda^{m \le n-2} \quad (3)$$

$$= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j + \text{Terme in } \lambda^{m \le n-2} \quad (4)$$

Andrerseits: $P_A(\lambda) \overset{(1)}{=} (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + \text{Terme in } \lambda^{m \le n-2}$ (5)

Vergleiche lineare Terme in (5), (6): $\boxed{Sp(A) = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$ (6)

Zusammenfassung: L7 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren

ZL7

Eigenwertgleichung: $A \cdot \vec{v} = \lambda \, \vec{v}$ — λ: Eigenwert, $\vec{v}$: Eigenvektor (1)

Bedingung an EW: $0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) := P_A(\lambda)$ charakteristisches Polynom (2)

Für $A \in mat(\mathbb{C}, n, n)$ ist $P_A(\lambda)$ ein Polynom v. Grad n, mit n Nullstellen. (3)
diese entsprechen den n Eigenwerten v. A

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen EV $\vec{v}_j$ durch Lösen des linearen Gleichungsystems: $(A - \lambda_j \mathbb{1}) \vec{v}_j = \vec{0}$ (4)

Falls n linear unabhängige EV existieren, wird A diagonalisiert durch, $T^{-1} \cdot A \cdot T = D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (5)

wobei T die EV als Spaltenvektoren hat: $T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ (6)

Determinante = Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \prod_j \lambda_j$ (7)

Spur = Summe der Eigenwerte: $Sp(A) = \sum_j \lambda_j$