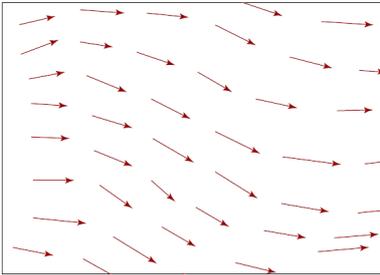


V3.4 Gradientenfelder

V3.4a

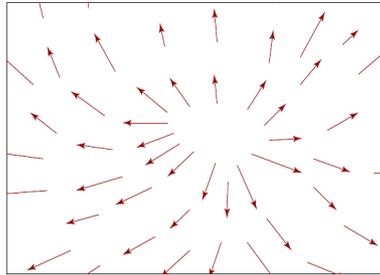
Vektorfeld: $\vec{u} : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow L \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u^n(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Vektorfelder haben oft Struktur:



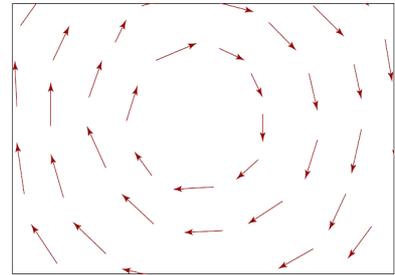
I: quellfrei, wirbelfrei

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{0} \end{aligned}$$



II: Quellfeld

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &\neq 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{0} \end{aligned}$$



III: Wirbelfeld

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u} &\neq 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

Ziel (langfristig): wie lassen sich diese Eigenschaften mathematisch charakterisieren?

Gradientenfeld

[wir benutzen kartesische Koordinaten, \vec{x}]

V3.4b

Gegeben sei ein Skalarfeld:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \varphi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

Der Gradient dieses Skalarfelds wird ein 'Gradientenfeld' genannt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \varphi : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \vec{x} &\mapsto \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} \equiv \begin{bmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d \varphi(\vec{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Umgekehrt: gegeben sei ein Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \vec{u} : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \vec{x} &\mapsto \vec{u}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

Frage: ist \vec{u} ein Gradientenfeld?

d.h., existiert ein Skalarfeld φ , der Form (1), mit $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}}$? (4)

Beispiel: ist $(d=2)$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2x^2 \end{bmatrix} \quad \text{ein Gradientenfeld?} \quad (5)$$

Ja, denn es lässt sich schreiben als:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial^1 (x^1 x^2)^2 \\ \partial^2 (x^1 x^2)^2 \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} \quad \text{mit} \quad \varphi(\vec{x}) = (x^1 x^2)^2 \quad (6)$$

Wichtige Anwendung: konservative Kraftfelder (Arbeit ist wegunabhängig) sind Gradientenfelder. Deswegen ist es wichtig, Kriterien zu finden die klären, wann $\vec{u}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld ist.

V 3.4c

Sei $\vec{u}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld (hinreichend glatt), dann gilt: $u^i = \frac{\partial^i \varphi}{\partial x^i}$ (V3.2e,4) (1)
kartesisch

Somit: $\partial_i u^j - \partial_j u^i = \partial_i \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j} - \partial_j \frac{\partial^i \varphi}{\partial x^i} = 0$ (2)
Satz v. Schwarz, (C3c.6)

Beispiel: $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2 x^2 \end{pmatrix}$ (3)

$$\partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 = \partial_1 (2(x^1)^2 x^2) - \partial_2 (2x^1(x^2)^2) = 4x^1 x^2 - 4x^1 x^2 = 0$$
 (4)

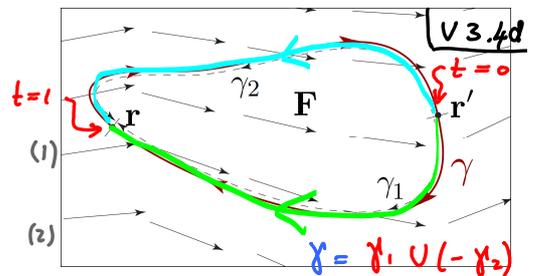
(2) ist ein notwendige, aber nicht ausreichende, Bedingung für ein Gradientenfeld.

Wir werden zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$\left(\int_{\gamma_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \text{ ist wegunabhängig } \forall \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \iff \left(\oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \right)$ Linienintegral entlang beliebigem geschlossenem Weg verschwindet (5)
(6a) (6b)
 $(\vec{u} \text{ ist ein Gradientenfeld})$ (6)

Begründung für (c.5):

Betrachte zwei Wege von \vec{r}' nach \vec{r} :
 $\gamma_1 = \{ \vec{r}_1(t) \mid t \in (0,1) \}$, $\gamma_2 = \{ \vec{r}_2(t) \mid t \in (0,1) \}$,
 Zweiter Weg, rückwärts: $-\gamma_2 = \{ \vec{r}_2(t) \mid t \in (1,0) \}$



Linienintegral: $\int_{\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 dt \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}_2(t)) = - \int_1^0 dt \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \stackrel{(2)}{=} - \int_{-\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ (3)

Folglich: $\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_{\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \stackrel{(3)}{=} \int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{-\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}$ (4)
geschlossener Weg

Somit: $\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \iff \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ (5)

Physikalische Bedeutung von (c.5): ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ wird 'konservativ' genannt, falls Arbeit entlang jedem geschlossenem Weg = 0: $\oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \quad \forall \gamma$ (6)

[Die Energie, die bei den entgegen der Kraft gerichteten Wegstrecken verloren geht, wird kompensiert durch die Energie, die bei den entlang der Kraft gerichteten Wegstrecken gewonnen wird.]

Laut (c.5): für konservatives Kraftfeld ist Arbeit wegunabhängig.

Physik-Konvention (7)

Laut (c.6): ein konservatives Kraftfeld ist ein Gradientenfeld.

$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla \varphi$ (8)

Begründung für (c.6a) \Leftarrow :

V3.4e

Annahme: $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}}$ ist ein Gradientenfeld. (1)

$\bullet x = r(t)$

Parametrisierung eines Weges $\vec{\gamma}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}(s),$ (2)

$\bullet r(s)$

$\vec{x}' = \vec{r}(0), \vec{x} = \vec{r}(t)$ (3)

$\bullet x' = r(0)$

$$\int_{\vec{\gamma}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \stackrel{\text{(Vim.6)}}{=} \int_0^t ds \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \vec{u}(\vec{r}(s)) \stackrel{\text{(i) } \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}(s))}{=} \quad (4)$$

$$\stackrel{\text{(V3.2e.4)}}{=} \int_0^t ds \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi(\vec{r}(s))}{\partial x^j} \frac{dx^j(s)}{ds} \quad (5)$$

$$\stackrel{\text{(C3g.4)}}{=} \int_0^t ds \frac{d\varphi(\vec{r}(s))}{ds} \stackrel{\text{(C3i.2)}}{=} \quad (6)$$

$$= \varphi(\vec{r}(t)) - \varphi(\vec{r}(0)) \stackrel{\text{(3)}}{=} \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}') \quad (7)$$

Gesamtänderung von φ von \vec{x}' nach \vec{x} , hängt nur von Endpunkten ab, also unabhängig vom Weg dazwischen!! (\Leftarrow)

Interpretation:

$$\stackrel{\text{(4)}}{=} \int d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi \quad (8) = \text{Summe der } \varphi \text{-Änderungen entlang aller Wegelemente}$$

(V3.2e.4): $\vec{\nabla} \varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \vdots \\ \partial_d \varphi \end{pmatrix}$

$\sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \cdot \frac{dg^j(x)}{dx} \stackrel{\text{(C3g.4)}}{=} \frac{df(\vec{g}(x))}{dx}$

$f \mapsto \varphi, \vec{g} \mapsto \vec{r}, x \mapsto s$

Begründung für (c.6a) \Rightarrow : Annahme: $\int_{\vec{\gamma}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u}$ ist wegunabhängig. (1)

V3.4f

Wähle Weg durch Punkt \vec{x} parametrisiert als

$\vec{\gamma} : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}(s)$ (2)

$\bullet x = r(t)$

und definiere:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \int_{\vec{\gamma}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \quad (3)$$

für gegebenes \vec{x}' ist (3), laut Annahme (1), eine Funktion nur v. \vec{x} , nicht vom Weg!

$\bullet r(s)$

$$\varphi(\vec{r}(t)) = \int_0^t ds \vec{u}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (4)$$

Ableiten nach t:

$$\text{links: } \frac{d}{dt} \varphi(\vec{r}(t)) \stackrel{\text{(C3g.4)}}{=} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi(\vec{r}(t))}{\partial x^j} \frac{dx^j(t)}{dt} \quad (5)$$

$$\text{rechts: } \frac{d}{dt} \int_0^t ds \vec{u}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (6)$$

$$= \vec{\nabla} \varphi_{\vec{r}=\vec{r}(t)} \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad (7)$$

$$= \vec{u}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (8)$$

$$(6)=(8): \quad \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{u}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad (9)$$

Dies gilt für beliebige Werte der Endgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$

somit: $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} \quad (10) \quad (\Rightarrow)$

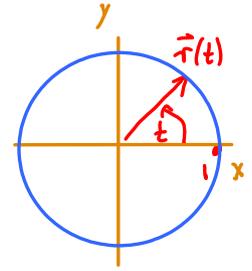
Beispiel 1: $\vec{u} : \mathbb{R}^2 = M \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (1) | V3.4g

Ist dies ein Gradientenfeld? Oder, äquivalente Frage laut (c.6b):
Ist Linienintegral entlang geschlossenen Weg = 0?

Parametrisierung
eines Kreises:
 $t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (4)$$



$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_0^{2\pi} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{u}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (5)$$

$\overset{(1)}{u^1(t) = y(t)}$
 $\overset{(1)}{u^2(t) = x(t)}$

$$= \int_0^{2\pi} dt [-\sin^2 t + \cos^2 t] = 0 \quad \checkmark \quad (6)$$

Geschlossenes Linienintegral = 0 $\xrightarrow{(c.6b)}$ \vec{u} könnte ein Gradientenfeld sein!

Konsistenzcheck (c.2): $\partial_x u^2 - \partial_y u^1 = \partial_x(x) - \partial_y(y) = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark \quad (2)$

Aber: (c.2) ist eine notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung!

Notwendige und hinreichende Bedingung für Gradientenfeld (ohne Beweis):

| V3.4h

Ein Vektorfeld $\vec{u} : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist ein Gradientenfeld, falls

$$\partial_i u^j - \partial_j u^i = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, d \quad (1)$$

und falls der Definitionsbereich, M, 'einfach zusammenhängend' ist.

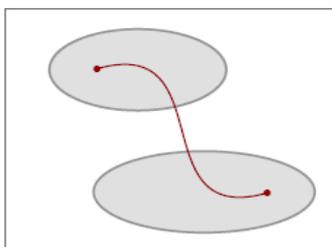
Def.: 'Zusammenhängendes Gebiet:' jede zwei Punkte können verbunden werden durch einen Weg, der das Gebiet nicht verlässt

$$\vec{x}, \vec{x}' \in M$$

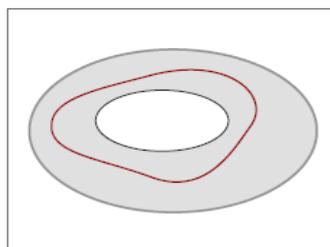
$$\gamma_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}'} \subset M \quad (2)$$

Def.: 'Einfach zusammenhängendes Gebiet:' jeder geschlossene Weg kann zu einem Punkt zusammengezogen werden.

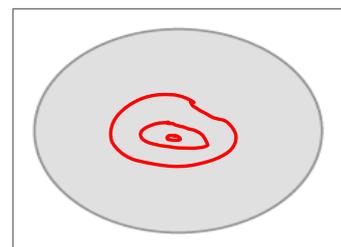
$$\subset M \quad (3)$$



nicht zusammenhängend



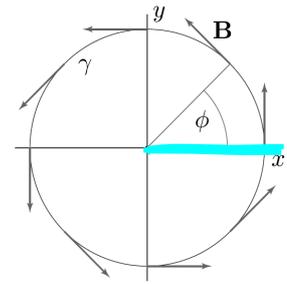
zusammenhängend



einfach zusammenhängend

Beispiel 2: $\vec{B} : M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ | V3.4i

$$\partial_x B_2 - \partial_y B_1 = \frac{1}{x^2+y^2} \left[\left(1 - \frac{x \cdot 2x}{x^2+y^2}\right) - \left(-\frac{-y \cdot 2y}{x^2+y^2}\right) \right] = 0 \quad (1)$$



Aber: M ist nicht einfach zusammenhängend. (2)

(h.1) $\Rightarrow \vec{B}$ ist kein Gradientenfeld (3)

(c.6b) \Rightarrow Linienintegral entlang geschlossenem Weg kann ungleich null sein. (5)

Z.B. Kreis um Ursprung: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$ (6)
geschlossenes Intervall

$$\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{B}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt \cdot 1 = 2\pi \neq 0 \quad (7)$$

vergleiche (5)

Auf einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich, $\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})$ nicht-negative reelle Achse (8)

ist \vec{B} ein Gradientenfeld: es gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \phi$ Polarkoordinatenwinkel, $\phi \in (0, 2\pi)$ (9)
selber nachrechnen! offenes Intervall

Es gilt wieder: $\int_{\tilde{\gamma}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 2\pi$ (10) das ist kein Widerspruch zu (c.6b), denn $\tilde{\gamma} = \gamma \setminus (1,0)$ (11)
nun ist der Weg nicht geschlossen: $t \in (0, 2\pi)$

Nabla-Operator

V3.2h = V3.4j

Erinnerung (Seite V3.2h): Gradient in kartesischen Koordinaten

$$\vec{\nabla} f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \stackrel{(e.3)}{=} \begin{pmatrix} (\vec{\nabla} f)^1 \\ (\vec{\nabla} f)^2 \\ \vdots \\ (\vec{\nabla} f)^d \end{pmatrix} \stackrel{(e.4)}{=} \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \text{mit } \partial^i = \partial_{x_i} = \left(\sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial^i \right) f \stackrel{(2)}{=} \vec{\nabla} f$$

Definition: 'Nabla-Operator':

(in kartesischen Koordinaten;
Definition üblich für d = 2 und 3)

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial^i = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \vdots \\ \partial^d \end{pmatrix} \quad (3)$$

(nützliche Eselsbrücke, zum Merken von
Gradient, Divergenz und Rotation)

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Differentialoperator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen.

beinhaltet Ableitungen

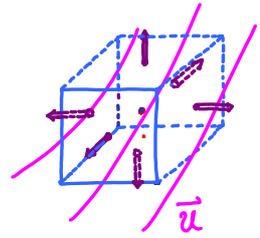
liefert einen Vektor, wenn er auf eine skalare Funktion einwirkt

(4)

V3.5 Divergenz Geometrische Interpretation: Ausfluss pro Volumenelement (siehe Januar) | V3.5a

Vektorfeld, d=n:

$$\vec{u}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u^d(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{\text{ES}}{=} \vec{e}_j u^j(\vec{x}) \quad (1)$$



Definition: 'Divergenz von \vec{u} ' in kartesischen Koordinaten
(in kartesischen Koordinaten)

$$\text{div}(\vec{u}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (2)$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{x}) \stackrel{\text{ES}}{=} \partial_i u^i(\vec{x}) = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \dots + \partial_d u^d \quad (3)$$

Notationscheck: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \underbrace{(\vec{e}_i \partial^i)}_{(V3.4j.3)} \cdot \underbrace{(\vec{e}_j u^j)}_{(4)} = \partial^i \delta_{ij} u^j = \partial_i u^i \quad (4)$

Beispiel: $\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_1 x^1 + \partial_2 x^2 + \partial_3 x^3 = 1 + 1 + 1 = 3 \quad (5)$

Rechenregeln: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6)$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{u}) = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{u} + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (7)$$

Beweis v. (6): $\hookrightarrow = \partial_i (\varphi u^i) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} (\partial_i \varphi) u^i + \varphi (\partial_i u^i) \quad (8)$

Laplace-Operator (Divergenz v. Gradient):

| V3.5b

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \stackrel{(a.3)}{=} \partial_i (\partial^i \varphi) \stackrel{\checkmark}{=} \sum_i \partial_i^2 \varphi \equiv \vec{\nabla}^2 \varphi \quad (1)$$

Definition 'Laplace-Operator' in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \partial_i \partial^i = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (2)$$

(Skalar-Differential operator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen)

Beispiel: $\vec{\nabla}^2 r = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3)$

$$\partial_i (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{z x^i}{z (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (4)$$

gilt für i = 1, 2, 3

$$\partial_i^2 = -\frac{z (x^i)^2}{z (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{r^3} [- (x^i)^2 + r^2] \quad (6)$$

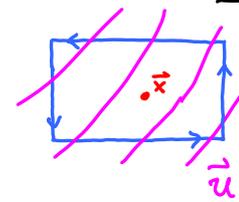
$$\vec{\nabla}^2 r \stackrel{(4)}{=} \sum_{i=1}^3 \left(\checkmark \right) \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{r^3} [-r^2 + 3r^2] = \frac{2}{r} \quad (7)$$

V3.6 Rotation Geometrische Interpretation: Zirkulation pro Flächenelement

V3.6a

Vektorfeld, d=n=3:

$$\vec{u}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{u}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} u^1(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ u^3(\vec{x}) \end{bmatrix} = \vec{e}_j u^j(\vec{x}) \quad (1)$$



Definition: 'Rotation von \vec{u} ' in kartesischen Koordinaten

(nur in d=3 Dimensionen definiert)

$$\text{rot } \vec{u} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{x}) \equiv \vec{e}_i \overset{\text{alternative Notation}}{\varepsilon_{ijk}} \partial_j u^k = \begin{bmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{bmatrix}$$

Notationscheck:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \underbrace{(\vec{e}_j \partial_j)}_{(V3.4j.3)} \times \underbrace{(\vec{e}_k \partial_k)}_{(u)} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j u^k \quad (3)$$

Beispiel: Sei

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} y^3 \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \partial_y 0 - \partial_z (-x) \\ \partial_z y^3 - \partial_x 0 \\ \partial_x (-x) - \partial_y y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 - 3y^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \times \vec{w} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{u}) = (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{u} + \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

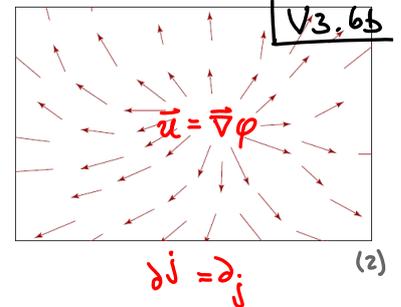
Beweis v. (5):

$$= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i (\varphi u^j) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} [(\partial_i \varphi) u^j + \varphi (\partial_i u^j)] = \quad (6)$$

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei':

Für ein beliebiges (zweifach differenzierbares)

Vektorfeld gilt: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0} \quad (1)$



Beweis:

(Beispielaufgabe)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) \stackrel{(6a.2)}{=} \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_k \varphi) \quad (2)$$

ε_{ijk} ist antisymmetrisch:

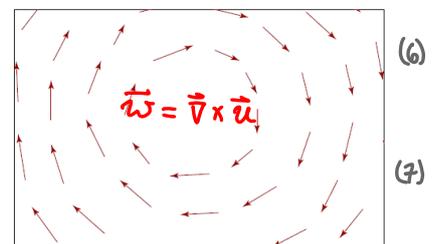
$$= -\vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_j \partial_k \varphi \quad (3)$$

Summationsindizes umbenennen:

$$\stackrel{k \leftrightarrow j}{=} -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \varphi \quad (4)$$

$$\partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi \stackrel{(6a.2)}{=} -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) \quad (5)$$

$$(5) = -(5) \Rightarrow (5) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0} \quad (6)$$



Wirbelfelder sind 'quelfrei':

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

Beweis analog (Hausaufgaben)

Zusammenfassung V3.3: Gradientenfeld

ZV3b

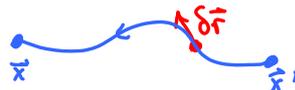
Gradientenfeld: $\vec{\nabla} \varphi: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}}$ (1)

$\left(\int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \text{ ist wegunabhängig } \forall \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \iff \oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ für geschlossenen Weg (1)

\Uparrow \Downarrow

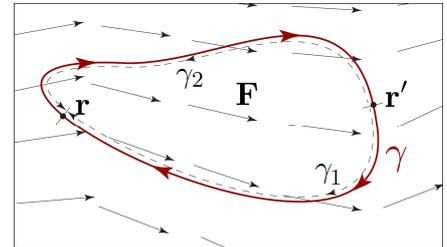
$\left(\vec{u} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \iff \left(\partial_j u^i - \partial_i u^j = 0, \text{ und } M \text{ ist einfach zusammenhängend} \right)$

Konkret: $\int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')$ (2)



Konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\vec{r}}$ (5)
 ist ein Gradientenfeld:

$W[\gamma] = \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ (6)
 $\iff W[\gamma_1] = W[\gamma_2]$ (7)



Arbeit von x' nach x ist unabhängig vom Weg! geschlossener Weg: $\delta = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

Zusammenfassung V3.2,4-6: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV3c

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(x^1 + \delta, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\Delta x^i}$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \sum_j \partial_j f(\vec{x}) u^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{u}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} = \vec{e}_i \partial^i \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^3 \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (4)

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = e_i \partial^i = \vec{e}_1 \partial^1 + \vec{e}_2 \partial^2 + \vec{e}_3 \partial^3$ (5)
 (Vektor-Diff.-Operator)

Laplace-Operator: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial^i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u^i = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \partial_3 u^3$ (7)

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j u^k = \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix}$ (8)
 (alle Indizes unten)

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ (9)

Wirbelfelder sind 'quelfrei': $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (10)