

L5.4 Inverse einer Matrix

L5.4a

Ausgangsfrage: Wie löst man ein lineares Gleichungssystem (LSG)?

Betrachte n lineare Gleichungen für n Unbekannte:

$$\begin{aligned}
 A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n &= b^1 \\
 A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \dots + A^2_n x^n &= b^2 \\
 \vdots &\vdots \\
 A^n_1 x^1 + A^n_2 x^2 + \dots + A^n_n x^n &= b^n
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$A^i_j x^j = b^i$
 $i, j = 1, \dots, n$

Ziel: durch geeignete Umformungen

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

bringe man das LSG in 'Diagonalform'

(1 auf der 'Diagonalen', 0 überall sonst):

(2)

$$\begin{aligned}
 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n &= d^1 \\
 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n &= d^2 \\
 \vdots &\vdots \\
 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 1 \cdot x^n &= d^n
 \end{aligned}$$

Dann folgt sofort:

$x^i = d^i$

Nützliches Hilfsmittel (um Schreiberei zu reduzieren): 'Erweiterte Matrix':

L5.4b

Start:		Ziel:	
$ \begin{array}{cccc c} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n & b^1 \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n & b^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n & b^n \end{array} $	$\xrightarrow{\text{'Gauß-Verfahren'}}$	$ \begin{array}{cccc c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & d^n \end{array} $	(1)

Beispiel: finde Lösung des Systems:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} x^1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} x^3 &= 1 \\
 x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 2 \\
 2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Ratschlag: Falls Brüche auftauchen, Zeile mit Hauptnenner durchmultiplizieren!

<p>Zeile:</p> <p>↓</p> <p>Erweiterte Matrix:</p> $ \begin{array}{l} [1]: \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \quad 1 \\ [2]: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \quad 2 \\ [3]: \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad \quad 1 \end{array} \tag{3} $	⇒	$ \begin{array}{l} 3[1]: \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \quad 3 \\ [2] - 3[1]: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \quad -1 \\ [3] - 6[1]: \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad \quad -5 \end{array} \tag{4} $
---	---	--

$$\begin{array}{l}
 [1] - [2]: \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \quad \leftarrow \\
 [2] + 2[3]: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & -11 \end{array} \quad (1) \Rightarrow \\
 [2] - [3]: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 [1] + \frac{1}{3}[3]: \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16/3 \end{array} \quad \boxed{L5.4c} \\
 \frac{1}{3}[2]: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -11/3 \end{array} \quad (2) \\
 \frac{1}{3}[3]: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}
 \end{array}$$

Lösung: $x^1 = 16/3, \quad x^2 = -11/3, \quad x^3 = 4/3$ (3)

Check durch einsetzen: $\frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{16}{9} + \frac{-11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$ ✓ konsistent mit z1 ✓

$x^1 + 2x^2 + 3x^3 = \frac{16}{3} - 2 \cdot \frac{11}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ✓ (4)

$2x^1 + 3x^2 + x^3 = 2 \cdot \frac{16}{3} - 3 \cdot \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

Falls das Gauß-Verfahren eine Zeile der Form $0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad d \neq 0$ liefert, hat das LGS keine Lösung.

Falls das Gauß-Verfahren eine 'Nullzeile' der Form $0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0$ liefert, kann eine der Variablen x^v frei gewählt werden. Setze diese Variable gleich einem Parameter, z.B. $x^v = t$. Lösung ist dann eine 'Parameterschar'.

(Falls m Nullzeilen vorkommen, sind m der Variablen frei wählbar, \Rightarrow m unabhängige Parameter.)

Betrachte nun analoges Gleichungssystem, aber mit anderem Vektor rechts, \vec{b} L5.4d

Um es zu lösen, müssten wir Gauß-Verfahren wiederholen. Umständlich!

Es geht aber auch kompakter, mittels Matrix-Notation:

Kompakte Notation für (a.1): $A^i_j x^j = b^i$ (1)

Schreibe $A = \{A^i_j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, $\vec{x} = \{x^j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, 1)$ (2)

(quadratisch) $\vec{b} = \{b^i\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, 1)$

Matrix-Notation (1): $A \cdot \vec{x} \stackrel{(1)}{=} \vec{b}$ $(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix})$ (3)

Angenommen, es gibt eine 'inverse Matrix' zu A, mit: $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}$ (4)

dann: $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \stackrel{(3)}{=} A^{-1} \cdot \vec{b}$ $(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix})$ (5)

(4): $\mathbb{1}$ $(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$

Gesuchte Lösung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ $(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix})$ (6)

(funktioniert für alle \vec{b} !)

Eine quadratische Matrix $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ heisst 'invertierbar',

falls eine 'inverse Matrix' $A^{-1} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ existiert, mit

$$\boxed{A^{-1}A = \mathbb{1}} \quad (1) \quad \text{und} \quad \boxed{AA^{-1} = \mathbb{1}} \quad (2)$$

wobei $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{Einheitsmatrix.} \quad (3)$

(1) impliziert (2): $A = A \cdot \mathbb{1} \stackrel{(1)}{=} A \cdot (A^{-1} \cdot A) \stackrel{\text{Assoziativit\u00e4t}}{=} (A \cdot A^{-1}) \cdot A \quad (4)$
 $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow (2) \quad (5)$

[Analog: (2) impliziert (1).]

Wie findet man Inverse? Seite L5.4h. Kriterien f\u00fcr Invertierbarkeit: sp\u00e4ter...

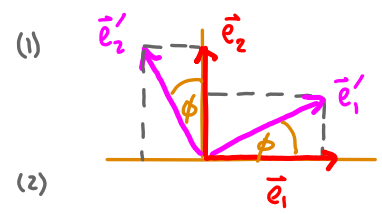
Beispiel: 2x2-Rotationsmatrix

Rotation: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(\phi)} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(\phi)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$

Rotationsmatrix:

$$\boxed{R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}}$$

[laut (L5.2d.5) sind Spalten v. R die Abbilder v. \vec{e}_1, \vec{e}_2]



Inverse v. R = Rotation um $-\phi$: $R^{-1}(\phi) = R(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (3)$

Check: $R^{-1}(\phi)R(\phi) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & -cs + sc \\ -sc + cs & (-s)^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$

Übrigens: $R(\phi_1)R(\phi_2) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & -s_1s_2 + c_1c_2 \end{pmatrix} \quad (5)$

$\cos \phi_1 = c_1$
 $\sin \phi_1 = s_1$
 $\cos \phi_2 = c_2$
 $\sin \phi_2 = s_2$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Beispiel: Allgemeine 2x2-Matrix

LS.49

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (1) dann

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Inverse existiert nur falls $ad-bc \neq 0$ (3)

Check:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Eigenschaften der Inversen

1) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ (5)

Check: $(\lambda^{-1} A^{-1}) \cdot (\lambda A) \stackrel{(2.4)}{=} \lambda^{-1} \lambda (A^{-1} \cdot A) = 1 \cdot \mathbb{1}$ (6)

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (7)

Check: $(B^{-1} \cdot A^{-1}) (A \cdot B) = \underbrace{B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A}_{\mathbb{1}} \cdot B = B^{-1} \cdot B = \mathbb{1} \quad \square$ (8)

Warnung: $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ [wie auch in \mathbb{R} : $(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$] (7)

Bestimmung der Inversen: Rückführung auf Lösung v. n linearen Gleichungssystemen LS.4h

Sei $A = \{A^i_j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ (1)

und

$$A^{-1} \equiv C \equiv \{C^j_k\} = \begin{pmatrix} C^1_1 & \dots & C^1_k & \dots & C^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^i_1 & \dots & C^i_k & \dots & C^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^n_1 & \dots & C^n_k & \dots & C^n_n \end{pmatrix} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \dots, \vec{c}_n) \quad (2)$$

n Spaltenvektoren, mit Komponenten: $(\vec{c}_k)^j \equiv C^j_k$ (3)

$\Rightarrow A \cdot A^{-1} \stackrel{(2.4)}{=} \mathbb{1}$ (4)

$A^i_j C^j_k = \delta^i_k$ (5)

$A \cdot \vec{c}_k = \vec{e}_k$ (6)

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_j & \dots & A^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1_k \\ \vdots \\ C^j_k \\ \vdots \\ C^n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_k \quad (7)$$

[spielt die Rolle von b in (d.3)]

Für jeden Wert von $k = 1, \dots, n$ liefert (6) ein anderes LGS (wegen anderem \vec{e}_k), zu lösen für den Spaltenvektor \vec{c}_k . [(h.6) hat dieselbe Form wie (d.3)] (8)

Die aus diesen Spaltenvektoren gebildete Matrix (2) ist dann die gesuchte Inverse, A^{-1}

Die n Gl.systeme der Form (h.7) lassen sich gleichzeitig lösen, mit Gauß-Verfahren:

LS.4i

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 A_1^1 & \dots & A_1^j & \dots & A_1^n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
 A_i^1 & \dots & A_i^j & \dots & A_i^n & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 A_n^1 & \dots & A_n^j & \dots & A_n^n & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Gauß-Verfahren}} &
 \begin{array}{ccc|ccc}
 C_1^1 & \dots & C_1^k & \dots & C_1^n \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 C_j^1 & \dots & C_j^k & \dots & C_j^n \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 C_n^1 & \dots & C_n^k & \dots & C_n^n
 \end{array}
 \end{array}$$

(h.8): $C = \underline{A}^{-1}$ (2)

Beispiel (vergleiche Seite b):

Zeile:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l}
 [1]: \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad | \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 [2]: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\
 [3]: \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

A (3)

$$\begin{array}{l}
 3[1]: \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\
 [2] - 3[1]: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad | \quad -3 \quad 1 \quad 0 \\
 [3] - 6[1]: \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad -6 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{l}
 [1] \quad [2]: \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad | \quad 6 \quad -1 \quad 0 \\
 [2] + 2[3]: \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -15 \quad | \quad 1 \quad 2 \\
 [2] - [3]: \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \quad | \quad 3 \quad 1 \quad -1
 \end{array}$$

(1)

LS.4j

$$\begin{array}{l}
 [1] + \frac{1}{3}[3]: \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \quad | \quad 7 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3}[2]: \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -5 \quad | \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \\
 \frac{1}{3}[3]: \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

$= A^{-1}$ (2)

Check:

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \begin{matrix} (i,3) \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (j,2) \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 21 & -2 & -1 \\ -15 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (21-15+3) & (-2+1+1) & (-1+2-1) \\ (63-90+27) & (-6+6+9) & (-3+12-9) \\ (126-135+9) & (-12+9+3) & (-6+18-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

L5.5 Allgemeine lineare Abbildungen und Matrizen

L5.5a

V sei ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Basis $V \equiv \text{span}\{\hat{v}_j\}, j=1, \dots, n \leftarrow \dim(V)$ (1)

W sei ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Basis $W \equiv \text{span}\{\hat{w}_i\}, i=1, \dots, m \leftarrow \dim(W)$ (2)

[Hut bedeutet hier: allgemein/abstrakt, im Gegensatz zu bisherigen Spaltenvektoren in $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$]

Betrachte lineare Abbildung: $\hat{A} : V \rightarrow W$ (3)

Wirkung auf Basis sei: $\hat{v}_j \mapsto \hat{u}_j = \hat{A}(\hat{v}_j) \equiv \hat{w}_i A^i_j$ (4)
 (durch diese Information ist A eindeutig festgelegt)
 Bild von v-Basisvektor j ist Linearkombination von w-Basisvektoren

Wirkung von A auf beliebigen Vektor in V : $\hat{v}_j x^j \equiv \hat{x} \mapsto \hat{A}(\hat{x}) = \hat{y} \equiv \hat{w}_i y^i$ (5)

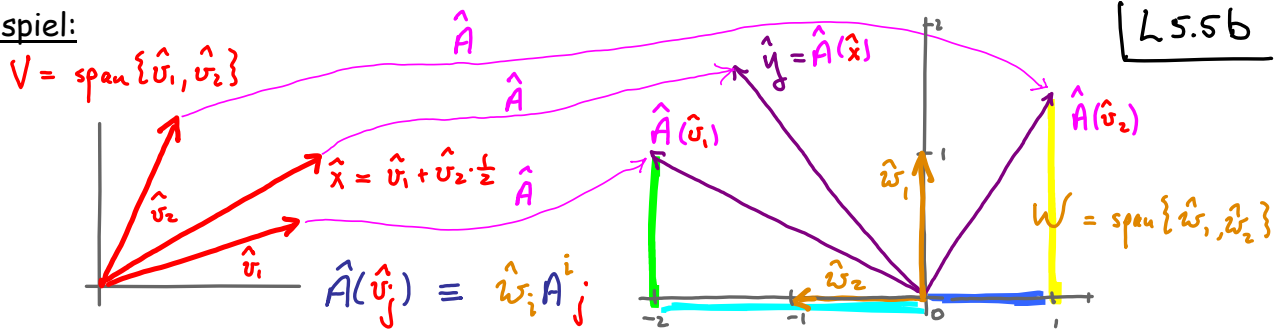
(dargestellt in jeweiliger Basis):

$\hat{w}_i y^i = \hat{y} \stackrel{(5)}{=} \hat{A}(\hat{v}_j x^j) = \hat{A}(\hat{v}_j) x^j \stackrel{(4)}{=} \hat{w}_i A^i_j x^j \stackrel{(6)}{=} \hat{w}_i \underbrace{A^i_j x^j}_{= y^i} \Rightarrow y^i = A^i_j x^j$ (7)
 A ist linear, (L5b.2)

(7) entspricht einer Abbildung zwischen Standardvektorräumen:
 $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$
 $(x^1, \dots, x^n)^T = \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} = \vec{y} = (y^1, \dots, y^m)^T$ (8)
 $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

Beispiel:

L5.5b



Laut Skizze:

$\hat{A}(\hat{v}_1) = \hat{u}_1 = \hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2 = \hat{w}_i A^i_1 \Rightarrow A^1_1 = 1, A^2_1 = 2$ (1)

$\hat{A}(\hat{v}_2) = \hat{u}_2 = \hat{w}_1 \cdot \frac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1) = \hat{w}_i A^i_2 \Rightarrow A^1_2 = \frac{3}{2}, A^2_2 = -1$ (2)

Können wir hieraus die Wirkung v. A auf einen anderen Vektor, \vec{x} bestimmen? Ja!

$\hat{y} \equiv \hat{A}(\hat{x}) = \hat{A}(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 \cdot \frac{1}{2}) = \hat{A}(\hat{v}_1) \cdot 1 + \hat{A}(\hat{v}_2) \cdot \frac{1}{2}$ (3)

$\stackrel{(1), (2)}{=} (\hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2) \cdot 1 + (\hat{w}_1 \cdot \frac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{2} = \hat{w}_1 \cdot \frac{7}{4} + \hat{w}_2 \cdot \frac{3}{2}$ (4)
 $1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2}$

Kompaktversion in Matrixnotation:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3/2 \cdot 1/2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ (5)

Für Basisvektoren: $V \xrightarrow{\hat{A}} W$ L5.5c

$$V \ni \hat{v}_j \xrightarrow{\hat{A}} \hat{u}_j = \hat{A} \hat{v}_j = \hat{w}_i A^i_j \in W \quad (1)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow (L2.5a.4) \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}} (L2.5a.4)$

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_j \xrightarrow{\hat{A}} \vec{u} = A \hat{e}_j = \begin{pmatrix} \hat{f}_i A^i_j \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^i_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix} = \vec{A}_j \in \mathbb{C}^m \quad (2)$$

Position j Position i

$$\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ der Matrix } A, \text{ ist Bild des Basisvektors } \hat{e}_j \text{ unter Abbildung } A. \quad (4)$$

Für allgemeine Vektoren: $V \xrightarrow{\hat{A}} W$

$$V \ni \hat{v}_j x^j = \hat{x} \xrightarrow{\hat{A}} \hat{A} \hat{x} = \hat{y} = \hat{w}_i y^i \in W \quad (5)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \phi_{\hat{w}}$

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \vec{x} \xrightarrow{\hat{A}} A \cdot \vec{x} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m \quad (6)$$

L5.6 Basistransformation [vergleiche Seite L2.5a,b] [wie L5.5, nun mit $W=V$] L5.6a

$\{\hat{v}_j\}, \{\hat{v}'_{i'}\}$ seien zwei Basen für V , $\dim(V) = n$ mit $\hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j \quad (1)$
 $j, i' = 1, \dots, n$

In $\{\hat{v}_j\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}_j x^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad (2)$

In $\{\hat{v}'_{i'}\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}'_{i'} x'^{i'} \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{x}' \in \mathbb{C}^n \quad (3)$

$T = \phi_{\hat{v}'} \circ \phi_{\hat{v}}^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \phi_{\hat{v}'}(\phi_{\hat{v}}^{-1}(\vec{x}))$

$\hat{v}'_{i'} x'^{i'} \stackrel{(3)}{=} \hat{x} \stackrel{(2)}{=} \hat{v}_j x^j \stackrel{(1)}{=} \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j x^j \quad (4)$

Fazit: $x'^{i'} = T^{i'}_j x^j \quad (5)$

Matrixnotation: $\vec{x}' = T \vec{x} \quad (6)$

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^{i'} \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^1_1 & \dots & T^1_j & \dots & T^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^{i'}_1 & \dots & T^{i'}_j & \dots & T^{i'}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^n_1 & \dots & T^n_j & \dots & T^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Neue Koordinaten lassen sich durch Matrixmultiplikation von T mit den Alten berechnen!

Rücktransformation mittels Inverser Matrix: $T^{-1} \cdot \vec{x}' \stackrel{(6)}{=} \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= I} \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad (8)$

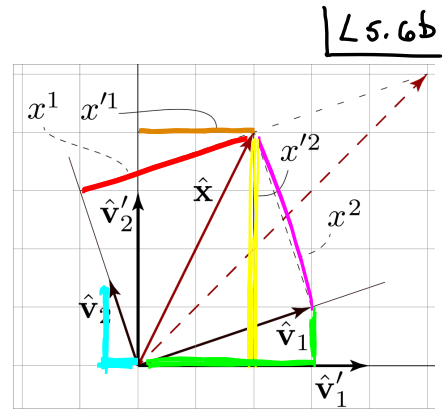
Beispiel:

$$\hat{v}_1 = \hat{v}'_1 \frac{3}{4} + \hat{v}'_2 \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\hat{v}_2 = \hat{v}'_1 \left(-\frac{1}{8}\right) + \hat{v}'_2 \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\hat{v}_j = \hat{v}'_i T^{ij} \quad (1)$$

$$T = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$



Der Vektor \hat{x} hat zwei Darstellungen:

Einerseits, in $\{\hat{v}_j\}$ -Basis: $\hat{x} = \hat{v}_1 \cdot 1 + \hat{v}_2 \cdot 2 \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{x} \quad (5)$

Andrerseits, in $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis: $\hat{x} = \hat{v}'_1 \frac{1}{2} + \hat{v}'_2 \frac{4}{3} \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \vec{x}' \quad (6)$

(5) & (6) sind konsistent mit Skizze und (L5.6a.7):

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \stackrel{(5.6a.7)}{=} \overbrace{\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix}}^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/8 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Transformation einer Matrix-Darstellung von einer Basis in eine andere

L5.6c

$A: V \rightarrow V$, sei eine lineare Abbildung, mit $\hat{A}: \hat{x} \mapsto \hat{y}$

In $\{\hat{v}_j\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}_j x^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{x} \quad (1)$
 $\hat{y} = \hat{v}_j y^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{y} \quad (2)$

In $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis, $\hat{x} = \hat{v}'_i x'^i \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{x}' \quad (1')$
 $\hat{y} = \hat{v}'_i y'^i \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{y}' \quad (2')$

habe A die Darstellung $\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad (3)$
 [siehe (5.5a.8, 5.5c.6)]

habe A die Darstellung $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}' \quad (3')$
 [siehe (5.5a.8, 5.5c.6)]

Die zwei Basen seien Verknüpft durch die Transformation

$$\hat{T}: \hat{v}_j = \hat{v}'_i T^{ij} \quad (4)$$

Dann sind Koordinaten verknüpft durch:

$$\vec{x}' = T \cdot \vec{x} \quad (5), \quad \vec{y}' = T \cdot \vec{y} \quad (5')$$

$$T^{-1} \cdot \vec{x}' \stackrel{(5)}{=} \vec{x} \quad (6), \quad T^{-1} \cdot \vec{y}' \stackrel{(5')}{=} \vec{y} \quad (6')$$

Und A' mit A durch:

$$\vec{y}' \stackrel{(5')}{=} T \cdot \vec{y} \stackrel{(3)}{=} T \cdot A \cdot \vec{x} \stackrel{(6)}{=} T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \vec{x}' \quad (7)$$

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$$

Interpretation: Wie wirkt lineare Abbildung auf Spaltenvektor in neuer Basis (wie lautet A')? Schicke ihn (3) zunächst in alte Basis (mittels T^{-1}), bilde ihn dort ab (mittels A), und schicke ihn dann zurück (mittels T).

Beispiel:

A : sei Streckung in \hat{v}_1 -Richtung um Faktor 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

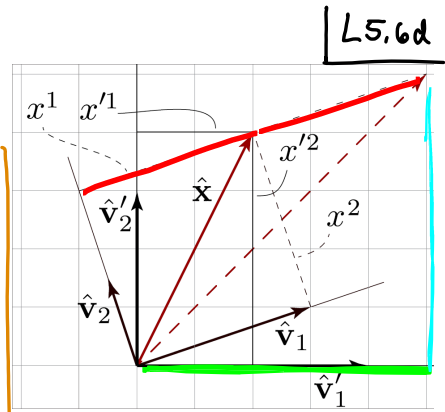
Falls nicht offensichtlich, wird A wie folgt bestimmt:

(5.6a.1): $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{v}_j \cdot A^{jj}$ (1)

$\hat{A}(\hat{v}_1) = \hat{v}_1 \cdot \overset{A^1_1}{2} + \hat{v}_2 \cdot \overset{A^2_1}{0}$

$\hat{A}(\hat{v}_2) = \hat{v}_1 \cdot \overset{A^1_2}{0} + \hat{v}_2 \cdot \overset{A^2_2}{1}$

(2) } $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4)



Finde nun Darstellung v. A in der $\{\hat{v}'_i\}$ -Basis:

$A' \stackrel{(5i.8)}{=} T \cdot A \cdot T^{-1} = \overset{(6b.4)}{\begin{pmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \cdot \overset{(4)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{(L5.4g.2)}{\frac{12}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ (5)

Wie wirkt A auf den Vektor $\hat{x} \xrightarrow{\hat{\phi}_{\hat{v}'_i}} \bar{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $A' \cdot \bar{x}' = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ (6)

Spur einer quadratischen Matrix

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

L5.6e

Spur = Summe der Diagonalelemente:

$Sp(A) = \sum_i A^i_i$ (1)

Beispiel:

$Sp \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 2 = 6$ (2)

Spur eines Matrixprodukts ist zyklisch invariant:

$Sp(\overbrace{A \cdot B}^{(1)}) \stackrel{(1)}{=} \sum_i (A \cdot B)^i_i = \sum_{ij} A^i_j B^j_i = \sum_{ij} B^j_i A^i_j = Sp(\overbrace{B \cdot A}^{(3)})$ (3)

Analog:

$Sp(\overbrace{A \cdot B \cdot C}^{(3)}) \stackrel{(3)}{=} Sp(\overbrace{C \cdot A \cdot B}^{(4)}) = Sp(B \cdot C \cdot A)$ (4)

Spur ist invariant unter Basistransformationen:

$A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$ (5)

$Sp(A') \stackrel{(5)}{=} Sp(\overbrace{T \cdot A \cdot T^{-1}}^{(4)}) \stackrel{(4)}{=} Sp(\underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=1} \cdot A) = Sp(A)$ (6)

Zusammenfassung: L5.5-6 BasistransformationenZL5cZwei Vektorräume: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\}$, $W = \text{span}\{\hat{w}_i\}$ (1)Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A}: V \rightarrow W$ $\hat{x} = \hat{v}_j x^j \mapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i$ (2)Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i_j$ $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$, $A = \{A^i_j\}$ (3)In Standardbasis: A bildet Basisvektor \vec{e}_j ab auf: $\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ von } A$ (4)Zwei Basen für denselben Raum: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\} = \text{span}\{\hat{v}'_i\}$ (5)Basistransformation: $T: V \rightarrow V$ $\hat{v}_j = \hat{v}'_i T^i_j$ (6)Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^i_j\}$ $x^{i'} = T^i_{j'} x^j$, $\vec{x}' = T \cdot \vec{x}$ (7)Darstellung v. altem Basisvektor \hat{v}_j in neuer Basis: $\vec{T}_j = \text{Spalte } j \text{ von } T$ (8)Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^j_{i'}\}$ $\hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^j_{i'}$, $x^j = (T^{-1})^j_{i'} x^{i'}$ (9)Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis: $(\vec{T}^{-1})_{i'} = \text{Spalte } i' \text{ von } T^{-1}$ (10)Bezug zwischen $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ (11) und $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}'$ (12) $A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$ (13)